Blatt 11 : Die Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen: II.

Aufgabe 1. Es sei $m \geq 2$ und die Folge $(\Psi_n)_{n\geq 0}$ definiert durch :

$$\Psi_0 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} + e^{-\frac{1}{m}}\right), \ \Psi_1 = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} - e^{-\frac{1}{m}}\right)$$

und

$$\Psi_{n+2} = -(2n+1)m^2\Psi_{n+1} + m^2\Psi_n, \ n \geq 2.$$

Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$: $\omega_n = \frac{m\Psi_n}{\Psi_{n+1}}$. Zeigen Sie :

a. $\omega_n > 1$,

b. $\omega_n = (2n+1)m + \frac{1}{\omega_{n+1}}$,

c. $\omega_0 = [m, 3m, 5m, ...]$,

d. $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2}{m}} + 1\right) = 1 + \frac{1}{\omega_0 - 1} = [1, m-1, 3m, 5m, 7m, ...]$

Aufgabe 2. Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_1 > 0$ und $a_n > 1$ für $n \geq 2$. Wir setzen

$$x := [2a_0 + 1, 2a_1 + 1, 2a_2, 2a_3, 2a_4, ...].$$

a. Für $n \geq 2$ sei $x_n = \frac{1}{2}[1, 2a_n, 2a_{n+1}, ...]$. Zeigen Sie :

$$x_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n - 1 + x_{n+1}}}}$$

b. Es sei $y = 2x - 1$. Zeigen Sie :

$$y = [4a_0 - 1, a_1, 1, 1, a_2 - 1, 1, 1, a_3 - 1, 1, 1, ...].$$

Anmerkung : Man kann wie in Aufgabe 2 zeigen : Ist

$$x = [2a_0 + 1, 2a_1, 2a_2 + 1, 2a_3 + 1, 2a_4 + 1, ...],$$

dann ist

$$2x - 1 = [4a_0 + 1, a_1, 4a_2 + 2, a_3, 1, 1, a_4, \\ 4a_5 + 2, a_6, 1, 1, a_7, ...].$$

Aufgabe 3. Geben Sie die Kettenbruchentwicklung von $e^{\frac{2}{m}}$ für $m \geq 2$ an. Sind diese Zahlen rationale Zahlen oder quadratische Irrationalzahlen ?

Aufgabe 4. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Es sei :

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) := \{a_0 + a_1\zeta_n + a_2\zeta_n^2 + ... + a_{n-1}\zeta_n^{n-1} | a_0, ... a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}.$$

Zeigen Sie :

a. $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und ein Körper.

b. Gilt $n|m$, so ist $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

c. (2 Pkt.) Für jedes $d \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $n \geq 2$, so dass

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n).$$

(Hinweis : Man kann dafür Aufgabe 2 von Blatt 7 verwenden.)

Die Blätter sollen bis Donnerstag, den 15.01. um 14.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Einwurfkästen im Foyer des Mathematischen Instituts abgegeben werden.