Algebraische D-Moduln

Vorlesung im WS 2016/17

Thomas Reichelt

1 Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten

1.1 Filtrierte Ringe

sec:filtRing

Sei D (ein nicht notwendigerweise kommutativer) Ring mit 1 und $(D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine aufsteigende Filtrierung von additiven Untergruppen, s.d. gilt

1. $D_n = \{0\}$ für $n < 0$,
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_n = D$,
3. $1 \in D_0$,
4. $D_n \cdot D_m \subset D_{n+m}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$
5. $[D_n, D_m] = \{PQ - QP \mid P \in D_n, Q \in D_m\} \subset D_{n+m-1}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$

Wegen Eigenschaft 5. ist $GrD := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} Gr_n D := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} D_n/D_{n-1}$ ein graduierter, kommutativer Ring mit 1. Insbesondere ist $D_0 = Gr_0 D$ ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist GrD eine D_0-Algebra. Wir nehmen außerdem an, dass der Ring D die folgenden zusätzlichen Eigenschaften erfüllt

6. GrD ist noethersch
7. $Gr_1 D$ erzeugt GrD als D_0-Algebra

Wegen Lemma lem:RR0 A.1 ist D_0 dann auch ein noetherscher Ring. Außerdem können wir wegen 6., 7. und Lemma lem:MOfinite A.2 endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_s \in Gr_1 D$ wählen, s.d. GrD als D_0-Algebra von ihnen erzeugt wird. Wegen 7. gilt weiter

$$Gr_{n+1} D = Gr_1 D \cdot Gr_n D \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

und deshalb

$$D_{n+1} = D_n \cdot D_1 \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Sei D° der transponierte Ring von D[1]. Die Filtration $(D^\circ)_n := (D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ hat dann diesselben Eigenschaften 1. - 7.. Die Identität $D \to D^\circ$ induziert einen Isomorphismus von graduierten Ringen $GrD \simeq GrD^\circ$.

Sei M ein D-Modul. Ein aufsteigende Filtrierung $F_\bullet M = (F_n M)_{n\in\mathbb{Z}}$ von M durch aufsteigende Untergruppen heißt D-Modul Filtrierung , falls $D_n \cdot F_m M \subset F_{n+m}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$. Insbesondere sind die $F_n M$ selbst D_0-Moduln.

Eine D-Modul Filtration $F_\bullet M$ heißt **hausdorffsch**, falls $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F_n M = \{0\}$. Sie heißt **ausschöpfend**, falls $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n M = M$ gilt. Sie heißt **stabil**, falls ein $m_0 \in \mathbb{Z}$ existiert, s.d. $D_n \cdot F_m M = F_{n+m} M$, für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und alle $m \geq m_0$, gilt.

[1] Der transponierte Ring D° hat dieselbe unterliegende abelsche Gruppe wie D. Die Multiplikation ist definiert als $a \circ b := b \cdot a$

Eine D-Modul Filtrierung heißt **gut** falls

1. $F_nM = \{0\}$ für $n \ll 0$
2. $F_\bullet M$ ist ausschöpfend
3. F_nM sind endlich erzeugte D_0-Moduln
4. die Filtrierung $F_\bullet M$ ist stabil

Insbesondere ist eine gute Filtrierung hausdorffsch.

quivChargood **Lemma 1.1.** *Sei $F_\bullet M$ eine ausschöpfende, hausdorffsche D-Modul Filtrierung von M. Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *$F_\bullet M$ ist eine gute Filtrierung*
2. *der GrD-Modul GrM ist endlich erzeugt*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Da die Filtrierung stabil ist existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, s.d. $D_nF_{m_0}M = F_{n+m_0}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt, also auch $Gr_nD \cdot Gr_{m_0}M = Gr_{n+m_0}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Daraus folgt, dass $\bigoplus_{n \leq m_0} Gr_nM$ den GrD-Modul M erzeugt. Da die F_nM per Annahme endlich erzeugte D_0-Moduln sind , ist Gr_nM auch ein endlich erzeugter D_0-Modul. Da für $n \ll 0$ $F_nM = \{0\}$ gilt, folgt, dass auch $\bigoplus_{n \leq m_0} Gr_nM$ ein endlich erzeugter D_0-Modul ist. Daraus folgt, dass $Gr_\bullet M$ ein endlich erzeugter $Gr_\bullet D$-Modul ist.

2. $\Rightarrow$ 1.: Da $Gr_\bullet M$ endlich erzeugt ist und für $k < 0$ $Gr_kD = 0$ gilt, folgt, dass $Gr_nM = \{0\}$ für $n << 0$. Wegen Lemma lem:M0finite A.2 ist Gr_nM für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein endlich erzeugter D_0-Modul. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F_{n-1}M \longrightarrow F_nM \longrightarrow Gr_nM \longrightarrow 0$$

zeigt, das für hinreichend kleine n die Gleichung $F_{n-1}M = F_nM$ gilt, d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, s.d $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F_nM = F_{n_0}M$. Da die Filtration per Annahme hausdorffsch ist, gilt $F_{n_0}M = \{0\}$. Über Induktion nach n zeigt man dann, dass alle F_nM endlich erzeugte D_0-Moduln sind.
Sei jetzt $m_0 \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $\bigoplus_{n \leq m_0} Gr_nM$ den GrD-Modul GrM erzeugt. Sei $m \geq m_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} Gr_{m+1}M &= \bigoplus_{k \leq m_0} Gr_{m+1-k}D \cdot Gr_kM \\ &= \bigoplus_{k \leq m_0} Gr_1D \cdot Gr_{m-k}D \cdot Gr_kM \subset Gr_1D \cdot Gr_mM \subset Gr_{m+1}M \end{aligned}$$

d.h. $Gr_1D \cdot Gr_mM = Gr_{m+1}M$. Das zeigt

$$F_{m+1}M = D_1F_mM + F_mM = D_1 \cdot F_mM$$

Per Induktion erhalten wir

$$F_{m+n} = D_1 \cdot \ldots D_1 \cdot F_mM \subset D_n \cdot F_mM \subset F_{m+n}M$$

Also $F_{m+n}M = D_n \cdot F_mM$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. d.h. $F_\bullet M$ ist eine gute Filtrierung. □

Insbesondere ist $(D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine gute Filtrierung von D als D-Modul bezüglich der Links-Multiplikation.

Bemerkung 1.2. *Wir können die Stabilitätsbedingung in der Definition einer guten Filtration durch eine vermeintlich schwächere Bedingung ersetzen:*

4'. Es existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, s.d. $D_n \cdot F_{m_0}M = F_{m_0+n}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

od tofingen **Lemma 1.3.** *Sei M ein D-Modul mit einer guten Filtration $F_\bullet M$, dann ist M endlich erzeugt.*

Beweis. Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_nM = M$ und $F_{n+m_0}M = D_n \cdot F_{m_0}M$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und ein genügend großes $m_0 \in \mathbb{Z}$. D.h. $F_{m_0}M$ erzeugt M als D-Modul. Da $F_{m_0}M$ ein endlich erzeugter D_0-Modul ist, folgt die Aussage. □

fgModexgood **Lemma 1.4.** *Sei M ein endlich erzeugter D-Modul. Dann besitzt M eine gute Filtration.*

Beweis. Sei U ein endlich erzeugter D_0-Modul, der M als D-Modul erzeugt. Setze $F_nM = 0$ für $n < 0$ und $F_nM = D_n \cdot U$ für $n \geq 0$. Dann ist $U = Gr_0M$ und

$$Gr_nM = F_nM/F_{n-1}M = (D_n \cdot U)/(D_{n-1} \cdot U) \subset Gr_nD \cdot Gr_0M \subset Gr_nM$$

d.h. $Gr_nM = Gr_nD \cdot Gr_0M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Also ist GrM ein endlich erzeugter GrD-Modul. Die Behauptung folgt dann aus Lemma lem:equivChargood 1.1. □

ltRingnoeth **Proposition 1.5.** *Der Ring D ist links und rechts noethersch.*

Beweis. Sei L ein Linksideal von D. Die Filtrierung von D induziert einen Filtrierung $(L_n = L \cap D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. auf L. Man sieht leicht, dass dies eine D-Modul Filtrierung ist. Der graduierte Modul GrL ist natürlicherweise ein Ideal in GrD. Da GrD noethersch ist, ist GrL ein endlich erzeugter GrD-Modul. Wegen Lemma lem:equivChargood 1.1 ist die Filtrierung $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine gute Filtrierung. Aus Lemma lem:good tofingen 1.3 folgt dann , dass L endlich erzeugt ist. Das zeigt, dass D links noethersch ist. Für rechts noethersch ersetzen wir D durch D°. □

Proposition 1.6. *Sei M ein endlich erzeugter D-Links-Modul, dann besitzt M eine freie Auflösung $F^\bullet \to M$.*

Beweis. Da M endlich erzeugt ist, haben wir eine kurze exkate Sequenz

$$0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow D^{n_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Da D links-noethersch ist, ist ker endlich erzeugt, wir erhalten also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow D^{n_1} \longrightarrow D^{n_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

indem wir den Prozess immer weiter fortsetzen erhalten wir die gesuchte Auflösung. □

Sei $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ zwei Filtrationen des D-Moduls M. $F_\bullet M$ heißt **feiner** als $F'_\bullet M$, falls ein $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ existiert, s.d. $F_nM \subset F'_{n+k}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Ist $F_\bullet M$ feiner als $F'_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ feiner als $F_\bullet M$, dann sind die beiden Filtrationen **äquivalent**.

odFiltfiner **Lemma 1.7.** *Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung eines endlich erzeugten D-Moduls M. Dann ist $F_\bullet M$ feiner als jede andere ausschöpfende D-Modul Filtrierung auf M.*

Beweis. Sei $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ s.d. $D_n \cdot F_{m_0}M = F_{n+m_0}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sei $F'_\bullet M$ eine andere ausschöpfende D-Modul Filtrierung auf M. Da $F_{m_0}M$ ein endlich erzeugter D_0-Modul und $F'_\bullet M$ ausschöpfend ist, existiert ein $p \in \mathbb{Z}$, s.d. $F_{m_0}M \subset F'_pM$. Da $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, s.d $F_{n_0}M = \{0\}$. Setze $k := p + |n_0|$. Für $m \leq n_0$ gilt

$$F_mM = 0 \subset F'_{m+k}M.$$

Für $n_0 < m \leq m_0$ gilt , $-|n_0| \leq n_0 < m$ und $p = -|n_0| + k < m + k$ also

$$F_mM \subset F_{m_0}M \subset F'_pM \subset F'_{m+k}M$$

Für $m > m_0$ gilt schließlich $m - m_0 \leq m$, da m_0 positive ist. Es folgt

$$F_m M = D_{m-m_0} \cdot F_{m_0} M \subset D_m \cdot F'_p M \subset F'_{m+p} M \subset F'_{m+k} M$$

□

Wir erhalten unmittelbar folgendes Korollar.

Korollar 1.8. *Auf einem endlich erzeugten D-Modul sind zwei gute Filtrierungen äquivalent.*

Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Seqeunz von D-Moduln. Wenn M eine D-Modul Filtrierung $F_\bullet M$ hat, dann induziert sie Filtrierungen $F_\bullet M' := (f^{-1}(f(M') \cap F_n M))_{n \in \mathbb{Z}}$ auf M' und $F_\bullet M'' := (g(F_n M))_{n \in \mathbb{Z}}$ auf M''. Es ist leicht zusehen, dass diese D-Modul Filtrationen sind.

Lemma 1.9. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von D-Moduln. Wenn $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M ist, dann sind die induzierten Filtrierungen $F_\bullet M'$ und $F_\bullet M''$ auch gut.

Beweis. Aus der Definition der Filtrierungen folgt, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow GrM' \xrightarrow{Gr(f)} GrM \xrightarrow{Gr(g)} GrM'' \longrightarrow 0 \tag{1.1.1}$$

exakt ist. Da $F_\bullet M$ gut ist, ist $Gr_\bullet M$ ein endlich erzeugter $Gr_\bullet D$-Modul. Da GrD noethersch ist, sind $Gr_\bullet M'$ und $Gr_\bullet M''$ auch endlich erzeugte $Gr_\bullet D$-Moduln. Aus Lemma 1.1 folgt dann, dass $F_\bullet M'$ und $F_\bullet M''$ auch gut sind. □

Sei M ein endlich erzeugter D-Modul und $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M. Dann ist GrM ein endlich erzeugter GrD-Modul und wir können die Resultate aus Abschnitt A.1 anwenden. Sei λ eine additive, nicht-negative Funktion auf endlich-erzeugten D_0-Moduln. Dann ist

$$\lambda(F_n M) - \lambda(F_{n-1} M) = \lambda(Gr_n M)$$

wegen Korollar A.5 und Bedingung (7) für große n gleich einem Polynom. Wegen Lemma A.9 ist daher auch $\lambda(F_n)$ für große $n \in \mathbb{Z}$ gleich einem Polynom. Ist $F'_\bullet M$ eine andere gute Filtrierung, dann sind wegen Korollar 1.8 die beiden Filtrierunegn $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ äquivalent, d.h es gibt ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d.

$$F_n M \subset F'_{n+k} \subset F_{n+2k} M$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Da λ additiv ist und nur nicht-negative Werte annimmt, folgern wir

$$\lambda(F_n M) \leq \lambda(F'_{n+k} M) \leq \lambda(F_{n+2k} M)$$

Daraus folgt, dass die Polynome, die $\lambda(F_n M)$ und $\lambda(F'_n M)$ für große n repräsentieren, die gleichen Leitterme haben. Wir bezeichnen den Grad dieser Polynome mit $d_\lambda(M)$ und nennen ihn die **Dimension** des D-Moduls M. Wegen Lemma A.8 hat der Leitkoeffizient dieser Polynome die Form $e_\lambda(M)/d_\lambda(M)!$ wobei $e_\lambda(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Wir nennen $e_\lambda(M)$ die Multiplizität des D-Moduls M (bezüglich λ).

Proposition 1.10. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten D-Moduln. Dann gilt

1. $d_\lambda(M) = \max(d_\lambda(M'), d_\lambda(M''))$,
2. *Falls* $d_\lambda(M) = d_\lambda(M') = d_\lambda(M'')$, *dann gilt* $e_\lambda(M) = e_\lambda(M') + e_\lambda(M'')$

Beweis. Indem man den n-ten homogenen Teil von (eq:exseqGr 1.1.1) nimmt, erhält man

$$\lambda(Gr_n M) = \lambda(Gr_n M') + \lambda(Gr_n M'')$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Per Induktion nach n folgt daraus

$$\lambda(F_n M) = \lambda(F_n M') + \lambda(F_n M'')$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da jeder der drei obigen Terme für große n durch ein Polynom dargestellt wird, dessen Grad die Dimension des D-Moduls ist, folgt die Behauptung. □

Sei ϕ ein Ring-Automorphismus von D mit $\phi(D_0) = D_0$. Wir definieren einen Endofunktor $\widetilde{\phi}$ auf der Kategorie $\mathcal{M}(D)$ der D-Moduln, die jedem D-Modul M einen D-Modul $\widetilde{\phi}(M)$ zuordnet, der dieselbe unterliegende abelsche Gruppenstruktur hat und das externe Produkt mit D durch $(P, m) \mapsto \phi(P)m$ gegeben ist. Es ist klar, dass der Funktor $\widetilde{\phi}$ einen Automorphismus auf der Kategorie $\mathcal{M}(D)$ ist und endlich erzeugte D-Moduln erhält.

prop:AutDim **Proposition 1.11.** *Sei M ein endlich erzeugter D-Modul. Dann gilt*

$$d_\lambda(\widetilde{\phi}(M)) = d_\lambda(M)\,.$$

Beweis. Seien $P_1, \ldots, P_s \in D_1$ Repräsentanten von Klassen in $Gr_1 D$, die GrD als D_0-Algebra erzeugen. Es existiert ein $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, s.d. $\phi(P_i) \in D_d$ für alle $i = 1, \ldots, s$. Da die $P_1, \ldots, P_s$ und 1 die Menge D_1 als D_0-Modul erzeugen, gilt $\phi(D_1) \subset D_d$.

Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtration von M. Definiere die Filtration $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$ durch

$$F_p \widetilde{\phi}(M) = F_{dp} M \qquad \text{für } p \in \mathbb{Z}$$

Es ist klar, dass $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$ eine aufsteigende Filtration von $\widetilde{\phi}(M)$ durch endlich erzeugte D_0-Moduln ist. Außerdem gilt

$$D_1 \cdot F_m \widetilde{\phi}(M) = \phi(D_1) \cdot F_{dm} M \subset D_d F_{dm} M \subset F_{d(m+1)} M = F_{m+1} \widetilde{\phi}(M)$$

Durch Induktion erhalten wir $D_n \cdot F_m \widetilde{\phi}(M) \subset F_{m+n} \widetilde{\phi}(M)$, d.h. $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$ ist eine D-Modul Filtrierung. Wegen Lemma lem:fgModexgood 1.4 und Lemma lem:goodFiltfiner 1.7 existiert eine gute Filtrierung $F' \widetilde{\phi}(M)$ die feiner ist als $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. gilt

$$F'_n \widetilde{\phi}(M) \subset F_{n+k} \widetilde{\phi}(M) = F_{d(n+k)} M$$

daraus folgt $\lambda(F'_n \widetilde{\phi}(M)) \leq \lambda(F_{d(n+k)} M)$. Für große $n \in \mathbb{Z}$ ist $\lambda(F_{d(n+k)} M)$ gleich einem Polynom mit Leitterm

$$\frac{e_\lambda(M) d^{d_\lambda(M)}}{d_\lambda(M)!} n^{d_\lambda(M)}$$

Da $\lambda(F'_n \widetilde{\phi}(M))$ für große n gleich einem Polynom vom Grad $d_\lambda(\widetilde{\phi}(M))$ ist, folgern wir $d_\lambda(\widetilde{\phi}(M)) \leq d_\lambda(M)$. Indem wir das Argument für ϕ^{-1} wiederholen, zeigen wir $d_\lambda(M) = d_\lambda(\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\phi}(M))) \leq d_\lambda(\widetilde{\phi}(M))$. Daraus folgt die Behauptung. □

sec:AlgDiff

1.2 Algebren von Differentialoperatoren

Sei k ein Körper mit $char(k) = 0$ und A eine kommutative Algebra über k. Sein $End_k(A)$ die Algebra der k-linearen Endomorphismen von k mit Kommutator $[S, T] := ST - TS \in End_k(A)$. Die Algebra $End_k(A)$ enthält als Unteralgebra die Menge der A-linearen Endomorphimen $End_A(A)$.

