Aufgaben

Aufgabe 1. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

a. $9 | 4^n - 1 - 3n$,

b. $19 | 2^{3n+4} + 3^{3n+1}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $6n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 3. Seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ und

$$I := a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \cdots \cap a_n\mathbb{Z} = \{v \in \mathbb{Z} : \ a_1 | v, ..., a_n | v\}.$$

a. Zeigen Sie, dass I ein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist.

Es sei m die eindeutig bestimmte nichtnegative ganze Zahl so dass $I = m\mathbb{Z}$ ist. Die Zahl m heißt *das kleinste gemeinsame Vielfache* von $a_1, ..., a_n$. Dieses wird mit $\mathrm{kgV}(a_1, ..., a_n)$ bezeichnet. Zeigen Sie :

b. $\mathrm{kgV}(a_1, ..., a_n)$ ist ein Vielfaches von $a_1, ..., a_n$, und ist bezüglich der Teilbarkeitsrelation das kleinste Vielfache von $a_1, ..., a_n$,

c. $\mathrm{kgV}(a_1, ..., a_n) = \mathrm{kgV}(a_1, \mathrm{kgV}(a_2, ..., a_n))$,

d. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = |ab|$.
Hinweis : Blatt 1, Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Wir wollen folgenden Satz (von Wilson) beweisen : Es sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$, dann gilt :

$$m \text{ ist eine Primzahl} \Leftrightarrow (m-1)! \equiv -1 \pmod{m}.$$

Es sei $m = p \geq 5$ eine Primzahl. Zeigen Sie :

a. Für alle $1 \leq n \leq p - 1$ es existiert $1 \leq k \leq p - 1$ so dass gilt : $n \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$,

b. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k^2 \equiv 1 \pmod{p}$ gilt $k \equiv 1 \pmod{p}$ oder $k \equiv -1 \pmod{p}$,

c. $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Es sei $m \geq 5$ keine Primzahl. Zeigen Sie :

d. $(m-1)! \equiv 0 \pmod{m}$.

```
Die Blätter sollen bis Donnerstag,
den 30.10. um 14.15 Uhr in die dafür
vorgesehenen Einwurfkästen im Foyer des
Mathematischen Instituts abgegeben werden.
```