Lemma 1.12. *Der Algebrenhomomorphismus*

$$A \longrightarrow End_A(A)$$
$$a \mapsto (b \mapsto ab)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Die Injektivität folgt, da der Endomorphismus auf 1 den Wert a annimmt. Sie jetzt $T \in End_A(A)$. Es gilt

$$T(b) = b \cdot T(1) = T(1)b$$

d.h. die Abbildung ist durch Multiplikation mit $T(1) \in A$ gegeben. Dies zeigt die Surjektivität. □

Im folgenden identifizieren wir die Unteralgebra $End_A(A)$ mit A.

Eine **k-Derivation** von A ist ein $T \in End_k(A)$, s.d. für $a, b \in A$

$$T(ab) = T(a)b + aT(b)$$

gilt. Insbesondere gilt $[T, a](b) = T(ab) - aT(b) = T(a)b$,d.h. $[T, a] = T(a) \in A \subset End_k(A)$. Daraus folgt,dann $[[T, a_0], a_1] = 0$ für alle $a_0, a_1 \in A$. Dies motiviert folgende Definition:

Ein Element $T \in End_k(A)$ heißt **Differentialoperator der Ordnung** $\leq n$,falls

$$[\dots[[T, a_0], a_1], \dots, a_n] = 0$$

für alle $a_0, \dots, a_n \in A$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Diff}_k(A)$ die Menge aller Differentialoperatoren von A.

Lemma 1.13. *Seien T, S zwei Differentialoperatoren der Ordnung $\leq n$ bzw. $\leq m$. Dann ist $T \circ S$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq n \cdot m$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach $n+m$. Sei $n = m = 0$, dann ist $T, S \in End_A(A)$ und damit ist $T \circ S \in End_A(A)$ und somit ein Differentialoperator der Ordnung 0. Sei jetzt $n + m = p$ und die Aussage sei wahr für alle $q < p$. Es gilt

$$[T \circ S, a] = TSa - aTS = T[S, a] + [T, a]S\,.$$

Aber $[T, a]$ bzw. $[S, a]$ sind Differentialoperatoren der Ordnung $\leq n - 1$ bzw. $\leq m - 1$. Wegen der Induktionssannahme ist dann $[T \circ S, a]$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq n + m - 1$, also hat $T \circ S$ Ordnung $\leq n + m$. □

$\mathrm{Diff}_k(A)$ ist also eine Unteralgebra von $End_k(A)$. Sie heißt die Algebra aller k-lineraen Differentialoperatoren von A. Wir setzen $F_n\mathrm{Diff}_k(A) = \{0\}$ für $n < 0$ und

$$F_n\mathrm{Diff}_k(A) = \{T \in \mathrm{Diff}_k(A) \mid ord(T) \leq n\}$$

für $n \geq 0$. Das gibt eine aufsteigende, ausschöpfende Filtrierung auf $\mathrm{Diff}_k(A)$ durch k-Untervektorräume. Die Filtrierung ist kompatibel mit der Ringstruktur, d.h.

$$F_n\mathrm{Diff}_k(A) \circ F_m\mathrm{Diff}_k(A) \subset F_{n+m}\mathrm{Diff}_k(A)$$

ropDiffFilt **Lemma 1.14.**

1. *$F_0\mathrm{Diff}_k(A) = A$,*
2. *$F_1\mathrm{Diff}_k(A) = Der_k(A) \oplus A$,*
3. *$[F_n\mathrm{Diff}_k(A), F_m\mathrm{Diff}_k(A)] = F_{n+m-1}\mathrm{Diff}_k(A)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Beweis. Für $T \in F_0\mathrm{Diff}_k(A)$ gilt $[T, a](b) = T(ab) - aT(b) = 0$, insbesondere gilt fü $b = 1$ $T(a) = aT(1)$, d.h. T ist A-linear.

Wir haben bereits gezeigt, dass $Der_k(A) \subset F_1\mathrm{Diff}_k(A)$ gilt. Für $T \in Der_k(A)$ gilt $T(1) = T(1\cdot 1) = 2T(1)$, also $T(1) = 0$. Das zeigt $Der_k(A) \cap A = \{0\}$. Sei jetzt $S \in F_1\mathrm{Diff}_k(A)$ und setze $T = S - S(1)$. Dann gilt $T(1) = 0$, also $T(a) = [T, a](1)$ und

$$T(ab) = [T, ab](1) = ([T, a]b)(1) + (a[T, b])(1) = (b[T, a])(1) + (a[T, b])(1) = T(a)b + aT(b) \qquad (1.2.1)$$

also $T \in Der_k(A)$. Das zeigt 2. .

Sei jetzt T, S von der Ordnung $\leq n$ bzw. $\leq m$. Wir wollen zeigen, dass $[T, S]$ von der Ordnung $\leq n+m-1$ ist. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach $n+m$. Im Fall $n = m = 0$ ist nichts zu zeigen. Im allgemeinen gilt wegen der Jacobi-Identiät

$$[[T, S], a] = [[T, a], S] + [T, [S, a]]$$

wobei $[T, a]$ und $[S, a]$ von der Ordnung $\leq n-1$ bzw. $\leq m-1$ sind. Aus der Induktionsannahme folgt dann, dass $[[T, S], a]$ von der Ordnung $\leq n+m-2$ ist, also $[T, S]$ von der Ordnung $\leq n+m-1$ ist. □

Dies zeigt, dass der graduierte Ring $Gr\mathrm{Diff}_k A$ eine kommutative A-Algebra ist und $\mathrm{Diff}_k(A)$ die Bedingungen 1. - 5. aus Abschnitt sec:filtRing 1.1 erfüllt.

Sei $n \geq 1$ und $T \in \mathrm{Diff}_k(A)$ der Ordnung $\leq n$. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \theta_n(T) : A^n &\longrightarrow A = F_0\mathrm{Diff}_k(A) \\ (a_1, \ldots, a_N) &\mapsto [[\ldots[[T, a_1], a_2], \ldots, a_{n-1}], a_n] \end{aligned} \qquad (1.2.2)$$ eq:thetadef

em:proptheta **Lemma 1.15.** *Sei T ein Differentialoperator der Ordnung $\leq n$, dann gilt:*

1. *Die Abbildung $\theta_n(T) : A^n \longrightarrow A$ ist symmetrisch und k-linear.*
2. *T ist von der Ordnung $\leq n-1$ genau dann wenn $\theta_n(T) = 0$.*

Beweis. Die k-Linearität ist klar. Für die erste Aussage bleibt die Symmetrie zu überprüfen. Die Jacobi-Identität liefert für $S \in \mathrm{Diff}_k(A)$ und $a, b \in A$

$$[[S, a], b] = [[S, b], a]$$

Das zeigt

$$\begin{aligned} \theta_n(T)(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n) &= [[\ldots[[\ldots[[T, a_1], a_2], \ldots, a_i], a_{i+1}], \ldots, a_{n-1}], a_n] \\ &= [[\ldots[[\ldots[[T, a_1], a_2], \ldots, a_{i+1}], a_i], \ldots, a_{n-1}], a_n] \\ &= \theta_n(T)(a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage ist klar. □

Wir betrachten jetzt den Speziallfall $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ und setzen $D(n) = \mathrm{Diff}_k(A)$. Wir nennen $D(n)$ die Algebra der Differential-Operatoren auf k^n. Seien $\partial_1, \ldots, \partial_n$ die Standard Derivationen auf $k[X_1, \ldots, X_n]$. Für $I, J \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ setzen wir

$$X^I = X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n} \qquad \text{und} \qquad \partial^J = \partial_1^{j_1} \partial_2^{j_2} \ldots \partial_n^{j_n}$$

Dann ist $X^I \partial^J \in D(n)$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq |J| := j_1 + \ldots + j_n$. Wird der Differentialoperator T durch

$$T = \sum_{|I| \leq p} P_I(X_1, \ldots, X_n) \partial^I$$

mit Polynomen $P_I \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gegeben, dann ist T von der Ordnung $\leq p$.

Lemma 1.16. *Die Derivationen $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sind eine Basis des freien $k[X_1, \ldots, X_n]$-Moduls $Der_k(k[X_1, \ldots, X_n])$.*

Beweis. Sei $T \in Der_k(k[X_1, \ldots, X_n])$. Setzte $P_i = T(X_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $S = \sum_{i=1}^n P_i \partial_i$. Es gilt

$$S(X_i) = \sum_{j=1}^n P_j \partial_j (X_i) = P_i = T(X_i).$$

Da die $X_1, \ldots, X_n$ die Algebra $k[X_1, \ldots, X_n]$ erzeugen, folgt $T = S$. Daher erzeugen die $\partial_1, \ldots, \partial_n$ den $k[X_1, \ldots, X_n]$-Modul $Der_k(k[X_1, \ldots, X_n])$. Nehme an es gilt $\sum_{i=1}^n Q_i \partial_i = 0$ für $Q_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gilt $0 = (\sum_{j=1}^n Q_j \partial_j)(X_i) = Q_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Das zeigt, dass die $\partial_1, \ldots, \partial_n$ freie Erzeuger von $Der_k(k[X_1, \ldots, X_n]$ sind. $\square$

Sei T ein Differentialoperator der Ordnung $\leq p$ auf $k[X_1, \ldots, X_n]$. Ist $p < 0$, dann ist $T = 0$ und wir definieren $\sigma_p(T) = 0$. Für $p = 0$ ist $T \in A$ und wir definieren $\sigma_p(T) = T$. Sei $p \geq 1$. Wir setzen $B = k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Dann ist $T \in End_k(B)$, indem wir $T(P(x)\xi^J) := T(P(x))\xi^J$ definieren. Insbesondere ist $T \in \mathrm{Diff}_k(B)$. Setze $l_\xi := \sum_{i=1}^n \xi_i X_i$ und definiere

$$\sigma_p(T) := \frac{1}{p!} \tau_\xi^p(T)$$

mit $\tau_\xi(T) = [T, l_\xi]$. Man sieht leicht, dass $\sigma_p(T) \in k[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ homogen vom Grad p in $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist und das $\sigma_p(T) = 0$ gilt, falls T Ordnung $< p$ hat. Wir erhalten also eine k-lineare Abbildung $Gr_p D(n) \to k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ bzw. eine Abbildung

$$\sigma : GrD(n) \to k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$$

Das Element $\sigma(P)$ heißt **Symbol** von P.

em:sigmaHomo **Lemma 1.17.** *Seien $T, S \in D(n)$ von der Ordnung $\leq p$ bzw. $\leq q$. Dann gilt*

$$\sigma_{p+q}(TS) = \sigma_p(T)\sigma_q(S)$$

Beweis. Es gilt

$$\tau_\xi(TS) = [TS, l_\xi] = TSl_\xi - l_\xi TS = [T, l_\xi]S + T[S, l_\xi] = \tau_\xi(T)S + T\tau_\xi(S)$$

Daraus folgt

$$\tau^{p+q}(TS) = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} \tau_\xi^{p+q-i}(T)\tau_\xi^i(S) = \binom{p+q}{q} \tau_\xi^p(T)\tau_\xi^q(S)$$

wobei die letzte Gleichung aus $\tau_\xi^k(T) = 0$ für $k > p$ folgt. Somit gilt

$$\sigma_{p+q}(TS) = \frac{1}{(p+q)!} \tau_\xi^{p+q}(TS) = \frac{1}{p!q!} \tau_\xi^p(T)\tau_\xi^q(S) = \sigma_p(T)\sigma_q(S)$$

$\square$

thm:compGrD **Theorem 1.18.** *Die Abbildung $\sigma : GrD(n) \to k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ ist ein k-Algebren Isomorphismus.*

Beweis. Wegen Lemma lem:sigmaHomo 1.17 müssen wir nur noch die Injektivität und Surjektivität von σ zeigen. Es gilt $\sigma_0(X_i) = X_i$ und $\sigma_1(\partial_i) = \xi_i$, d.h. $\sigma_p(X^I \partial^J) = X^I \xi^J$ wobei $p = |J|$. Das zeigt die Surjektivität von σ.

Sei jetzt $T \in F_p D(n)$ und $\sigma_p(T) = 0$ um die Injektivität zu beweisen müssen wir zeigen, dass die Ordnung von $T \leq p - 1$ ist. Wir beweisen dies per Induktion über die Ordnung p. Der Fall $p = 0$ ist klar. Sei also $p > 0$ und $\lambda \in k$ sowie $\eta \in k^n$. Es gilt

$$\tau_{\xi + \lambda\eta}(T) = [T, l_{\xi + \lambda\eta}] = [T, l_\xi] + \lambda[T, l_\eta] = \tau_\xi(T) + \lambda\tau_\eta(T)$$

Da τ_ξ und τ_η kommutieren gilt

$$\tau^k_{\xi + \lambda\eta}(T) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \tau_\xi^{k-i}(\tau_\eta^i(T))$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Weiterhin ist $\tau_\xi^p(T) = 0$ und somit gilt auch $\tau^p_{\xi + \lambda\eta}(T) = 0$. Da k unendlich viele Elemente besitzt, folgt $\tau_\xi^{p-i}(\tau_\eta^i(T)) = 0$ für $0 \leq i \leq p$. Insbesondere gilt $\tau_\xi^{p-1}(\tau_\eta(T)) = 0$ für $\eta \in k^n$. Also gilt auch $\tau_\xi^{p-1}([T, X_i]) = 0$. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $[T, X_i]$ von der Ordnung $\leq p - 2$ ist. Für $P, Q \in k[X_1, \dots, X_n]$ gilt

$$[T, PQ] = TPQ - PQT = [T, P]Q + P[T, Q]$$

d.h. die Ordnung von $[T, PQ]$ ist kleiner gleich dem Maximum der Ordnungen von $[T, P]$ und $[T, Q]$. Da die X_i die Algebra $k[X_1, \dots, X_n]$ erzeugen, folgt dass $[T, P]$ Ordnung $\leq p - 2$ für alle Polynome P hat. Aus der Definition der Ordnung folgt, dass T Ordnung $\leq p - 1$ hat. □

Das zeigt insbesondere, dass $D(n)$ die Annahmen 1. – 7. aus Abschnitt sec:filtRing 1.1 erfüllt. Wir bekommen daher unmittelbar folgende Aussage.

Theorem 1.19. *Der Ring $D(n)$ ist rechts und links noethersch.*

kor:BasisDn **Korollar 1.20.** *Die Elemente $\{X^I \partial^J\}_{I, J \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}}$ sind eine k-Vektorraumbasis von $D(n)$.*

Beweis. Für $|J| = p$ ist das Symbol von $X^I \partial^J$ gleich $X^I \xi^J$ Da $D(n) \simeq GrD(n) \simeq k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ als k-Vektorräume und die $\{X^I \xi^J\}_{I, J \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}}$ eine Vektorraumbasis bilden, folgt die Aussage. □

thm:relDn **Theorem 1.21.** *Die k-Algebra $D(n)$ ist isomorph zur k-Algebra, die durch $X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ erzeugt wird und für $1 \leq i, j \leq n$ die Relationen $[X_i, X_j] = 0, [\partial_i, \partial_j] = 0, [\partial_i, X_j] = \delta_{ij}$ erfüllt.*

Beweis. Sei B die k-Algebra, die durch $X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ erzeugt wird und für $1 \leq i, j \leq n$ die Relationen $[X_i, X_j] = 0, [\partial_i, \partial_j] = 0, [\partial_i, X_j] = \delta_{ij}$ erfüllt. Da diese Relationen auch in $D(n)$ erfüllt sind und $D(n)$ von $X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n$ erzeugt wird, er halten wir einen surjektiven k-Algebrenhomomorphismus $B \to D(n)$, der die Erzeuger auf die Erzeuger abbildet. B wird als k-Vektorraum von $\{X^I \partial^J\}_{I, J \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}}$ aufgespannt. Wegen Korollar kor:BasisDn 1.20 ist dieser Morphismus dann auch injektiv. □

rop:centerD **Proposition 1.22.** *Das Zentrum von $D(n)$ ist $k \cdot 1$.*

Beweis. Sei $T \in D(n)$ ein Element vom Zentrum. Dann gilt $[T, P] = 0$ für jedes Polynom P, d.h. T ist von der Ordnung ≤ 0, d.h. $T \in k[X_1, \dots, X_n]$. Andererseits gilt $0 = [\partial_i, T] = \partial_i(T)$ für $i = 0, \dots, n$. Da zeigt, dass T konstant ist. □

Sei $D(n)^\circ$ die transponierte Algebra von $D(n)$. Dann existiert wegen Theorem 1.21 ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $\phi : D(n)^\circ \to D(n)$ der für $1 \leq i \leq n$ durch $\phi(X_i) \mapsto X_i$ und $\phi(\partial_i) \mapsto -\partial_i$ gegeben ist. Der Morphismus ϕ heißt **kanonischer Anti-Automorphismus** von $D(n)$.

Wegen Theorem 1.21 können wir einen Automorphismus $\mathcal{F}$ von $D(n)$ definieren, der für $1 \leq i \leq n$ durch $\mathcal{F}(X_i) = \partial_i$ und $\mathcal{F}(\partial_i) = -X_i$ gegeben ist. Dieser Automorphismus heißt **Fourier-Transformation** von $D(n)$. Das Quadrat $\mathcal{F}^2$ von $\mathcal{F}$ ist ein Automorphismus ι von $D(n)$, der $\iota(X_i) = -X_i$ und $\iota(\partial_i) = -\partial_i$ erfüllt. Es gilt $\iota^2 = -1$.

Im Gegensatz zu anderen Ringen von Differentialoperatoren, hat $D(n)$ noch eine andere Filtration die mit der Ringstruktur kompatibel ist. Wir setzen für $p \in \mathbb{Z}$

$$D_p(n) := \{\sum a_{IJ} X^I \partial^J \mid |I| + |J| \leq p\}\,.$$

Die Filtrierung $\{D_p(n)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ist eine aufsteigende, ausschöpfende Filtrierung von endlich-dimensionalen k-Vektorräumen auf $D(n)$.

Lemma 1.23. *Für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt*

1. $D_p(n) \circ D_q(n) \subset D_{p+q}(n)$,
2. $[D_p(n), D_q(n)] \subset D_{p+q-2}(n)$.

Beweis. Wegen Korollar 1.20 und der Definition der Filtrierung $\{D_p(n)\}_{p\in\mathbb{Z}}$, reicht es

$$[\partial^I, X^J] \in D_{|I|+|J|-2}$$

zu zeigen. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach $|I|$. Für $|I| = 1$ gilt $\partial^I = \partial_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Es gilt $[\partial_i, X^J] = \partial_i(X^J) \in D_{|J|-1}(n)$. Für $|I| > 1$ schreiben wir $\partial^I = \partial^{I'}\partial_i$ für $I' \in \mathbb{Z}^{n-1}_{\leq 0}$ und $1 \leq i \leq$. Das liefert

$$[\partial^I, X^J] = [\partial^{I'}\partial_i, X^J] = \partial^{I'}\partial_i X^J - X^J\partial^{I'}\partial_i = \partial^{I'}[\partial_i, X^J] + [\partial^{I'}, X^J]\partial_i$$

Wegen der Induktionsannahme ist dann $[\partial^I, X^J] \in D_{|I|+|J|-2}$. □

Das zeigt, dass $\{D_p(n)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ eine Filtrierung ist, die kompatibel mit der Ringtruktur auf $D(n)$ ist. Wir nennen die Filtrierung **Bernstein-Filtrierung**.

Der assozierte, graduierte Ring $Gr^B_\bullet D(n)$ ist eine kommutativen k-Algebra. Wir definiern eine lineare Abbildung Ψ_p vom k-Vektorraum $D_p(n)$ nach $k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ durch

$$\Psi_p(\sum_{|I|+|J|\leq p} a_{IJ} X^I \partial^J) = \sum_{|I|+|J|=p} a_{IJ} X^I \xi^J$$

Dies liefert einen k-linearen Isomorphismus von $Gr^B_p D(n)$ in die homogenen Polynome vom Grad p und damit einen k-Algebrenisomorphismus

$$\Psi : GrD(n) \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$$

Der Ring $D(n)$ zusammen mit der Bernstein-Filtrierung erfüllen damit die Annahmen 1. - 7. aus Abschnitt 1.1. Es ist leicht zu sehen, das der kanonische Anti-Automorphismus und die Fourier-Transformation die Bernstein-Filtrierung erhalten.

1.3 Moduln über Ringen von Differentialoperatoren

Definition 1.24. *Wir bezeichnen mit $M^L(D(n))$ bzw . $M^R(D(n))$ die abelsche Kategorie der links bzw. rechts $D(n)$-Moduln*

Der kanonische Anti-Automorphismus ϕ definiert einen exakten Funktor von der Kategorie $M^R(D(n))$ in die Kategorie $M^L(D(n))$ durch

$$M \mapsto M^t \tag{1.3.1}$$

wobei M^t der gleichen additiven Gruppe wie M unterliegt und die Links-Multiplikation auf M^t durch $\phi(T) \cdot m = m \cdot T$ für $m \in M$ und $T \in D(n)$ definiert ist. Analog kann man auch einen Funktor $M^L(D(n)) \to M^R(D(n))$ definieren, s.d. die beiden Funktoren zueinander invers sind.

Wir bezeichnen mit $M^L_{fg}(D(n))$ bzw. $M^R_{fg}(D(n))$ die vollen Unterkategorien der endlich erzeugten $D(n)$-Moduln. Die obigen *Rechts-Links* Funktoren induzieren ebenso zwischen diesen beiden Kategorien eine Äquivalenz.

Da wir im folgenden eher Links-Moduln diskutieren, lassen wir in den obigen Bezeichnungen den Index L zumeist weg.

Da $D(n)$ noethersch ist, ist die volle Unterkategorie $M_{fg}(D(n))$ von $M(D(n))$ abgeschlossen unter der Bildung von Untermoduln, Quotienten und Extensionen.

Sei jetzt $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung versehen. Da $D_0(n) = k$ ist, können wir für Moduln aus $M^L_{fg}(D(n))$ bzw. $M^R_{fg}(D(n))$ mit Hilfe der additiven Funktion k die Bernstein-Dimension $d(M)$ und die Bernstein Multiplizität $e(M)$ definieren. Da der kanonische Anti-Automorphismus die Bernstein-Filtrierung erhält gilt $d(M) = d(M^t)$ für alle endlich erzeugten $D(n)$-Moduln.

Lemma 1.25. *Für einen endlich erzeugten $D(n)$-Modul M gilt $d(M) \leq 2n$.*

Beweis. Für einen endlich erzeugten $D(n)$-Modul haben wir eine exakte Sequenz $D(n)^p \to M \to 0$. Aus Proposition 1.10 folgt dann $d(M) \leq d(D(n))$. Wegen dem Vektorraum-Isomorphismus

$$D_p(n) \simeq \bigoplus_{i \leq p} Gr^B_i D(n) \simeq \bigoplus_{i \leq p} k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]_i,$$

wobei $k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]_i$ der Untervektorraum der homogenen Polynome vom Grad i ist, folgt aus Beispiel A.6 und Lemma A.9, dass $d(D(n)) = 2n$ gilt. Das zeigt die Aussage. □

Theorem 1.26 (Bernstein)**.** *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul und $M \neq 0$. Dann gilt $d(M) \geq n$.*

Beweis. Da M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul ist, besitzt er nach Lemma 1.4 eine gute Filtration $F_\bullet M$. Nach einer Verschiebung der Indizes können wir annehmen, dass $F_n M = 0$ für $n < 0$ und $F_0 M \neq 0$ gilt. Für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} D_p(n) & \longrightarrow & Hom_k(F_p M, F_{2p} M) \\ T & \mapsto & (m \mapsto Tm) \end{array}$$

Wir wollen per Induktion zeigen, dass diese Abbildung injektiv ist. Für $p = 0$ ist die Aussage klar. Nehme also an die Aussage gilt für $p - 1$ und sei $T \in D_p(N)$, s.d. $Tm = 0$ gilt für alle $m \in F_p M$. Dann gilt für jedes $v \in F_{p-1} M$, dass $v, X_i v, \partial_i v \in F_p M$, also

$$[X_i, T]v = X_i T v - T X_i v = 0 \qquad [\partial_i, T]v = \partial_i T v - T \partial_i v = 0$$

Da $[X_i, T], [\partial_i, T] \in D_{p-1}(n)$ gilt folgt aus der Induktionsannahme, dass $[X_i, T] = [\partial_i, T] = 0$, d.h. T liegt im Zentrum von $D(n)$. Da das Zentrum aber gleich k (siehe Proposition 1.22) ist, folgt $T = 0$. Daher gilt

$$\dim_k(D_p(n)) \leq \dim_k(Hom_k(F_pM, F_{2p}M)) = \dim_k(F_pM) \cdot \dim_k(F_{2p}M)$$

Andererseits ist für große $p \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ die linke Seite gleich einem Polynom in p vom Grad $2n$ mit positivem Leitkoeffizient und die rechte Seite ist gleich einem Polynom in p vom Grad $2d(M)$ mit positiven Leitkoeffizient. Das ist nur möglich, falls $d(M) \geq n$ gilt. □

Sei M ein $D(n)$-Modul. Wir definieren seine **Fourier-Transformation** $\mathcal{F}(M)$ als den Modul, der als abelsche Gruppe gleich M ist und das äußere Produkt mit $D(n)$ ist definiert als

$$(T, m) \mapsto \mathcal{F}(T)m \qquad \text{für} \quad T \in D(n), m \in M$$

Die Fourier-Transformation ist ein Automorphismus in der Kategorie $M(D(n))$ bzw. $M_{fg}(D(n))$.

n:dimFourier **Lemma 1.27.** *Sei M ein endlich erzeuger $D(n)$-Modul. Dann gilt $d(\mathcal{F}(M)) = d(M)$.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die Fourier-Transformation die Bernstein Filtrierung erhält. □

1.4 Charakteristische Varietät

ec:charVarkn

In diesem Kapitel werden wir eine geometrische Invariante eines endlich erzeugten $D(n)$-Moduls studieren. Wir werden dazu die Filtration $F_\bullet D(n)$ (die Filtration nach der Ordnung) benutzen.

Da jeder $D(n)$-Modul M als $k[X_1, \ldots, X_n]$-Modul aufgefasst werden kann, können wir seinen Träger $\mathrm{supp}(M) \subset k^n$ betrachten.

odsuppclosed **Proposition 1.28.** *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann ist* $\mathrm{supp}(M)$ *eine abgeschlossene Untervarietät von k^n.*

Beweis. Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtration auf M. Sei $x \in k^n$, dann ist $M_x = 0$ äquivalent zu $(F_pM)_x = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Da lokalisieren exakt ist, ist dies äquivalent zu $(GrM)_x = 0$. Sei I_p der Annihilator des endlich erzeugten $k[X_1, \ldots, X_n]$-Moduls Gr_pM. Aus Proposition A.21 folgt, dass $\mathrm{supp}(Gr_pM) = V(I_p)$. Aus Lemma A.20 folgt dann, dass $\mathrm{supp}(M) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} V(I_p)$. Seien $m_1, \ldots, m_s$ homogene Erzeuger des $GrD(n)$-Moduls GrM. Sei $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ der Annihilator von $m_1, \ldots, m_s$. Dieser annihiliert dann ganz $Gr_\bullet M$. D.h es existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathbb{Z}$, s.d. $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} I_p = I \subset I_q$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt aber $\bigcup_{p \in S} V(I_p) = V(\prod_{p \in S} I_p) = V(\bigcap_{p \in S} I_p) = V(I) \supset V(I_q)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ und damit die Aussage. □

Sei D ein filtrierter Ring mit einer Filtration $F_\bullet D$, die die Eigenschaften 1. - 7. aus Abschnitt 1.1 erfüllen. Sei M ein endlich erzeugter D-Modul und $F_\bullet M$ eine gute Filtration. Dann ist GrM ein graduierter GrD-Modul. Sei $I \subset GrD$ der Annihilator von GrM. Da I ein graduiertes Ideal ist, ist sein Radikal $\mathrm{rad}(I)$ auch graduiert. Im allgemeinen hängt I von der Wahl der guten Filtrierung auf M ab. Wir haben aber folgendes Resultat.

em:radIindep **Lemma 1.29.** *Sei M ein endlich erzeugter D-Modul und $F_\bullet M$ bzw. $F'_\bullet M$ zwei gute Filtrierungen. Seien I bzw. I' die Annihilatoren der graduierten GrD-Moduln $Gr^F M$ bzw. $Gr^{F'} M$. Dann gilt* $\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(I')$.

Beweis. Sei $T \in \mathrm{rad}(I) \cap Gr^pD$. Dann existiert ein $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $T^s \in I$. Sei $Y \in F_pD$, s.d. $Y + F_{p-1}D = T$ gilt. Wir erhalten somit $Y^sF_qM \subset F_{q+sp-1}M$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Per Induktion erhalten wir

$$Y^{ms}F_qM \subset F_{q+msp-m}M$$

für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $q \in \mathbb{Z}$. Andererseits wissen wir aus Korollar 1.8, dass $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ äquivalent sind. Es gibt also ein $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,s.d. $F_q M \subset F'_{q+l} M \subset F_{q+2l} M$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt. Daraus folgt

$$Y^{ms} F'_q M \subset Y^{ms} F_{q+l} M \subset F_{q+l+msp-m} \subset F'_{q+2l+msp-m} M$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nehmen wir $m > 2l$, dann folgt daraus $Y^{ms} F'_q M \subset F'_{q+msp-1} M$, d.h. $T^{ms} \in I'$, also $T \in \mathrm{rad}(I')$ und somit $\mathrm{rad}(I) \subset \mathrm{rad}(I')$. Aus Symmetrie folgt dann $\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(I')$. $\square$

Daraus folgt, dass das Radikal des Annihilators von $Gr_\bullet M$ unabhängig von der Wahl der guten Filtrierung auf M ist. Wir bezeichnen dieses Radikalideal mit $J(M)$ und nennen es **charakteristisches Ideal**.

Wir wenden diese Konstruktion auf den Ring $D(n)$ mit der Ordnungsfiltration an. Da $Gr_\bullet D(n) = k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ gilt, erhalten wir eine affine algebraische Varietät

$$Ch(M) := V(J(M)) \subset k^{2n}$$

die sogenannte **charakteristische Varietät** von M.

Da $J(M)$ in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n$ ein homogenes Ideal ist, erhalten wir folgendes Resultat.

Lemma 1.30. *Die charakteristische Varietät $Ch(M)$ eines endlich erzeugten $D(n)$-Moduls M hat die folgende Eigenschaft: Ist $(x, \xi) \in Ch(M)$ dann ist für jedes $\lambda \in k$ auch $(X, \lambda\xi) \in Ch(M)$.*

Man sagt auch, dass $Ch(M)$ eine **konische Varietät** ist.

Proposition 1.31. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten $D(n)$-Moduln. Dann gilt

$$Ch(M) = Ch(M') \cup Ch(M'')$$

Beweis. Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M. Diese Filtrierung induziert gute Filtrierungen $F_\bullet M'$ und $F_\bullet M''$. Aus 1.9 wissen wir, dass die induzierten Filtrierungen auch gut sind. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Gr_\bullet M' \longrightarrow Gr_\bullet M \longrightarrow Gr_\bullet M'' \longrightarrow 0$$

von endlich erzeugten $k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$-Moduln, deren Träger wegen Proposition A.21 gleich den charakteristischen Varietäten von M, M' und M'' sind. Die Behauptung folgt dann aus Lemma A.20. $\square$

Sei $\pi : k^{2n} \to k^n$ die Projektion definiert durch $\pi(x, \xi) = x$.

Proposition 1.32. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann gilt* $\mathrm{supp}(M) = \pi(Ch(M))$.

Beweis. Seien $m_1, \dots, m_s$ homogene Erzeuger von $Gr_\bullet M$. Wir haben im Beweis von Proposition 1.28 gesehen, dass der Annihilator $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ von $m_1, \dots, m_s$ die Gleichung $V(I) = \mathrm{supp}(M)$ erfüllt. Ist nun andererseits J der Annihilator von $m_1, \dots, m_s$ in $k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$, dann gilt $I = k[X_1, \dots, X_n] \cap J$ und $Ch(M) = V(J)$. Das zeigt, dass $x \in V(I) = \mathrm{supp}(M)$ äquivalent zu $(x, 0) \in V(J) = Ch(M)$. Da $Ch(M)$ konisch ist, zeigt das die Behauptung. $\square$

Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Wir definieren den **singulären Träger** von M als

$$\mathrm{sing\,supp}(M) = \{x \in k^n \mid (x, \xi) \in Ch(M) \text{ for some } \xi \neq 0\}$$

Es gilt $\mathrm{sing\,supp}(M) \subset \mathrm{supp}(M)$.

Lemma 1.33. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann ist* $\operatorname{sing\,supp}(M)$ *eine abgeschlossene Untervarietät von* $\operatorname{supp}(M)$.

Beweis. Sei $p : k^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ die natürliche Projektion. Dann projeziert die Abbildung

$$id \times p : k^n \times (k^n \setminus \{0\}) \longrightarrow k^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

die Varietät $Ch(M) \setminus (k^n \times \{0\})$ auf die abgeschlossene Untervarietät von $k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ die dem Ideal $J(M)$, welches homogen in $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist, entspricht. Die Projektion auf den ersten Faktor $q : k^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to k^n$ bildet diese Untervarietät auf $\operatorname{sing\,supp}(M)$ ab. Da q projektiv und damit eigentlich ist, ist $\operatorname{sing\,supp}(M)$, als Bild einer abgeschlossenen Varietät, selbst abgeschlossen. □

Das folgende Resultat liefert eine geometrische Charakterisierung der Bernstein-Dimension.

erneqChardim **Theorem 1.34.** *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann gilt*

$$\dim Ch(M) = d(M)$$

Wir beweisen das Theorem in mehreren Schritten. Als erstes betrachten wir den zyklischen $D(n)$-Modul $M = D(n)/L$ wobei L ein links-Ideal in $D(n)$ ist. Wir erhalten eine exakte Sequenz von D-Moduln

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow D(n) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Die Filtration nach der Ordnung eines Differentialoperators auf $D(n)$ induziert Filtrationen auf L und M. Damit erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Gr_\bullet L \longrightarrow Gr_\bullet D(n) \longrightarrow Gr_\bullet M \longrightarrow 0$$

von $Gr_\bullet D(n)$-Moduln. Das heißt $Gr_\bullet M$ ist isomorph zum Quotienten $Gr_\bullet D(n)/Gr_\bullet L$ und daher ist der Annihilator von $Gr_\bullet M$ isomorph zu $Gr_\bullet L$. Die charakteristische Varietät von M ist also per Definition gleich $V(Gr_\bullet L)$. Um also das Theorem im Spezialfall $M = D(n)/L$ zu bweisen , müssen wir $\dim V(Gr_\bullet L) = d(D(n)/L)$ zeigen.

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Wir definieren zuerst eine Familie von Graduierungen auf R. Sei $s \in \mathbb{Z}_{>1}$ Wir definieren $Gr_m^{(s)} R$ als linearen Span der Monome $X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_n^{j_n}$, s.d. $\sum_{k=1}^n (i_k + s \cdot j_k) = m$ gilt. Das macht R für jedes $s \in \mathbb{Z}_{>1}$ zu einem graduierten Ring. Zusätzlich definieren wir eine entsprechende Filtrierung $F_p^{(s)} R := \bigoplus_{m \le p} Gr_m^{(s)} R$.

Ist $F_\bullet R$ die natürliche Filtration nach dem Grad der Polynome (also $F_\bullet R = F_\bullet^{(1)} R$) dann gilt

$$F_p^{(s)} R \subset F_p R \qquad \text{und} \qquad F_p R \subset F_{sp}^{(s)} R$$

Sei $I \subset R$ ein Ideal. Betrachte die kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ mit den dazugehörigen induzierten Filtrierungen. Dann gilt

$$F_p^{(s)}(R/I) \subset F_p(R/I) \qquad \text{und} \qquad F_p(R/I) \subset F_{sp}^{(s)}(R/I)$$

und insbesondere

$$\dim_k F_p^{(s)}(R/I) \le \dim_k F_p(R/I) \qquad \text{und} \qquad \dim_k F_p(R/I) \le \dim_k F_{sp}^{(s)}(R/I) \tag{1.4.1}$$ eq:eq1charVa

Sei $s \in \mathbb{Z}_{>1}$. Wir definieren eine Filtrierung $F^{(s)} D(n)$ durch

$$F_m^{(s)} D(n) = \left\{ T \in D(n) \mid T = \sum_{|I| + s|J| \le m} c_{IJ} X^I \partial^J, c_{IJ} \in k \right\}$$

Für $s = 1$ ist $F_\bullet^{(1)} D(n)$ die Bernstein-Filtrierung. Die Filtrierung $F_\bullet^{(s)} D(n)$ erfüllt die Bedingungen 1. − 3. aus Abschnitt 1.1. Um Bedingung 4. zu zeigen bemerken wir folgendes: Sei $T \in D(n)$ von der Ordnung $\leq q$. Dann gilt

$$T \in F_m^{(s)} D(n) \Leftrightarrow T \in F_p^{(1)} D(n)$$

für $m = p + (s-1)q$. Sei also $T \in F_m^{(s)} D(n)$ und $S \in F_{m'}^{(s)} D(n)$ von der Ordnung $\leq q$ bzw. $\leq q'$. Dann ist $T \in F_p^{(1)} D(n)$ bzw. $S \in F_{p'}^{(1)} D(n)$ für $p = m - (s-1)q$ bzw. $p' = m' - (s-1)q'$. Die Ordung von TS ist $\leq q + q'$ und es gilt $TS \in F_{p+p'}^{(1)} D(n)$. Daraus folgt $TS \in F_{m+m'}^{(s)} D(n)$. Der Beweis der Eigenschaft 5. ist ähnlich. Das heißt der graduierte Ring $Gr_\bullet^{(s)} D(n)$ ist isomorph zum graduierten Ring $Gr_\bullet^{(s)} R$. Wie weiter oben bezeichen wir die assozierte Filtrierung mit $F_\bullet^{(s)} R$. Insbesondere gilt

$$F_p^{(s)} D(n) \subset F_p^{(1)} D(n) \qquad \text{and} \qquad F_p^{(1)} D(n) \subset F_{sp}^{(s)} D(n)$$

Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow D(n) \longrightarrow D(n)/L \longrightarrow 0 \tag{1.4.2}$$ eq:sesdimCha

von $D(n)$-Moduln mit den induzierten Filtrierungen $F_\bullet^{(s)}$. Dann gilt

$$F_p^{(s)}(D(n)/L) \subset F_p^{(1)}(D(n)/L) \qquad \text{und} \qquad F_p^{(1)}(D(n)/L) \subset F_{sp}^{(s)}(D(n)/L)$$

Insbesondere gilt

$$\dim_k F_p^{(s)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) \qquad \text{und} \qquad \dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) \tag{1.4.3}$$ eq:eq2charVa

em:dimVgrsL **Lemma 1.35.** *Sei L ein Links-Ideal von $D(n)$. Dann gilt*

$$d(D(n)/L) = \dim V(Gr_\bullet^{(s)} L)$$

für alle $s \in \mathbb{N}$.

Beweis. Aus der kurzen exakten Sequenz (1.4.2) und den induzierten Filtrierungen $F_\bullet^{(s)}$ erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Gr_\bullet^{(s)} L \longrightarrow Gr_\bullet^{(s)} D(n) \longrightarrow Gr_\bullet^{(s)}(D(n)/L) \longrightarrow 0$$

Wir haben weiter oben bereits gesehen, dass $Gr_\bullet^{(s)} D(n) \simeq Gr_\bullet^{(s)} R$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\dim_k F_p^{(s)}(D(n)/L) &= \sum_{q=0}^{p} (\dim_k F_q^{(s)}(D(n)/L) - \dim_k F_{q-1}^{(s)}(D(n)/L)) \\
&= \sum_{q=0}^{p} \dim_k Gr_q^{(s)}(D(n)/L) \\
&= \sum_{q=0}^{p} (\dim_k Gr_q^{(s)} D(n) - \dim_k Gr_q^{(s)} L) \\
&= \sum_{q=0}^{p} (\dim_k Gr_q^{(\mathbf{s})} R - \dim_k Gr_q^{(s)} L) \\
&= \sum_{q=0}^{p} \dim_k Gr_q^{(\mathbf{s})}(R/Gr_\bullet^{(s)} L) \\
&= \dim_k F_p^{(\mathbf{s})}(R/Gr_\bullet^{(s)} L) \qquad (1.4.4)
\end{aligned}$$

Indem wir (1.4.1) und (1.4.3) benutzen erhalten wir

$$\dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) = \dim_k F^{(\mathbf{s})}(R/Gr_\bullet^s L) \leq \dim_k F_{sp}(R/Gr^{(s)} L)$$

und

$$\dim_k F_p(R/Gr_\bullet^s L) \leq \dim_k F_{sp}^{(\mathbf{s})}(R/Gr_\bullet^{(s)} L) = \dim_k F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_{sp}^{(1)}(D(n)/L)$$

Da die Funktionen $p \mapsto \dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L)$ bzw. $p \mapsto \dim_k F_p(R/Gr_\bullet^{(s)} L)$ für große $p \in \mathbb{Z}$ als Polynome dargestellt werden können, müssen diese Polynome den gleichen Grad haben. Das heißt es gilt $d((D(n)/L) = d(R/Gr_\bullet^{(s)} L)$. Da $Gr_\bullet^{(s)} L$ der Annihilator von $R/Gr_\bullet^{(s)} L$ ist, folgt die Aussage aus Theorem A.24. □

Wir bezeichnen mit $\sigma_p^{(s)}(T)$ die Projektion von $T \in F_p^{(s)} D(n)$ nach $Gr_p^{(s)} D(n) = R$. Für $R = k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ mit der natürlichen Filtrierung bezeichnen wir mit $Symb_p$ die Abbildung, die jedes Polynom vom Grad p auf ihren homogenen Anteil vom Grad p abbildet.

Beispiel 1.36. *Sei $T \in D(1)$ mit $T = x^3\partial + \partial^2 + x\partial^2$. Dann ist die Ordnung von T kleiner gleich 2 und es gilt $\sigma_2(T) = \xi^2 + x\xi^2$ sowie $Symb_3(\sigma_2(T)) = x\xi^2$. Andererseits gilt $\sigma_4^{(1)}(T) = x^3\xi$, $\sigma_5^{(2)}(T) = x^3\xi + x\xi^2$ und $\sigma_{2s+1}^{(s)}(T) = x\xi^2$ für $s \geq 2$.*

Dies gillt allgemein: Für große s ist $\sigma^{(s)}(T)$ gleich $Symb(\sigma(T))$.

lem:GreqGrs **Lemma 1.37.** *Sei T ein Differentialoperator in $D(n)$ von der Ordnung $\leq m$, s.d. sein Symbol ein Polynom vom Grad p ist. Dann existiert ein s_0, s.d. für $s \geq s_0$*

$$\sigma_p(Symb_m(T)) = \sigma_{p+(s-1)m}^{(s)}(T)$$

gilt.

Beweis. Sei $T = \sum_{|J| \leq m} c_{IJ} X^I \partial^J$. Da die Summe endlich ist, existiert ein $q_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,s.d. für $c_{IJ} \neq 0$ die Ungleichung $|I| \leq q_0$ gilt. Per Annahme ist

$$\sigma_m(T) = \sum_{|J|=m} c_{IJ} X^I \xi^J$$

ein Polynom vom Grad p und sein Leitterm ist

$$Symb_p(\sigma_m(T)) = \sum_{|I|=p-m, |J|=m} c_{IJ} X^I \xi^J$$

Andererseits sind die Monome $X^I \partial^J \in F_{|I|+s|J|}^{(s)} D(n)$. Für $c_{IJ} \neq 0$ ergeben sich daher folgende Möglichkeiten:

1. $|J| = m$ und $|I| = p - m$: $X^I \partial^J \in F_{p+(s-1)m}^{(s)} D(n)$
2. $|J| = m$ und $|I| < p - m$: $X^I \partial^J \in F_{p+(s-1)m-1}^{(s)} D(n)$
3. $m \geq 1$, $|J| < m$ und $|I| \leq q_0$: $X^I \partial^J \in F_{q_0+s(m-1)}^{(s)} D(n)$. Außerdem gilt

   $$q_0 + s(m-1) = q_0 + sm - s = q_0 + m - s + (s-1)m$$

   Das heißt, wenn $s \geq s_0 = q_0 + m - p + 1$, dann gilt $q_0 + s(m-1) \leq p + (s-1)m - 1$, also ist in diesem Fall $X^I \partial^J \in F_{p+(s-1)m-1}^{(s)} D(n)$. Daraus folgt im Fall $s \geq s_0$, dass

   $$\sigma_{p+(s-1)m}^{(s)}(T) = \sum_{|I|=p-m, |J|=m} c_{IJ} X^I \xi^J = \Sigma_p(\sigma_m(T)).$$

$\square$

Wir wählen jetzt endlich viele $T_i \in L$, s.d. die $Symb(\sigma(T_i))$ das Ideal $Gr_\bullet(Gr_\bullet L)$ erzeugen. Wegen Lemma 1.37 existiert ein s, s.d. $Symb(\sigma(T_i)) = \sigma^{(s)}(T_i)$ simultan für alle T_i. Daraus folgt $Gr_\bullet(Gr_\bullet L) \subset Gr_\bullet^{(s)} L$ bzw. $V(Gr_\bullet(Gr_\bullet L)) \supset V(Gr_\bullet^{(s)} L)$ und somit $\dim V(Gr_\bullet(Gr_\bullet L)) \geq \dim V(Gr^{(s)} L)$. Aus Lemma A.26 folgt aber $\dim(V(Gr_\bullet L)) = \dim V(Gr_\bullet(Gr_\bullet L))$. Aus Lemma 1.35 folgt dann $\dim V(Gr_\bullet L) \geq d(D(n)/L)$.

Wir beweisen jetzt die umgekehrte Richtung. Sei $T \in F_p^{(1)}(D(n))$, dann gilt $ord(T) \leq p$ und $\sigma(T)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq p$. Daher gilt $Gr_\bullet F_p^{(1)} L \subset F_p(Gr_\bullet L)$[2] Da $F_p^{(1)}(L)$ endlich dimensional und hausdorffsch ist, gilt

$$\dim_k F_p^{(1)}(L) = \dim_k Gr_\bullet F_p^{(1)}(L) \leq \dim_k F_p(Gr_\bullet L)$$

und damit

$$\dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) = \dim_k D_p(n) - \dim_k F_p^{(1)}(L) \geq \dim_k F_p R - \dim_k F_p(Gr_\bullet L) = \dim_k F_p(R/Gr_\bullet L)$$

Dies impliziert $d(D(n)/L) \geq d(R/Gr_\bullet L)$. Da $Gr_\bullet L$ der Annihilator von $R/Gr_\bullet L$ ist folgt aus Proposition A.21 und Theorem A.24, dass $d(D(n)/L) \geq \dim V(GrL)$ gilt. Wir haben somit gezeigt, dass

$$d(D(n)/L) = \dim V(Gr_\bullet L)$$

gilt.

Im allgemeinen Fall beweisen wir das Theorem per Induktion nach der Anzahl der Erzeuger. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

wobei wir annehmen, dass M q Erzeuger, M' $q-1$ Erzeuger hat und M'' zyklisch ist. as heißt M'' ist isomorph zu $D(n)/L$ für ein geeignetes Links-Ideal L. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt dann $d(M'') = \dim Ch(M'')$. Aus der Induktionsannahme folgt $d(M') = \dim Ch(M')$. Aus Proposition 1.10 und Proposition 1.31 folgt

$$d(M) = \max(d(M'), d(M'')) = \max(\dim Ch(M'), \dim Ch(M'')) = \dim(CH(M') \cup \dim Ch(M'')) = \dim Ch(M).$$

Damit ist der Beweis des Theorems fertig.

Aus dem Theorem und Theorem 1.26 folgt

Korollar 1.38. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul und $M \neq 0$. Dann gilt $\dim Ch(M) \geq n$.*

1.5 Holonome D-Moduln

Definition 1.39. *Ein endlich erzeugter D-Modul heißt **holonom** falls die Dimension seiner charakteristischen Varietät $\leq n$ ist. Das heißt, M ist holonom falls entweder $M = 0$ oder $\dim Ch(M) = n$ gilt.*

thm:propHol **Theorem 1.40.**

1. *Holonome D-Moduln haben endliche Länge*
2. *Unter-Moduln, Quotienten und Extensionen von holonomen Moduln sind holonom.*

[2]Die Inklusion ist i. a. strikt. Betrachte $L = (x\partial^{p-1} + x^{p+1})$. Dann ist $x\xi^{p-1} \in F_p Gr_\bullet L$ aber $x\partial^{p-1} + x^{p+1} \notin F_p^{(1)}(L)$.

Beweis. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus Proposition 1.31. Um die erste Aussage zu beweisen betrachten wir einen holonomen $D(n)$-Modul M der ungleich null ist. Wegen Theorem 1.34 ist seine Bernstein Dimension gleich n. Da M endlich erzeugt und $D(n)$ noethersch ist, existiert eine maximaler $D(n)$-Untermodul $M' \subsetneq M$. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

Wegen der zweiten Aussage ist M' und M/M' holonom und M/M' ist ein irreduzibler $D(n)$-Modul. Ist $M' \neq 0$ dann folgt aus Proposition 1.10, dass $e(M') < e(M)$ gilt. Die Behauptung folgt dann per Induktion nach der Multiplizität $e(M)$. □

Wir bezeichnen mit $Hol(D(n))$ die volle Unterkategorie von $M_{fg}(D(n))$ der holonomen D-Moduln.

Beispiel 1.41. *Sei $O_n = k[X_1, \dots, X_n]$, dann ist $O_n \simeq D(n)/(D(n)(\partial_1, \dots, \partial_n))$ ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Wir definieren eine Filtrierung*

$$F_p O_n = \begin{cases} O_n & \text{für } p \geq 0 \\ 0 & \text{für } p < 0 \end{cases}$$

Die Filtrierung $F_\bullet O_n$ ist eine gute Filtrierung bzgl. der Ordnungsfiltration auf $D(n)$. Für den graduierten Modul $Gr_\bullet O_n$ gilt

$$Gr_p O_n = \begin{cases} k[X_1, \dots, X_n] & \text{für } p = 0 \\ 0 & \text{für } p \neq 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Annihilator von $Gr_\bullet O_n$ als Ideal in $k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ von $\xi_1, \dots, \xi_n$ erzeugt wird. Daraus folgt, dass $Ch(O_n) = k^n \times \{0\} \subset k^{2n}$ gilt. Insbesonders gilt $\dim Ch(O_n) = n$, also ist O_n ein holonomer $D(n)$-Modul. Durch Ableiten sehen wir, dass jeder $D(n)$-Untermodul von O_n die 1 enthält, d.h. O_n ist irreduzibel.

prop:holFL **Proposition 1.42.** *Sei M ein holonomer $D(n)$-Modul, dann ist die Fourier-Transformation $\mathcal{F}(M)$ auch holonom. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ ein Automorphismus der Kategorie $Hol(D(n))$.*

Beweis. Aus Lemma 1.27 folgt, dass $d(M) = d(\mathcal{F}(M))$. Die Proposition folgt dann aus Theorem 1.34. □

bsp:delMod **Beispiel 1.43.** *Betrachte $\Delta_n = \mathcal{F}(O_n) \simeq k[\partial_1, \dots, \partial_n]$. Aus Proposition 1.42 wissen wir, dass Δ_n holonom ist. Da die Fourier-Transformation ein Automorphismus der Kategorie $Hol(D(n))$ ist, folgt aus dem obigen Beispiel, dass Δ_n irreduizibel ist. Wir definieren eine Filtrierung $F_\bullet \Delta_n$ durch*

$$F_p \Delta_n = \begin{cases} span(\{\partial^I \mid |I| \leq p\}) & \text{für } p \geq 0 \\ 0 & \text{für } p < 0 \end{cases}$$

Sei ϵ_i der Multi-Index $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit einer 1 an der i-ten Stelle. Dann gilt

$$\partial_j \cdot \partial^I = \partial^{I + \epsilon_j} \qquad \text{und} \qquad X_j \cdot \partial^I = -i_j \partial^{I - \epsilon_j}$$

Das zeigt, dass die $F_p \Delta_n$ $k[X_1, \dots, X_n]$-Untermoduln von Δ_n sind. Außerdem gilt $F_q D(n) \cdot F_p \Delta_n = F_{p+q} \Delta_n$. Somit ist die Filtration $F_\bullet D(n)$ ein gute Filtration bzgl. der Ordnungsfiltrierung auf $D(n)$. Für den graduierten Modul $Gr_\bullet \Delta_n$ gilt

$$Gr_\bullet \Delta_n = \begin{cases} span(\{\partial^I \mid |I| = p\}) & \text{für } p \geq 0 \\ 0 & \text{für } p < 0 \end{cases}$$

Die X_i operieren auf $Gr_\bullet \Delta_n$ durch 0. Das zeigt, dass der Annihilator von $Gr_\bullet \Delta_n$ als Ideal in $k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ durch $X_1, \dots, X_n$ erzeugt wird. Daraus folgt $Ch(\Delta_n) = \{0\} \times k^n \subset k^{2n}$.

Wir beweisen jetzt ein einfaches Kriterium für die Holonomizität.

em:holDchara **Lemma 1.44.** *Bertrachte $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung. Sei M ein $D(n)$-Modul und $F_\bullet M$ eine ausschöpfende $D(n)$-Modul Filtrierung. Falls*

$$\dim_k F_pM \leq \frac{c}{n!}p^n + (\textit{Terme niedrigerer Ordnung in } p)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt, dann ist M ein holonomer $D(n)$-Modul mit Länge $\leq c$. Insbesondere ist M endlich erzeugt.

Beweis. Sei N ein endlich erzeugter $D(n)$-Untermodul von M. Die Filtrierung $F_\bullet M$ induziert eine ausschöpfende $D(n)$-Modul Filtrierung auf N. Wegen Lemma lem:fgModexgood 1.4 besitzt N eine gute Filtrierung $F'_\bullet N$. Es existiert daher ein $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. s.d $F'_pN \subset F_{p+s}N$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Es gilt

$$\dim_k F'_pN \leq \dim_k F_{p+s}N \leq \dim_k F_{p+s}M \leq \frac{c}{n!}p^n + (\text{Terme niedrigerer Ordnung in } p)$$

Daraus folgt $d(N) \leq n$ und daher ist N holonom. Ist $N \neq 0$ dann gilt außerdem $e(N) \leq c$. Das zeigt, dass die Länge von N kleiner gleich $e(N) \leq c$ ist. Daraus können wir schlußfolgern, dass jede aufsteigende Sequenz von endlich erzeugten $D(n)$-Untermoduln von M stationär wird, d.h. M ist selbst auch endlich erzeugt. □

Beispiel 1.45. *Sei $D = D(1)$ und betrachte die D-Moduln $M_\alpha = D/D(x\partial - \alpha)$. Setze $E = x\partial$. Es ist leicht zusehen, dass die Operatoren $\{z^pE^q, \partial^pE^q \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ eine Basis von D als k-Vektorraum bilden. Das Links-Ideal $D(x\partial - \alpha)$ wird von den Elementen $\{x^pE^q(E-\alpha), \partial^pE^q(E-\alpha) \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ aufgespannt. Daraus folgt unmittelbar,dass M_α von den Klassen $\{x^p, \partial^p \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ aufgespannt wird. Es gilt*

$$Ex = x(E+1) \qquad \textit{und} \qquad E\partial = \partial(E-1) \qquad \textit{in } D(1)\,.$$

Daher ist die Klasse von x^n in M_α ein Eigenvektor von E zum Eigenwert $\alpha + n$ und die Klasse von ∂^n ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha - n$. Das heißt das Spektrum von E ist $\{\alpha + n \mid m \in \mathbb{Z}\}$ und jeder Eigenwert hat Multiplizität 1.

Nehme jetzt an, dass $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Dann ist $E = x\partial$ ein linearer Isomorphismus und die Links- Multiplikation mit x ist surjektiv. Sie ist aber auch injektiv, da der Eigenraum zum Eigenwert $\alpha + n$ in den Eigenraum zum Eigenwert $\alpha + n + 1$ abgebildet wird [3]. Da zeigt aber auch, dass Links-Multiplikation mit ∂ ein Isomorphismus ist. Da E jeden nichttrivialen D-Untermodul von M_α stabilisiert, enthält dieser einen nicht-trivialen Eigenvektor von E. Aus den obigen Argumenten folgt dann, dass der Untermodul jeden Eigenraum enthält und somit M_α irreduzibel ist. Die D-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} M_\alpha &\longrightarrow M_{\alpha+p} \\ T &\mapsto Tx^p \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, da sie den Eigenraum zum Eigenwert $\alpha + n$ in den Eigenraum zum Eigenwert $(\alpha + p) + n$ abbildet.

Wir definieren eine Filtrierung auf M_α durch

$$F_nM_\alpha = \begin{cases} span(\{x^p, \partial^q \mid p, q \leq n\} & \textit{für } n \geq 0 \\ 0 & \textit{für } n < 0 \end{cases}$$

Die Filtrierung ist eine hausdorffsche, ausschöpfende Filtrierung durch endlich dimensionalen Vektorräume. Es gilt $z \cdot F_nM_\alpha \subset F_{n+1}M_\alpha$ und $\partial F_nM_\alpha \subset F_{n+1}M_\alpha$. Das heißt $F_\bullet M$ ist eine D-Modul Filtrierung bzgl. D ausgestattet mit der Bernsteinfiltrierung. Da $\dim_k F_pM_\alpha = 2p + 1$ gilt, folgt, dass M_α holonom ist.

[3] Es gilt $x\partial^n \equiv (\alpha + n - 1) \cdot \partial^{n-1}$ in M_α

Um die charakteristische Varietät auszurechnen betrachte wir die Filtrerung $F'_\bullet M_\alpha$. Sie ist durch

$$F'_n M_\alpha = \begin{cases} span(\{x^p, \partial^q \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \leq n\}) & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

gegeben. Dies ist eine hausdorffsche, ausschöpfende Filtration durch endlich erzeugte $C[x]$-Moduln. Es gilt $\partial F'_n M_\alpha \subset F'_{n+1} M_\alpha$ und dies liefert eine gute D-Modul Filtrierung bzgl. D ausgestattet mit der Filtrierung nach der Ordnung von Differentialoperatoren. Der graduierte Modul $Gr_\bullet M_\alpha$ ist durch

$$Gr_n M_\alpha = \begin{cases} span(\partial^n) & \text{für} n > 0 \\ span(\{x^p \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) & \text{für} n = 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass das Element $x \in Gr_\bullet D$ den homogenen Teil $Gr_n M_\alpha$ für $n > 0$ und $\xi \in Gr_\bullet D$ den homogenen Teil $Gr_0 M_\alpha$ annihiliert. Daraus folgt, dass der annihilator von $Gr_\bullet M_\alpha$ von $x\xi \in k[x, \xi]$ erzeugt wird. Daraus folgt, dass die charakteristische Varietät $Ch(M_\alpha)$ die Vereinigung der beiden Hyperebenen $\{x = 0\}$ und $\{\xi = 0\}$ ist.

Sei M ein $D(n)$-Modul und $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Auf der Lokalisierung M_P[4] können wir k-linerae Abbildungen $\partial_i : M_P \to M_P$ durch

$$\partial_i(\frac{m}{P^k}) = -k\partial_i(P)\frac{m}{P^{k+1}} + \frac{\partial_i m}{P^k}$$

definieren. Durch nachrechnen überprüft man, dass

$$[\partial_i, \partial_j](\frac{m}{P^k}) = 0 \qquad \text{und} \qquad [\partial_i, x_j](\frac{m}{P^k}) = \delta_{ij}\frac{m}{P^k}$$

gilt. Aus Theorem thm:relDn 1.21 folgt, dass dies eine $D(n)$-Modulstruktur liefert.

op:holModloc **Proposition 1.46.** *Sei M ein holonomer $D(n)$-Modul und $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist M_P auch ein holonomer $D(n)$-Modul.*

Beweis. Sei $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung versehen. Wir können oBdA annehmen, dass $P \neq 0$ gilt. Sei $m = \deg P$ und $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M, s.d. $F_k M = 0$ für $k \leq 0$ gilt. Wir definieren eine Filtrierung auf M_P durch $F_k M_P = 0$ für $k < 0$ und

$$F_k M_P = \left\{ \frac{v}{P^k} \mid v \in F_{(m+1)k} M \right\}$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Die Filtrationsschritte $F_k M_P$ sind Untervektorräume von M_P. Sei $w = \frac{v}{P^k} \in F_k M_P$ für ein $v \in F_{(m+1)k} M$. Dann gilt $w = \frac{Pv}{P^{k+1}}$ sowie $Pv \in F_{(m+1)k+m} M \subset F_{(m+1)(k+1)} M$. Daraus folgt $w \in F_{k+1} M_P$. Das zeigt, dass $F_\bullet M_P$ eine aufsteigende Filtrierung ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Filtration ausschöpfend ist. Dafür müssen wir zeigen, dass für jedes $v \in M$ und $k \geq 0$ das Element $\frac{v}{P^k}$ in einem der Filtrationsschritte liegt. Sei $v \in F_q M$ und $k \geq 0$. Dann gilt $\frac{v}{P^k} = \frac{P^s v}{P^{k+s}}$ für alle $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Da $P^s v \in F_{q+sm} M$ und $(m+1)(k+s) - (q+sm) = s + (m+1)k - q \geq 0$ für $s \geq q - (m+1)k$ gilt, folgt

$$P^s v \in F_{q+sm} M \subset F_{(m+1)(k+s)} M$$

und damit $\frac{v}{P^k} \in F_{k+s} M_P$.

Es bleibt zu zeigen, dass $F_\bullet M$ eine $D(n)$-Modul Filtrierung ist. Für $v \in F_{(m+1)k} M$ gilt $x_i P v \in F_{(m+1)(k+1)} M$ und somit $x_i \frac{v}{P^k} = \frac{x_i P v}{P^{k+1}} \in F_{k+1} M_P$. Ebenso gilt

$$\partial_i \left(\frac{v}{P^k} \right) = \frac{-k\partial_i(P)v + P\partial_i v}{P^{k+1}}$$

[4] M_P ist die Lokalisierung des unterliegenden $k[X_1, \ldots, X_n]$-Moduls

und $-k\partial_i(P)v + P\partial_i v \in F_{(m+1)(k+1)}M$. Damit gilt $\partial_i\left(\frac{v}{P^k}\right) \in F_{p+1}M$. Wir wenden jetzt Lemma 1.44 auf die ausschöpfende $D(n)$-Modul Filtrierung $F_\bullet M_P$ anwenden. Es gilt lem:holDchara

$$\dim_k F_k M_P \leq \dim_k F_{(m+1)k} M \leq e(M)\frac{((m+1)k)^n}{n!} + (\text{Terme niedrigerer Ordnung in } k)$$

Daraus folgt, dass M_P holonom ist. $\square$

Korollar 1.47. *Sei $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $k[X_1, \ldots, X_n]_P$ ein holonomer $D(n)$-Modul.*

Beispiel 1.48. *Sei $D = D(1)$ und betrachte $M_0 = k[x]_x$. Man kann leicht zeigen, dass $k[x]_x \simeq D/D(\partial x)$ gilt. Wir haben nämlich die D-lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} k[x]_x &\longrightarrow D/D(\partial x) \\ x^n &\mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \textit{für } n \geq -1 \\ (-1)^{n-1}(n-1)!\,\partial^{-n-1} & \textit{für } n < -2 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

1.6 Äußere Tensorprodukte

Sei $X = k^n$ und $Y = k^m$. Im folgenden bezeichnen wir mit D_X bzw. D_Y die zugehörigen Algebren von Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten. Wir betrachten die Algebra $D_X \boxtimes D_Y$, die gleich $D_X \otimes_k D_Y$ als Vektorraum ist und die, für $T, T' \in D_X$ bzw. $S, S' \in D_Y$ mit der Multiplikation $(T \otimes S)(T' \otimes S') = TT' \otimes SS'$ versehen ist. Wir nennen $D_X \boxtimes D_Y$ das **äußere Tensorprodukt** von D_X und D_Y.

Lemma 1.49. *Es gilt $D_X \boxtimes D_Y = D_{X \times Y}$*

Ist M ein D_X-Modul und N ein D_Y-Modul, dann können wir den $D_{X\times Y}$-Modul $M \boxtimes N$ definieren. Er ist isomorph zu $M \otimes_k N$ als k Vektorraum und die Wirkung von $D_{X\times Y}$ auf $M \boxtimes N$ ist geben durch $(T \otimes S)(m \otimes n) := Tm \otimes Sn$.

n:boxtimesfg **Lemma 1.50.** *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul und N ein endlich erzeugter D_Y-Modul, dann ist $M \boxtimes N$ ein endlich erzeugter $D_{X\times Y}$-Modul*

Beweis. Seien $e_1, \ldots, e_p$ Erzeuger von M und $f_1, \ldots, f_q$ Erzeuger von N, dass sind die $e_i \otimes f_j$ für $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq q$ Erzeuger von $M \boxtimes N$. $\square$

Definiere die Abbildung

$$\begin{gathered} q : k^{2n} \times k^{2m} \longrightarrow k^{2(n+m)} \\ (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n, y_1, \ldots, y_m, \eta_1, \ldots, \eta_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) \end{gathered}$$

Wir möchten jetzt folgende Aussage beweisen.

:charVarprod **Theorem 1.51.** *Seien M und N endlich erzeugte D_X bzw. D_Y-Moduln. Dann gilt*

$$Ch(M \boxtimes N) = q(Ch(M) \times Ch(N))$$

Wir versehen jetzt D_X bzw. D_Y mit der Ordnungs-Filtrierung. Seien M bzw. N endlich erzeugte D_X- bzw. D_Y-Moduln mit guten Filtrierungen $F_\bullet M$ bzw. $F_\bullet N$. Wir definieren die Produkt-Filtrierung durch

$$F_j(M \boxtimes N) = \sum_{p+q=j} F_p M \otimes_k F_q N$$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Produktfiltrierung auf $D_X \boxtimes D_Y = D_{X\times Y}$ mit der Ordnungs-Filtrierung übereinstimmt. Das heißt $F_\bullet(M \boxtimes N)$ ist eine ausschöpfende, hausdorffsche $D_{X\times Y}$-Filtrierung. Wir wollen zeigen, dass $F_\bullet(M \boxtimes N)$ eine gute Filtrierung ist. Dafür brauchen wir einige vorbereitende Lemmata.

rProdLinAlg **Lemma 1.52.** *Seien M, M', N und N' k-Vektorräume und $\phi : M \to M'$ und $\psi : N \to N'$ k-lineare Abbildungen. Diese definieren eine lineare Abbildung $\psi \otimes \phi : M \otimes_k N \to M' \otimes_k N'$. Es gilt*

1. $\operatorname{Im}(\phi \otimes \psi) = \operatorname{Im}\phi \otimes \operatorname{Im}\psi$
2. $\ker(\phi \otimes \psi) = \ker\phi \otimes N + M \otimes \ker\psi$.

Beweis. Die erste Aussage ist klar, da dass Bild von Elementen der Form $(\phi \otimes \psi)(m \otimes n) = \phi(m) \otimes \psi(n)$ erzeugt wird. Um die zweite Aussage zu beweisen, können wir oBdA annehmen, dass die beiden Abbildung ϕ und ψ surjektiv sind. Wir erhalten die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} M' \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow N'' \longrightarrow N \xrightarrow{\psi} N' \longrightarrow 0$$

wobei $M'' = \ker\phi$ und $N'' = \ker\psi$ ist. Es gilt $\phi \otimes \psi = (\phi \otimes id_{N'}) \circ (id_M \otimes \psi)$. Da tensorien mit N' exakt ist erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M'' \otimes N' \longrightarrow M \otimes N' \xrightarrow{\phi \otimes id_{N'}} M' \otimes N' \longrightarrow 0$$

Das heißt $\ker(\phi \otimes id_{N'}) = M'' \otimes N' = \ker\phi \otimes N'$. Also ist jedes Element $z \in M \otimes N$ im Kern von $\phi \otimes \psi$ genau dann wenn $(id_M \otimes \psi)(z)$ in $\ker\phi \otimes N'$ liegt. Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow M \otimes N'' \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{id_M \otimes \psi} M \otimes N' \longrightarrow 0$$

kurz exakt ist, wird $\ker\phi \otimes N$ surjektiv auf $\ker\phi \otimes N'$ abgebildet und $\ker(id_M \otimes \psi) = M \otimes N'' = M \otimes \ker\psi$. Das heißt, t ist im Kern von $\phi \otimes \psi$ genau dann wenn $z \in ker\phi \otimes N + M \otimes \ker\psi$. $\square$

spaceLinAlg **Lemma 1.53.** *Seien $X_1, \ldots, X_n$ lineare Unterräume eines k-Vektorraumes X, die X aufspannen. Gilt*

$$X_i \cap \sum_{j \neq i} X_j = \{0\}$$

für $1 \leq i \leq n$, dann ist X die direkte Summe von $X_1, \ldots, X_n$.

Beweis. Sei $x_i \in X_i$ für $1 \leq i \leq n$, s.d. $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Dann gilt $x_i = -\sum_{j \neq i} x_j \in X_i \cap \sum_{j \neq i} X_j$ und damit ist x_i gleich 0. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Wir möchten jetzt $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ beschreiben. Sei $j, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p + q = j$. Wir erhalten eine Abbildung

$$F_pM \otimes F_qN \longrightarrow F_j(M \boxtimes N) \longrightarrow Gr_j(M \boxtimes N)$$

Wegen Lemma lem:tensorProdLinAlg 1.52 ist der Kern der Abbildung

$$F_pM \otimes F_qN \longrightarrow Gr_pM \otimes Gr_qN$$

gleich $F_{p-1}M \otimes F_qN + F_pM \otimes F_{q-1}N$, d.h. sein Bild ist in $F_{j-1}(M \boxtimes N)$ enthalten. Daraus folgt, dass die lineare Abbildung $F_pM \otimes F_qN \to Gr_j(M \boxtimes N)$ über $Gr_pM \otimes Gr_qN$ faktorisiert. Dies liefert die lineare Abbildung

$$\pi : \bigoplus_{p+q=j} Gr_pM \otimes Gr_qN \longrightarrow Gr_j(M \boxtimes N)$$

Die Abbildungen π ist per Konstruktion surjektiv. Wir haben ebenso gezeigt, dass die Restriktion auf jeden Summanden $Gr_pM \otimes Gr_qM$ injektiv ist. Sei jetzt $X_{p,q}$ das Bild von $Gr_pM \otimes Gr_qN$ in $Gr_j(M \boxtimes N)$. Wir haben

$$(F_pM \otimes F_qN) \cap \left(\sum_{\substack{p'+q'=j \\ p' \neq p, q' \neq q}} F_{p'}M \otimes F_{q'}N \right) = F_{p-1}M \otimes F_qN + F_pM \otimes F_{q-1}N \subset F_{j-1}(M \boxtimes N)$$

daraus folgt

$$X_{p,q} \cap \left(\sum_{\substack{p'+q'=j \\ p' \neq p, q' \neq}} X_{p',q'} \right) = \{0\} .$$

Wegen Lemma 1.53 folgt dann, dass π ein Isomorphismus ist. Insbesondere folgt, daraus dass $Gr_\bullet D_X \boxtimes Gr_\bullet D_Y = Gr_\bullet D_{X\times Y}$. Damit wird $Gr_\bullet M \boxtimes Gr_\bullet N$ ein graduierter $GrD_{X\times Y}$-Modul der isomorph zu $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ ist. Da die Filtrierung $F_\bullet M$ und $F_\bullet N$ gut sind, sind $Gr_\bullet M$ und $Gr_\bullet N$ endlich erzeugte $Gr_\bullet D_X$- bzw. $Gr_\bullet D_Y$-Moduln. Analog zu Lemma 1.50 ist dann $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ ein endlich erzeugter $Gr_\bullet D_{X\times Y}$-Modul. Somit ist nach Lemma 1.1 die Produktfiltrierung auf $M \boxtimes N$ gut.

Seien jetzt $I \subset Gr_\bullet D_X$ bzw. $J \subset Gr_\bullet D_Y$ die Annihilatoren von $Gr_\bullet M$ bzw. $Gr_\bullet N$. Seien $m_1, \dots, m_s$ bzw. $n_1, \dots, n_r$ die Erzeuger von $Gr_\bullet M$ bzw. $Gr_\bullet N$. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi : Gr_\bullet D_X &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} Gr_\bullet M \\ T &\mapsto Tm_1 \oplus \ldots \oplus Tm_s \\ \psi : Gr_\bullet D_Y &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} Gr_\bullet N \\ T &\mapsto Tn_1 \oplus \ldots \oplus Tn_r \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Dann ist $I = \ker \phi$ und $J = \ker \psi$. Die Erzeuger von $Gr_\bullet M \boxtimes Gr_\bullet N = Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ sind die $m_i \otimes n_j$ für $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r$. Daher ist der Kern der Abbildung

$$\phi \otimes \psi : Gr_\bullet D_{X\times Y} = Gr_\bullet D_X \boxtimes Gr_\bullet D_Y \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{s} Gr_\bullet M \right) \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{r} Gr_\bullet N \right)$$

der Annihilator von $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$. Nach Lemma 1.52 ist er gleich $I \otimes Gr_\bullet D_Y + Gr_\bullet D_X \otimes J$.

Wir identifizieren $Gr_\bullet D_X$ mit $k[x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$, $Gr_\bullet D_Y$ mit $k[y_1, \dots, y_m, \eta_1, \dots, \eta_m]$ und $Gr_\bullet D_{X\times Y}$ mit $k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m]$. Da der Annihilator von $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ von den Bildern von I und J in $k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m]$ erzeugt wird, folgt der Beweis von Theorem 1.51.

Aus Theorem 1.34 folgt

Korollar 1.54. *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul und N ein endlich erzeugter D_Y-Modul. Dann gilt*

$$d(M \boxtimes N) = d(M) + d(N).$$

Insbesondere gilt:

Korollar 1.55. *Sei M ein holonomer D_X-Modul und N ein holonomer D_Y-Modul. Dann ist $M \boxtimes N$ ein holonomer $D_{X\times Y}$-Modul.*

Aus Proposition 1.32 folgt:

Korollar 1.56. *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul und N ein endlich erzeugter D_Y-Modul. Dann gilt*

$$\operatorname{supp}(M \boxtimes N) = \operatorname{supp}(M) \times \operatorname{supp}(N)$$

c::invImaffin

1.7 Inverse Bilder

Sei $X = k^n$ und $Y = k^m$ mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_m$. Wir bezeichnen mit $O_X = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $O_Y = k[y_1, \ldots, y_n]$ die Koordinatenringe. Betrachte die polynomiale Abbildung

$$\begin{aligned} F : X &\mapsto Y \\ \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (y_1, \ldots, y_m) = (F_1(\underline{x}), \ldots, F_m(\underline{x})) \end{aligned}$$

gegeben durch einen Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi_F : O_Y &\longrightarrow O_X \\ P &\mapsto P \circ F \end{aligned}$$

Damit können wir jeden O_X als O_Y-Modul auffassen. Wir definieren den rechts-exakten Funktor F^* von der Kategorie $M(O_Y)$ der O_Y-Moduln zur Kategorie $M(O_X)$ der Kategorie der O_X-Moduln:

$$F^*(N) := O_X \otimes_{O_Y} N$$

Wir nennen diesen Funktor **inverses Bild** unter der Abbildung F. Wir möchten diesen Funktor auf D-Moduln ausdehnen. Ist N ein D_Y-Links-Modul dann möchten wir $F^*(N)$ mit einer D_X-Links-Modul Struktur versehen. (Da der Transpositions-Funktor aus Abschnitt subsec:ModRingDiff 1.3 eine Äquivalenz von der Kategorie der Links-Moduln zur Kategorie der Rechts-Moduln liefert, behandelt dass auch den Fall von Rechts-Moduln). Wir betrachten zuerst die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} O_X \times N &\longrightarrow O_X \otimes_{O_Y} N \\ (P, v) &\mapsto \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes v + \sum_{j=1}^{n} P \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j} v \end{aligned}$$

Damit dies eine wohl-definierte Abbildung $O_X \otimes_{O_Y} N \to O_X \otimes_{O_Y} N$ wird, müssen wir zeigen, dass das Bild von $(P(Q \circ F), v)$ gleich dem Bild von (P, Qv) ist:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P(Q \circ F)}{\partial x_i} \otimes v + \sum_{j=1}^{n} P(Q \circ F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j} v \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes Qv + \sum_{j=1}^{n} P \left(\frac{\partial Q}{\partial y_j} \circ F \right) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes v + \sum_{j=1}^{n} P(Q \circ F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j} v \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes Qv + \sum_{j=1}^{n} P \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \left(\frac{\partial Q}{\partial y_j} v + Q \partial_{y_j} v \right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes Qv + \sum_{j=1}^{n} P \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j}(Qv) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diesen k-linearen Endomorphismus von $F^*(N)$ mit ∂_{x_i}. Man kann folgendes direkt nachrechnen

$$[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}](P \otimes v) = 0 \qquad \text{und} \qquad [\partial_{x_i}, x_j](P \otimes v) = \delta_{ij}(P \otimes v)$$

Aus Theorem thm:relDn 1.21 folgt dann, dass $F^*(N)$ eine natürliche links D_X-Modulstruktur trägt. Sei

$$D_{X \to Y} := F^*(D_Y) = O_X \otimes_{O_Y} D_Y$$

Wie wir gerade gesehen haben hat $D_{X \to Y}$ eine links D_X-Modulstruktur, es hat aber auch eine rechts D_Y-Modulstruktur durch Rechtsmultiplikation auf D_Y. Da die beiden Multiplikationen offensichtlich kommutieren[5] hat $D_{X \to Y}$ eine (D_X, D_Y)-Bimodulstruktur. Wir nennen ihn auch Transfer-Modul. Es gilt

$$F^*(N) = O_X \otimes_{O_Y} N = (O_X \otimes_{O_Y} D_Y) \otimes_{D_Y} N = D_{X \to Y} \otimes_{D_Y} N$$

[5]d.h. es gilt $(T(P \otimes v))Q = T((P \otimes v)Q)$

Der Funktor $F^* : M^L(D_Y) \to M^L(D_X)$ ist rechts-exakt. Wir bezeichnen den zugehörigen derivierten Funktor

$$F^+(N) := D_{X\to Y} \overset{L}{\otimes} N$$

als **inverses Bild** von N. Sei For der Vergißfunktor von der Kategorie der D-Moduln in die Kategorie der O-Moduln. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} M(D_Y) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "For"'] & M(D_X) \arrow[d, "For"] \\ M(O_Y) \arrow[r, "F^*"] & M(O_X) \end{tikzcd}$$

Eine analoge Aussage gilt für die derivierten Funktoren

Proposition 1.57. *Das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} D^-(D_Y) \arrow[r, "F^+"] \arrow[d, "For"'] & D^-(D_X) \arrow[d, "For"] \\ D^-(O_Y) \arrow[r, "LF^*"] & D^-(O_X) \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $N \in D^-(D_Y)$ und sei $K \to N$ eine D_Y-freie Auflösung. Dann gilt

$$For(F^+N) = For(D_{X\to Y}\overset{L}{\otimes}N) = For(D_{X\to Y}\otimes K) = For(O_X\otimes_{O_Y}K) = O_X\otimes_{O_Y}For(K) = O_X\overset{L}{\otimes}_{O_Y}For(N)$$

wobei die letzte Gleichung aus der Tatsache folgt, dass $For(K)$ eine O_Y-freie Auflösung von $For(N)$ ist (beachte D_Y ist ein freier O_Y-Modul). □

Wir möchten jetzt die funktoriellen Eigenschaften von F^+ untersuchen.

em:invImProj **Lemma 1.58.** *Sei P ein projektiver links D_Y-Modul. Dann ist $F^*(P)$ ein projektiver O_X-Modul.*

Beweis. Seien $(p_i)_{I\in I}$ Erzeuger von von P. Dann existiert eine surjektive D_X-lineare Abbildung $\phi : D_X^{(I)} \to P$, wobei $D_X^{(I)}$ ein freier D_X-Modul ist. Die universelle Eigenschaft von projektiven Objekten zeigt, dass P ein direkter Summand von $D_X^{(I)}$ ist. Daraus folgt, dass $F^*(P)$ ein direkter Summand von $F^*(D_Y^{(I)})$ ist. Da D_Y ein freier O_Y-Modul ist, ist $For(F^*(D_Y^{(I)})) = O_X \otimes_{O_Y} D_Y^{(I)}$ ein freier O_X-Modul. Damit ist aber $F^*(P)$ als direkter Summand eines freien Moduls projektiv. □

m:PropInvIm **Theorem 1.59.** *Seien $X = k^n, Y = k^m, Z = k^p$ und $F : X \to Y$ bzw. $G : Y \to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt*

1. *Der inverse Bild Funktor $(G\circ F)^*$ von $M^L(D_Z)$ nach $M^L(D_X)$ ist isomorph zu $F^*\circ G^*$.*
2. *Es gilt $(G\circ F)^+ = F^+\circ G^+$.*

Beweis. In der Kategorie der O_Z-Moduln gilt

$$(G\circ F)^*(N) = O_X \otimes_{O_Z} N = O_X \otimes_{O_Y} (O_Y \otimes_{O_Z} N) = F^*(G^*(N))$$

Für die D_X-Modulstruktur auf $(G\circ F)^*(N)$ gilt

$$\partial_{x_i}(P\otimes v) = \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes v + \sum_{k=1}^{p} P\frac{\partial(G_k\circ F)}{\partial x_i}\otimes \partial_{z_k} v$$

für die D_X-Modulstruktur auf $(F^*(G^*(N))$ gilt

$$\partial_{x_i}(P\otimes(1\otimes v)) = \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes(1\otimes v)+\sum_{j=1}^m P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\otimes\partial_{y_j}(1\otimes v) = \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes(1\otimes v)+\sum_{j=1}^m P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\otimes\left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial G_k}{\partial y_j}\otimes\partial_{z_k}v\right)$$

Wir müssen zeigen, dass die beiden rechten Seiten unter der Identifizierung $P\otimes(Q\otimes v)\mapsto P(Q\circ F)\otimes v$ gleich sind. Dies folgt jedoch unmittelbar aus der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes(1\otimes v)+\sum_{j=1}^m P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\otimes\left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial G_k}{\partial y_j}\otimes\partial_{z_k}v\right) &\mapsto \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes v+\sum_{j=1}^m P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial G_k}{\partial y_j}\circ F\right)\otimes\partial_{z_k}v \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes v+\sum_{k=1}^p P\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G_k}{\partial y_j}\circ F\right)\otimes\partial_{z_k}v \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes v+\sum_{k=1}^p P\frac{\partial (G_k\circ F)}{\partial x_i}\otimes\partial_{z_k}v \qquad (1.7.1)\end{aligned}$$

das heißt die D_X-Wirkungen stimmen überein. Das zeigt den ersten Punkt.

Um den zweiten Punkt zu zeigen, sei $N\in D^-(D_Z)$ und $P\to N$ eine projektive Auflösung. Dann gilt

$$F^+\circ G^+(N) = F^+(G^*P) = F^*(G^*P) = (G\circ F)^*P = (G\circ F)^+N$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus Lemma lem:invImProj 1.58 und der Tatsache das ein D_Y-Modul der ein projektiver O_X-Modul ist, F^+-injektiv ist. □

propTransfmod **Korollar 1.60.** *Sei $X=k^n, Y=k^m, Z=k^p$ und $F: X\to Y$ bzw. $Y\to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt:*

1. $D_{X\to Z}\simeq D_{X\to Y}\otimes_{D_Y} D_{Y\to Z}$
2. $Tor_j^{D_Y}(D_{X\to Y}, D_{Y\to Z}) = H^{-j}(D_{X\to Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\to Z}) = 0$ *für* $j\geq 1$.

Insbesondere gilt daher $D_{X\to Z}\simeq D_{X\to Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\to Z}$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Theorem thm:PropInvIm 1.59, es gilt

$$D_{X\to Z} = (G\circ F)^*(D_Z) = F^*(G^*(D_Z)) = F^*(D_{Y\to Z}) = D_{X\to Y}\otimes_{D_Y} D_{Y\to Z}$$

Wir beweisen die zweite Aussage. Da D_Z frei ist, ist D_Z insbesondere projektiv und damit ist $D_{Y\to Z} = G^+(D_Z)$ ein F^*-injektiver Modul. Also gilt

$$0 = H^{-j}F^+(D_{Y\to Z}) = H^{-j}(D_{X\to Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\to Z}) = Tor_j^{D_Y}(D_{X\to Y}, D_{Y\to Z})$$

□

Wir wollen jetzt zwei verschiedene Beispielklassen von Abbildungen studieren. Die erste sind Projektionen. Sei $p: X\times Y\to Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Es gilt $O_{X\times Y}\simeq O_X\otimes_k O_Y$. Betrachte den D_Y-Modul N als O_Y-Modul, dann gilt

$$p^*(N) = O_{X\times Y}\otimes_{O_Y} N = (O_X\otimes_k O_Y)\otimes_{O_Y} N = O_X\otimes_k N$$

Betrachten wir jetzt N als D_Y-Modul und $p^*(N)$ mit der dazugehörigen D_X-Modulstruktur. Es ist leicht zu sehen, dass unter dem obigen Isomorphismus ∂_{x_i} auf dem rechten Term $O_X\otimes_k N$ als Ableitung auf dem linken Faktor wirkt und ∂_{y_i} wirkt auf N. Somit gilt $p^*N\simeq O_X\boxtimes N$.

ppProjaffine **Proposition 1.61.** *Sei $X = k^n, Y = k^m$ und $p : X \times Y \to Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor.*

1. *p^* ist ein exakter Funktor von $M^L(D_Y)$ nach $M^L(D_{X\times Y})$ und somit gilt*
$$p^+N = p^*N = O_X \boxtimes N$$
2. *Falls N ein endlich erzeugter D_Y-Modul ist, dann ist p^*N ein endlich erzeugter $D_{X\times Y}$-Modul.*
3. *Es gilt $d(p^*(N)) = d(N) + n$ für jeden endlich erzeugten D_Y-Modul N. Insbesondere ist ein endlich erzeugter D_Y-Modul N genau dann holonom wenn $p^+(N)$ holonom ist.*

Wir betrachten jetzt ein zweites Beispiel. Sei $i : X \to X \times Y$ mit $i(x) = (x, 0)$ die kanonische Injektion. Dann gilt (beachte, dass $(y_1, \dots, y_m)D_Y$ ein Rechts-Ideal ist):

$$D_{X\to X\times Y} = i^*(D_{X\times Y}) = O_X \otimes_{O_{X\times Y}} (D_{X\times Y}) = O_X \otimes_{O_X \otimes_k O_Y} (D_X \boxtimes D_Y) = D_X \boxtimes D_Y/((y_1, \dots, y_m)D_Y$$

wobei D_X auf dem rechten Term $D_X \boxtimes D_Y/((y_1, \dots, y_m)D_Y$ von links auf dem linken Faktor operiert und $D_X \boxtimes D_Y$ von rechts operiert.

Wir betrachten jetzt den Fall $m = 1$ als $Y = k$. Wir haben folgende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow D_Y \xrightarrow{y_1\cdot} D_Y \longrightarrow D_Y/y_1D_Y \longrightarrow 0$$

wobei die linke Abbildung Links-Multiplikation mit y_1 ist und die rechte Abbildung die Quotientenabbildung ist. Indem wir mit D_X tensorieren erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow D_{X\times Y} \xrightarrow{y_1\cdot} D_{X\times Y} \longrightarrow D_{X\to X\times Y} \longrightarrow 0$$

von links D_X und rechts $D_{X\times Y}$-Moduln. Das heißt wir haben eine links Auflösung von $D_{X\to X\times Y}$ durch (links-D_X, rechts $D_{X\times Y}$)-Bimoduln konstruiert, die frei als rechts $D_{X\times Y}$-Moduln sind. Wir erhalten also

$$i^+(N) = D_{X\to X\times Y} \overset{L}{\otimes}_{D_{X\times Y}} N = (0 \to D_{X\times Y} \xrightarrow{y_1\cdot} D_{X\times Y} \to 0) \otimes_{D_{X\times Y}} N = (0 \to N \xrightarrow{y_1\cdot} N \to 0)$$

vImHypersurf **Lemma 1.62.** *Sei $Y = k$ und i die kanonische Injektion von X in $X \times Y$. Dann gilt für jeden $D_{X\times Y}$-Modul N*

$$H^{-k}i^+(N) = \begin{cases} Kokern(y_1\cdot) & \text{für } k = 0 \\ Ker(y_1\cdot) & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das heißt die links kohomologische Dimension von i^+ ist ≤ 1.

Im Fall $m = 2$ ist

$$0 \to D_{X\times Y} \xrightarrow{\binom{y_2\cdot}{-y_1\cdot}} D^2_{X\times Y} \xrightarrow{(y_1\cdot, y_2\cdot)} D_{X\times Y} \longrightarrow D_{X\to X\times Y} \to 0$$

eine Auflösung von $D_{X\to X\times Y}$. Im allgemeinen Fall liefert dann der Koszul-Komplex der kommutierenden Elemente y_i eine Auflösung von $D_{X\to X\times Y}$:

$$Kos((y_1\cdot, \dots, y_m\cdot), D_{X\times Y}) \longrightarrow D_{X\to X\times Y}$$

ndimInvImAff **Korollar 1.63.** *Sei $Y = k^m$ und $i : X \to X \times Y$ die kanonische Injektion. Dann ist für i^+ die links kohomologische Dimension $\leq \dim Y$.*

Sei jetzt $F : X \to X$ ein Isomorphismus von X und G der inverse Morphismus. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : O_X &\longrightarrow O_X \\ f &\mapsto f \circ F \end{aligned}$$

Die inverse Abbildung β von α ist dann durch $\beta(f) = f \circ G$ gegeben.

Ist M ein O_X-Modul, dann ist F^*M isomorph zu M als k-Vektorraum mit der Abbildung $\phi : m \mapsto 1 \otimes m$. Für $f \in O_X$ gilt

$$f\phi(m) = f \otimes m = f \circ G \circ F \otimes m = 1 \otimes (f \circ G)m = \phi(\beta(f)m)$$

d.h. der O_X-Modul $F^*(M)$ ist isomorph zu M mit O_X-Modulstruktur gegeben durch $(f, m) \mapsto \beta(f)m$.

Wir möchten jetzt eine anolge Beschreibung von $F^*(M)$ als D_X-Modul geben. Dafür müssen wir den Automorphismus β auf D_X ausdehnen. Ist $T \in D_X$, dann definieren wir $\widetilde{\beta}(T)(f) = \beta(T\alpha(f))$. Es ist klar, dass $\widetilde{\beta}(T)$ ein k-linear Endomorphismus von O_X ist und dass $T \mapsto \widetilde{\beta}(T)$ linear ist. Außerdem gilt für $T, S \in D_X$:

$$\widetilde{\beta}(TS)(f) = \beta(TS\alpha(f)) = \beta(T\alpha(\beta(S\alpha(f)))) = \beta(T\alpha(\widetilde{\beta}(S)(f))) = \widetilde{\beta}(T)(\widetilde{\beta}(S)(f))$$

für alle $f \in O_X$, d.h. $\widetilde{\beta}$ ist ein Homomorphismus der k-Algebra D_X nach $End_k(O_X)$. Für $g \in O_X \subset D_X$ gilt

$$\widetilde{\beta}(g)f = \beta g\alpha(f)) = \beta(g \cdot (f \circ F)) = (g \circ G) \cdot (f \circ F \circ G) = \beta(g)f$$

das heißt die Restriktion $\widetilde{\beta}$ auf O_X ist β. Das wiederum impliziert (siehe Abschnitt subsec:AlgDiff 1.2), dass $\beta(T) \in D_X$ für $T \in D_X$ gilt. Wir benutzen daher ab jetzt nur noch die Notation β.

Für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}\beta(\partial_i)(f) = \beta(\partial_i\alpha(f)) = \beta(\partial_i(f \circ F)) &= \beta\left(\sum_{j=1}^{n}((\partial_i f) \circ F)\partial_i F_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}((\partial_i F_j) \circ G)\partial_j f = \left(\sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i F_j)\partial_j\right)(f)\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt den Bi-Modul $D_{X\to X} = O_X \otimes_{O_X} D_X$ bezüglich der Abbildung F, d.h. für $f \in O_X, T \in D_X$ gilt $f \otimes T = 1 \otimes \beta(f)T$. Die Abbildung $\varphi : (f \otimes T) \to \beta(f)T$ identifiziert somit $D_{X\to X}$ mit D_X als k-Vektorraum. Die Rechts D_X-Modulstrukturen stimmen unter dieser Identifizierung über ein. Andererseits gilt

$$\varphi(\partial_i(1 \otimes T)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_i F_j \otimes \partial_j T\right) = \sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i F_j)\partial_j T = \beta(\partial_i)\varphi(1 \otimes T)\,.$$

Das heißt die Linksmultplikation von $D_{X\to X}$ mit $T \in D_X$ geht via φ über in Linksmultiplikation mit $\beta(T)$. Das bedeutet, dass $F^*(M)$ isomorph zu M mit der D_X-Modulstruktur $(T, m) \mapsto \beta(T)m$ ist.

propIsoInvIm **Proposition 1.64.** *1. Der Funktor $F^* : M^L(D_X) \to M^L(D_X)$ ist exakt.*

2. Der Funktor F^* bildet endlich erzeugte D_X-Moduln auf endlich erzeugte D_X-Moduln ab.

3. Ist M ein endlich erzeugter D_X-Modul, dann gilt $d(F^*M) = d(M)$

4. Der Funktor F^* bildet holonome Moduln auf holonome Moduln ab.

Beweis. Bis auf den dritten Punkt sind alle Aussagen klar. Die dritte Aussage folgt aber aus Proposition prop:AutDim 1.11. □

Wir wollen jetzt für endlich erzeugte D_X-Moduln M die charakteristische Varietät von $Ch(F^+M)$ genauer beschreiben. Der Automorphismus β von D_X induziert einen Automorphismus $Gr(\beta)$ von $GrD_X =$

$k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$. Dieser ist folgendermaßen gegeben

$$X_i \mapsto \beta(X_i) = G_i \qquad \text{und} \qquad \xi_i \mapsto \sum_{j=1}^{n} \beta(\partial_i F_j)\xi_j = \sum_{j=1}^{n} ((\partial_i F_j) \circ G)\xi_j$$

Betrachte den Pullback von Differentialformen auf X bzgl. der Abbildung F

$$(x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i) \mapsto (G(x), \sum_{i,j} \xi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j)$$

Wir definieren einen Isomorphismus γ von T^*X der durch den Pullback induziert wird

$$\begin{aligned} \gamma : T^*X &\longrightarrow T^*X \\ (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i) &\mapsto (G(x), \sum_{i,j} \xi_i (\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \circ G) dx_j) \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

Indem wir eine globale Trivialisierung des Kotangentialbündel benutzen

$$\begin{aligned} T^*X &\longrightarrow k^{2n} \\ (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i) &\mapsto (x, \xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

folgt, dass $Gr(\beta)(P) = P \circ \gamma$ gilt.

Lemma 1.65. *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul. Dann gilt*

$$Ch(F^*(M)) = \gamma(Ch(M))$$

Beweis. Wir versehen den endlich erzeugten D_X-Modul M mit einer guten Filtrierung $F_\bullet M$. Wir haben weiter oben gezeigt, dass F^+M isomorph zu M als k-Vektorraum ist. Die gute Filtrierung auf M induziert damit eine gute Filtrierung auf F^+M. Daraus folgt aber, dass GrM isomorph zu GrF^+M ist, wobei hier GrM mit der Modulstruktur $(Q, m) \mapsto Gr(\beta)(Q)m$, für $Q \in k[x, \xi] \in GrD_X, m \in M$, versehen ist. Das heißt Q ist im Annihilator von $GrF^+(M)$ enthalten genau dann wenn $Gr(\beta)(Q)$ im Annihilator von GrM enthalten ist oder anders ausgedrückt, wenn I der Annihilator von $GrF^+(M)$ dann ist $Gr(\beta)(I)$ der Annihilator von GrM. Das heißt $(x, \xi) \in Ch(F^+(M))$ genau dann wenn $\gamma^{-1}(x, \xi) \in Ch(M)$. □

Theorem 1.66. *Sei $X = k^n$, $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. Dann ist für F^+ die links kohomologische Dimension $\leq \dim(Y)$.*

Beweis. Um die Aussage zu beweisen, faktorisieren wir F über seinen Graphen. Betrachte die Einbettung $i : X \to Y \times Y$ mit $i(x) = (x, 0)$, den Isomorphismus $\Phi : X \times Y \to X \times Y$ mit $\Phi(x, y) = (x, y + F(x))$ und die Projektion $p : X \times Y \to Y$ mit $p(x, y) = y$. Dann gilt $F = p \circ \Phi \circ i$ und wegen Theorem 1.59 2. dann $F^+ = i^+ \circ \Phi^+ \circ p^+$. Da Φ^+ und p^+ exakt sind (siehe Proposition 1.61) folgt, dass $L^{-q}F^+ = L^{-q}i^+ \circ \phi^+ \circ i^+$. Die Aussage folgt dann aus Korollar 1.63. □

1.8 Direkte Bilder

Sei $X = k^n$, $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. Die Abbildung F induziert einen Ringhomomorphismus $\phi_F : O_Y \to O_X$. Dieser Homomorphismus definert einen Funktor F_* von der Kategorie der O_X-Moduln in die Kategorie der O_Y-Moduln. Für einen O_X-Modul M ist $F_*(M)$ isomorph zu M als k-Vektorraum und die O_Y Struktur ist gegeben durch $(f, m) \mapsto \phi_F(f) \cdot m$.

Ist M ein D_X-Modul, dann besitzt das direkte Bild $F_*(M)$ im Allgemeinen keine D_Y-Modul Struktur. Beachte z.b. die Inklusion $X = \{0\} \to Y = k$. Dann ist $D_X = O_X = k$ und $D_Y = D(1)$. Die Kategorie der D_X-Moduln ist dann äquivalent zur Kategorie der k-Vektorräume. Das direkte Bild eines endlich dimensionalen Vektorraums wäre dann selbst ein endlich dimensionaler Vektorraum und hätte daher Bernsteindimension 0, das steht aber im Widerspruch zu Theorem thm:affBernsteinineq 1.26. Das heißt, dass das direkte Bild für D-Moduln nicht kompatibel mit dem Vergißfunktor sein wird, wie im Fall des inversen Bildes.

Um das direkte Bild für links D-Moduln zu erklären, wenden wir auf sowohl auf die links D_X-Struktur als auch auf die rechts D_Y-Struktur des Transfer-Moduls $D_{X\to Y}$ die Transposition an und erhalten einen (links D_Y, rechts D_Y)-Bimodul $D_{Y\leftarrow X}$. Das erlaubt uns den rechtsexakten Funktor

$$F_\diamond(M) := D_{Y\leftarrow X} \otimes_{D_X} M$$

zu definieren. Der zugehörige derivierte Funktor

$$F_+(M) := D_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes} M$$

wird als **direktes Bild** von M bezeichnet.

oTransfmodRL **Lemma 1.67.** *Sei $X = k^n, Y = k^m, Z = k^p$ und $F : X \to Y$ bzw. $Y \to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt:*

1. $D_{Z\leftarrow X} \simeq D_{Z\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} D_{Y\leftarrow X}$
2. $Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, D_{Y\leftarrow X}) = H^{-j}(D_{Z\leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\leftarrow X}) = 0$ *für* $j \geq 1$.

Insbesondere gilt daher $D_{Z\leftarrow Y} \simeq D_{Z\leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\leftarrow X}$.

Beweis. Das folgt direkt aus Korollar kor:propTransfmod 1.60 indem man mittels Transposition die Rechts- bzw. Links-Strukturen vertauscht. □

n:fdiaAcyclc **Lemma 1.68.** *Sei P ein projektiver links D_X-Modul. Dann gilt*

$$Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, F_\diamond(P)) = 0$$

Beweis. Seien $(p_i)_{I\in I}$ Erzeuger von von P. Dann existiert eine surjektive D_X-lineare Abbildung $\phi : D_X^{(I)} \to P$, wobei $D_X^{(I)}$ ein freier D_X-Modul ist. Die universelle Eigenschaft von projektiven Objekten zeigt, dass P ein direkter Summand von $D_X^{(I)}$ ist, d.h. es existiert ein D_X-Modul Q mit $D_X^{(I)} = P \oplus Q$. Es gilt $F_\diamond(P) \oplus F_\diamond(Q) = F_\diamond(D_X^{(I)}) = D_{Y\leftarrow X}^{(I)}$ und somit

$$Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, P) \oplus Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, Q) = Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, D_{X\leftarrow Y}^{(I)}) = 0$$

□

Theorem 1.69. *Sei $X = k^n, Y = k^m, Z = k^p$ und $F : X \to Y$ bzw. $Y \to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt*

1. *Der direkte Bild Funktor $(G \circ F)_\diamond$ von $M^L(D_X)$ nach $M^L(D_Y)$ ist isomorph zu $G_\diamond \circ F_\diamond$.*
2. *Es gilt $(G \circ F)_+ = G_+ \circ F_+$.*

Beweis. Für jeden links D_X-Modul gilt

$$\begin{aligned}(G\circ F)_\diamond(M) &= D_{Z\leftarrow X}\otimes_{D_X} M = (D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y} D_{Y\leftarrow X})\otimes_{D_X} M\\ &= D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y}(D_{Y\leftarrow X}\otimes_{D_X} M)\\ &= D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y} F_\diamond(M)\\ &= G_\diamond(F_\diamond(M))\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus Lemma 1.68. Sei $P\to M$ eine projektive Auflösung:

$$\begin{aligned}G_+(F_+M) &\simeq G_+F_\diamond(P)\simeq D_{Z\leftarrow Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} F_\diamond(P)\simeq D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y} F_\diamond(P)\\ &\simeq G_\diamond F_\diamond(P)\simeq (G\circ F)_\diamond(P)\simeq (G\circ F)_+(M)\end{aligned}$$

□

Wir betrachten jetzt das Beispiel $i : X\to X\times Y$ mit $i(x) = (x,0)$ die kanonische Injektion. Es gilt

$$D_{X\to X\times Y} = i^*(D_{X\times Y}) = i^*(D_X\boxtimes D_Y) = D_X\boxtimes D_Y/((y_1,y_2,\dots,y_m)D_Y)$$

Durch vertauschen der Rechts-/Links-Struktur erhalten wir

$$D_{X\times Y\leftarrow Y} = D_X\boxtimes D_Y/(D_Y(y_1,y_2,\dots,y_m)) \tag{1.8.1}$$

Das zeigt

$$i_+(M)\simeq i_*(M) = M\boxtimes D_Y/(D_Y(y_1,y_2,\dots,y_m)) \tag{1.8.2}$$

Proposition 1.70. *Sei $i : X\to X\times Y$ die Injektion $i(x) = (x,0)$. Dann gilt*

1. *$i_\diamond$ ist ein exakter Funktor von $M^L(D_X)$ nach $M^L(D_{X\times Y})$*
2. *Ist M endlich erzeugt, dann ist auch $i_\diamond M$ endlich erzeugt*
3. *$d(i_\diamond M) = d(M)+m$ für jeden endlich erzeugten D_X-Modul M.*

Insbesondere ist M holonom genau dann wenn $i_\diamond(M)$ holonom ist.

Beweis. Der erste Punkt folgt aus Formel (1.8.2). Wie wir in Beispiel 1.43 gesehen haben, ist $\Delta_m = D_Y/(D_Y(y_1,y_2,\dots,y_m))$ ein irreduzibler holonomer D_Y-Modul. Aus Lemma 1.50 folgt dann die zweite Aussage. Die dritte Aussage folgt aus 1.51 und der Tatsache, dass Δ_m holonom ist. □

Wir studieren jetzt das direkte Bild einer Projektion $p : X\times Y\to Y$ mit $p(x,y) = y$. Betrachte den Fall $\dim X = 1$. Es gilt

$$D_{X\times Y\to Y} = p^*(D_Y) = D_X/D_X(\partial_1)\boxtimes D_Y$$

Nach vertauschen der Rechts-/Links-Struktur erhalten wir $D_{Y\leftarrow X\times Y} = D_X/((\partial_1)D_X)\boxtimes D_Y$. Wir haben eine kurze exakte Sequenz

$$0\longrightarrow D_{X\times Y}\xrightarrow{\partial_1\cdot} D_{X\times Y}\longrightarrow D_{Y\leftarrow X\times Y}\longrightarrow 0$$

von (links D_X, rechts $D_{X\times Y}$)-Moduln, wobei der zweite Pfeil Links-Multiplikation mit ∂_1 ist. Dies liefert eine links Auflösung von $D_{Y\leftarrow X\times Y}$ durch freie rechts $D_{X\times Y}$-Moduln, d.h. die Kohomologie des Komplexes

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\partial_1\cdot} M\longrightarrow 0$$

ist $H^\bullet(p_+M)$. Wir erhalten folgendes Resultat.

Lemma 1.71. *Sei $\dim X = 1$ und $p : X\times Y\to Y$ die Projektion. Dann gilt für jeden $D_{X\times Y}$-Modul M*

1. $H^0(p_+M) = coker(\partial_1)$
2. $H^{-1}(p_+M) = ker(\partial_1)$
3. $H^k(p_+M) = 0$ *für* $k \neq 0, -1$.

Im Fall $\dim X > 1$ ist eine Links-Auflösung von $D_{Y \leftarrow X \times Y}$ durch den Koszul-Komplex $Kos(D_{X\times Y}, (\partial_1 \cdot, \dots, \partial_n \cdot))$ gegeben. Wir erhalten folgendes Resultat.

Lemma 1.72. *Sei p die kanonische Projektion $p : X \times Y \to Y$. Dann ist die links kohomologische Dimension von $p_+ \leq \dim(X)$.*

Sei jetzt $F : X \to X$ ein Isomorphismus und G sein Inverses. Im letzten Kapitel haben wir die Automorphismen α und β von D_X definiert. Außerdem haben wir den Bi-Modul $D_{X\to X}$ (bzgl. F) mit dem Bi-Modul D_X identifiziert, wobei D_X mit der üblichen Rechts-multiplikation versehen war und die Links-Multiplikation durch $(T, P) \mapsto \beta(T)P$ gegeben war. Indem wir α auf D_X mit der gegebenen D-Modulstruktur anwenden, sehen wir, dass $D_{X\to X}$ isomorph zu D_X mit der üblichen Links-Modulstruktur ist und die Rechts-modulstruktur durch $(T, P) \mapsto P(\alpha(T)$ gegeben ist. Vetrauschen wir nun die Links- und Rechts-Modulstruktur, so sehen wir, dass $D_{X\leftarrow X}$ isomorph zu D_X mit der üblichen Rechts-Modulstruktur ist und die Links-Modulstruktur ist durch $(T, P) \mapsto \alpha(T)P$ gegeben.

Daraus folgt, dass für einen D_X-Modul M das direkte Bild $F_+(M)$ isomorph zu M ist mit der Links-Modulstruktur $(T, m) \mapsto \alpha(T)m$. Insbesondere gilt $F_+(M) \simeq G^+(M)$.

em:IsoDirIm **Lemma 1.73.** *1. Der Funktor $F_\diamond$ ist exakt.*

2. $F_\diamond$ bildet endlich erzeugte D_X-Moduln auf endlich erzeugte D_X-Moduln ab.

3. Ist M ein endlich erzeugter D_X-Modul, dann gilt $d(F_\diamond M) = d(M)$.

4. Der Funktor $F_\diamond$ bildet holonome Moduln auf holonome Moduln ab.

Theorem 1.74. *Sei $X = k^n$, $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. Dann ist die links kohomologische Dimension von $F_+ \leq dimX$.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem thm:cohDimInvIm 1.66. □

1.9 Kashiwaras Theorem

Sei $X = k^n$, $Y = \{x_n = 0\}$ und $Z = \{x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0\}$. Sei M ein D_X-Modul und definiere

$$\Gamma_{[Y]}(M) = \{m \in M \mid x_n^p m = 0 \text{ für ein } p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

n:locCohprop **Lemma 1.75.** *Sei M ein D_X-Modul. Dann gilt*

1. *$\Gamma_{[Y]}(M)$ ist ein D_X-Untermodul von M,*
2. *$\operatorname{supp}(\Gamma_{[Y]}(M)) \subset Y$,*
3. *ist N ein D_X-Untermodul von M mit $supp(N) \subset Y$, dann gilt $N \subset \Gamma_{[Y]}(M)$.*

Beweis. 1.) Sei $m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Dann gilt für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n-1$, dass $x_i m \in \Gamma_{[Y]}(M)$ und $\partial_j m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\partial_n m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Sei $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben, s.d. $x_n^p m = 0$. Dann gilt

$$x_n^{p+1}\partial_n m = [x_n^{p+1}, \partial_n]m + \partial_n x_n^{p+1} m = -(p+1)x_n^p m + \partial_n x_n^{p+1} m = 0$$

2.) Für $x \notin Y$ gilt $x_n \notin \mathfrak{m}_x$ und daher $\Gamma_{[Y]}(M)_x = 0$.
3.) Sei N ein D_X-Untermodul von M mit $\mathrm{supp}(N) \subset Y$. Sei $m \in N$ und N' der O_X-Untermodul, der durch m erzeugt wird. Es gilt $\mathrm{supp}(N') \subset Y$. Da N' endlich erzeugt ist, gilt wegen Proposition prop:suppMisVI A.21, dass der Support von N' gleich der Verschwindungsmenge von $Ann(N')$ ist. Aus dem Nullstellensatz folgt $r(Ann(N')) \supset (x_n)$. Das zeigt, dass ein $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existiert, s.d. x_n^p den Modul N' annihiliert. Insbesondere gilt $m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. □

Das obige Lemma zeigt, dass $\Gamma_{[Y]}(M)$ der größte D_X-Untermodul von M ist, der Träger auf Y hat.

Die Multiplikation mit x_n definiert einen Endomorphismus auf M. Sei

$$M_0 = \mathrm{Ker} x_n \subset \Gamma_{[Y]} M \qquad \text{bzw.} \qquad M_1 = \mathrm{Kokern}\, x_n = M/x_n M\,.$$

In Lemma lem:invImHypersurf 1.62 haben wir gezeigt, dass $H^{-1}i^+M = M_0$ und $H^0 i^+ M = M_1$ gilt.

Betrachte die Abbildung $D_X \otimes_{D_Y} M_0 \to M$. Dieser Morphismus verschwindet auf dem Bild von $D_X x_n \otimes_{D_Y} M_0$ in $D_X \otimes_{D_Y} M_0$, aufgrund der Definition von M_0. Wie wir in Formel (eq:transMod 1.8.1) gesehen haben, gilt

$$D_{X\leftarrow Y} = D_Y \boxtimes D_Z / D_Z x_n = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \partial_n^j D_Y \tag{1.9.1}$$ eq:transModd

Wir erhalten somit einen D_X-linearen Morphismus

$$i_+ M_0 = D_{X\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} M_0 \longrightarrow M$$

Wegen dem ersten Gleichheitszeichen in (eq:transModdim1 1.9.1) ist sein Bild in $\Gamma_{[Y]}(M)$ enthalten. Man kann außerdem leicht zeigen, dass $i_+ \circ H^{-1} i^+ \to \Gamma_{[Y]}$ eine natürliche Transformation von Funktoren ist.

dirImlocCoh **Lemma 1.76.** *Der Morphismus $i_+(M_0) \longrightarrow \Gamma_{[Y]}(M)$ ist eine Isomorphismus von D_X-Moduln.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass der Morphismus surjektiv ist. Es gilt

$$\{m \in M \mid x_n^p m = 0\} \subset D_X \cdot M_0$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Für $p = 0, 1$ ist das klar. Ist $p > 1$ und $x_n^p m = 0$ dann gilt

$$0 = \partial_n (x_n^p m) = x_n^{p-1}(pm + x_n \partial_n m)$$

Per Induktion können wir annehmen, dass sowohl $pm + x_n\partial_n m$ als auch $x_n m$ in $D_X \cdot M_0$ liegen. Das zeigt

$$(p-1)m = pm + [x_n, \partial_n]m = pm + x_n\partial_n m - \partial_n x_n m \in D_X \cdot M_0$$

und somit auch $m \in D_X \cdot M_0$. Also ist die Abbildung surjektiv.

Wir beweisen jetzt die Injektivität. Weiter oben haben wir gezeigt, dass

$$i_+(M_0) = D_{X\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} M_0 = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \partial_n^j M_0$$

Sei $0 \neq (m_0, \partial_n m_1, \ldots, \partial_n^q m_q)$ ein Element dieser direkten Summe, dass auf 0 in M abgebildet wird, d.h.

$$m_0 + \partial_n m_1 + \ldots + \partial_n^q m_q = 0$$

Wir wählen ein solches Element mit minimalem q. Dann gilt

$$0 = x_n \left(\sum_{j=0}^{q} \partial_n^j m_j \right) = \sum_{j=1}^{q} [x_n, \partial_n^j] m_j = -\sum_{j=1}^{q} j \partial_n^{j-1} m_j$$

Das ist aber nicht möglich, aufgrund der Wahl von q. Somit ist der Morphismus auch injektiv. □

Korollar 1.77. *Es gilt*

$$x_n \Gamma_{[Y]}(M) = \Gamma_{[Y]}(M)$$

Beweis. Wie wir in Lemma (1.76) gesehen haben, hat jedes Element von $\Gamma_{[Y]}(M)$ die Gestalt $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \partial_n^j m_j$ wobei $m_j \in M_0$ gilt. Es gilt aber andererseits:

$$x_n \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{1}{j+1} \partial_n^{j+1} m_j = - \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \partial_n^j m_j$$

□

Korollar 1.78. *Sei M ein D_X-Modul. Dann gilt*

1. $\Gamma_{[Y]}(M)$ *ist ein endlich erzeugter D_X-Modul genau dann wenn M_0 ein endlich erzeugter D_Y-Modul ist;*

2. $d(\Gamma_{[X]}(M)) = d(M_0) + 1$.

Insbesondere ist $\Gamma_{[Y]}(M)$ holonom genau dann wenn $H^{-1} i^+(M) = M_0$ holonom ist.

Beweis. 1.) Aus Lemma 1.76 und Proposition 1.70 folgt, dass $\Gamma_{[Y]}(M)$ endlich erzeugt ist, wenn M_0 endlich erzeugt ist. Um die Rückrichtung zu beweisen, nehmen wir an, dass $\Gamma_{[Y]}(M)$ ein endlich erzeugter D_X-Modul ist. Sei N_j eine aufsteigende Folge von D_Y-Untermodul von M_0. Diese erzeugen eine aufsteigende Folge von D_X-Untermoduln $i_+(N_j) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \partial_n^p N_j$ in $\Gamma_{[Y]}(M)$. Da $\Gamma_{[Y]}(M)$ ein endlich erzeugter D_X-Modul ist, wird die aufsteigende Folge $i_+(N_j)$ irgendwann stabil. Wir beachten jetzt, dass N_j der Kern von x_n in $i_+(N_j)$ ist und damit die Folge N_j auch stabil wird. Also ist M_0 auch endlich erzeugt.

2.) Die Aussage folgt direkt aus Lemma 1.76 und Proposition 1.70. □

Korollar 1.79. *Sei M ein holonomer D_X-Modul. Dann ist M_0 ein holonomer D_Y-Modul.*

Beweis. Ist M holonom, dann ist auch $\Gamma_{[Y]}(M)$ holonom. Die Aussage folgt dann aus Korollar 1.78. □

Sei $M_Y(D_X)$ die volle Unterkategorie von $M(D_X)$ bestehend aus D_X-Moduln mit Träger in Y. Die entsprechenden Unterkategorien von endlich erzeugten bzw. holonomen D_X-Moduln mit Träger in Y bezeichnen wir mit $M_{fg,Y}(D_X)$ bzw. $Hol_Y(D_X)$.

Theorem 1.80 (Kashiwara)**.** *Der direkte Bild Funktor i_+ liefert einen Kategorienäquivalenz zwischen $M(D_Y)$ (bzw. $M_{fg}(D_Y)$, $Hol(D_Y)$ und der Kategorie $M_Y(D_X)$ (bzw. $M_{fg,Y}(D_X)$, $Hol_Y(D_X)$).*

Beweis. Für D_X-Moduln mit Träger in Y gilt wegen Lemma 1.75 das $\Gamma_{[Y]}(M) = M$. Wegen Lemma 1.62 und Korollar 1.77 folgt $H^0(i^+M) = 0$ und daher ist $H^{-1}(i^+M)$ ein exakter Funktor. Andererseits ist i_+ auch ein exakter Funktor und die Kompositionen $i_+ \circ H^{-1} i_+$ und $H^{-1} i^+ \circ i_+$ sind isomorph zum Identitätsfuntor. Die Behauptung für endlich erzeugte bzw. holonome Moduln folgt aus Korollar 1.78. □

1.10 Direkte und inverse Bilder von holonomen Moduln

Sei $X = k^n$ und $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. In diesem Kapitel möchten wir das Verhalten von holonomen D-Moduln unter dem direkten und inversen Bild analysieren. Wir benutzen dazu die Graph-Konstruktion um das Problem auf spezielle Abbildungen zu reduzieren. Betrachte:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X \times Y \arrow[r, "\Phi"] & X \times Y \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

wobei $i(x) = (x, 0)$, $p(x, y) = y$ und $\Phi(x, y) = (x, y + F(x))$. Proposition 1.61 zeigt, dass p^+ exakt ist und holonome Moduln auf holonome Moduln abbildet. Aus Proposition 1.70 folgt, dass i_+ exakt ist und holonome Moduln auf Holonome Moduln abbildet. Wegen Proposition 1.64 und Lemma 1.73 ist Φ_+ und Φ^+ exakt und bildet holonome Moduln auf holonome Moduln ab.

Wir brauchen also nur noch die derivierten Funktoren i^+ und p_+ zu untersuchen. Wir bezeichnen mit $D_h^-(D_X)$ die volle triangulierte Unterkategorie von $D^-(D_X)$ von Komplexen mit holonomer Kohomologie.

Lemma 1.81. *Sei $N \in D_h^-(D_{X\times Y})$, dann ist $i^+N \in D_h^-(D_X)$.*

Beweis. Wegen Theorem 1.59 reicht es den Fall $\dim Y = 1$ zu studieren. Sei jetzt $N \in D_h^-(D_{X\times Y})$ ein Komplex mit $H^kN = 0$ für $k \notin [-p, 0]$. Wir beweisen das Lemma über Induktion nach p. Wir beachten zuerst, dass N quasi-isomorph zu einem Komplex ist mit $N_k = 0$ für $k \notin [-p, 0]$. Wir können daher oBdA annehmen, dass N selbst diese EIgenschaft erfüllt. Sei also

$$N = \left(0 \longrightarrow N_{-p} \xrightarrow{d_{-p}} N_{-p+1} \xrightarrow{d_{-p+1}} \ldots \longrightarrow N_0 \longrightarrow 0\right)$$

und

$$\tau_{\geq -p+1}N = (0 \longrightarrow \operatorname{coker} d_{-p} \longrightarrow N_{-p+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow N_0 \longrightarrow 0)$$

bzw.

$$\tau_{\leq -p}N = (0 \longrightarrow \ker d_{-p} \longrightarrow 0)$$

Wir erhalten ein Dreieck

$$\tau_{\leq -p}N \longrightarrow N \longrightarrow \tau_{\geq -p+1}N \xrightarrow{+1}$$

Wir wenden i^+ auf dieses Dreieck an. Per Induktionsannahme hat sowohl $i^+\tau_{\geq -p+1}N$ als auch $i^+\tau_{\leq -p}N$ holonome Kohomologie. Aus der zugehörigen lange exakte Kohomologiesequenz und Theorem 1.40 folgt, dass auch $i^+N \in D_h^-(D_X)$. Es reicht also das Lemma für den Fall eines holonomen Moduls zu beweisen. Wir bezeichnen mit y die Koordinate auf Y. Wir haben gesehen, dass i^+N durch den Komplex $N \xrightarrow{y\cdot} N$ repräsentiert wird, d.h. $H^0(i^+N) = \operatorname{coker}(y\cdot)$ und $H^{-1}(i^+N) = \ker(y\cdot)$ und alle anderen Kohomologien sind 0. Aus Korollar 1.79 folgt, dass $H^{-1}i^+(M)$ holonom ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $H^0(i^+N) = i^*N$ holonom ist.

Setze $\overline{N} = N/\Gamma_{[X]}(N)$ und betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_{[X]}(N) \longrightarrow N \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0$$

Da i^* rechts exakt ist, erhalten wir die exakte Sequenz

$$i^*(\Gamma_{[X]}(N)) \longrightarrow i^*(N) \longrightarrow i^*(\overline{N}) \longrightarrow 0$$

Andererseits gilt wegen Korollar 1.77, dass $i^*\Gamma_{[X]}(N) = \operatorname{coker}(y\cdot) = 0$, d.h. $i^*(N) \to i^*(\overline{N})$ ist ein Isomorphismus. Sei $\overline{v} \in \Gamma_{[X]}(\overline{N}) \subset \overline{N}$ und sei $v \in N$ ein Repräsentant von v. Dann gilt $y^p\overline{v} = 0$ für genügend große $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Das heißt aber, dass $y^pv \in \Gamma_{[X]}(N)$ und daher gilt $y^{p+q}v = 0$ für genügend große $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Also gilt schon $v \in \Gamma_{[X]}(N)$ und damit ist $\overline{v} = 0$. Wir haben also $\Gamma_{[X]}(\overline{N}) = 0$ gezeigt. Wegen $i^*(N) = i^*(\overline{N}$, reicht es also die Aussage für holonome Moduln N mit $\Gamma_{[X]}(N) = 0$ zu beweisen. Das bedeutet insbesondere, dass die Multiplikation mit y injektiv ist und N in seine Lokalisierung N_y einbettet. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N_y \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Da N holonom ist, folgt aus Proposition 1.46, dass auch N_y holonom ist und damit ist auch L holonom. Insbesondere ist auch $H^{-1}i^+(L)$ holonom. Wir wenden auf die kurze exakte Sequenz den Funktor i^+ an un erhalten

$$\ldots \longrightarrow H^{-1}i^+(N_y) \longrightarrow H^{-1}i^+(L) \longrightarrow i^*N \longrightarrow i^*N_y \longrightarrow i^*L \longrightarrow 0$$

Da die Multiplikation mit y auf N_y invertierbar ist gilt $i^+(N_y) = 0$, d.h. $i^*(N) = H^{-1}i^+L$, d.h. $i^*(N)$ ist selbst holonom. $\square$

Wegen Theorem 1.59 gilt dann folgende Aussage.

Theorem 1.82. *Sei $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung und $M \in D_h^-(D_Y)$, dann ist $F^+(M) \in D_h^-(D_X)$.*

Lemma 1.83. *Sei $p : X \times Y \to Y$ die Projektion und $M \in D_h^-(D_{X\times Y})$, dann ist $p_+M \in D_h^-(D_Y)$.*

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 1.81 können wir den Beweis auf den Fall $\dim X = 1$ sowie eines einzelnen holonomen D-Moduls reduzieren. In diesem Fall ist $p_+(M)$ durch $M \xrightarrow{\partial\cdot} M$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $\ker(\partial)$ und $\mathrm{koker}(\partial)$ holonom sind. Indem wir die Fourier-Transformation anwenden, erhalten wir einen Komplex

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{F}(M) \xrightarrow{x\cdot} \mathcal{F}(\mathcal{M}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Dieser Komplex berechnet das inverse Bild von $\mathcal{F}(M)$ bezüglich der Inklusion $i : Y \to X \times Y$ mit $i(y) = (0, y)$. Aufgrund von Lemma 1.81 sind die Moduln $\ker(x)$ und $\mathrm{Koker}(x)$ holonom und nach Proposition 1.42 sind somit auch $\ker(\partial)$ und $\mathrm{koker}(\partial)$ holonom. □

Indem wir eine belibige Abbidlung als Komposition einer Einbettung, eines Isomorphismus und einer Projektion schreiben, erhalten wir folgende Aussage.

Theorem 1.84. *Sei $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung und $M \in D_h^-(D_X)$, dann ist $F_+M \in D_h^-(D_Y)$.*

Bemerkung 1.85. *Die anaologe Aussage für endlich erzeugte Moduln ist falsch. Sei $X = \{0\}$ und $Y = k$ und $i : X \to Y$ bzw. $p : Y \to X$ die Inklusion bzw. Projektion, dann ist $i^+(D_Y) \simeq \mathbb{C}[\partial]$ bzw. $p_+(D_Y) \simeq \mathbb{C}[y]$ welches beide keine endlich dimensionalen k-Vektorräume sind.*

2 Garben von Differentialoperatoren auf glatten algebraischen Varietäten

2.1 Differentialoperatoren auf algebraischen Varietäten

Sei X eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe auf X und mit $O_X = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ deren globale Schnitte. Dann ist O_X eine kommutative k-Algebra und wir können nach Kapitel 1.2 den Ring D_X der k-linearen Differentialoperatoren auf O_X definieren. Die Ordnung der Differentialoperatoren definiert eine aufsteigende Filtrierung $(F_pD_X; p \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$, die die Eigenschaften 1. bis 5. aus Kapitel 1.1 erfüllt. Wie wir in Kapitel 1.2 gesehen haben, ist im Fall $X = k^n$ der Ring D_X die Weyl-Algebra $D(n)$.

Da X affin ist können wir es als abgeschlossene Teilmenge eines k^n darstellen. Sei $I(X) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ das entsprechende Verschwindungsideal und $p : k[x_1, \ldots, x_n] \to O_X \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ der Quotientenmorphismus. Definiere

$$A := \{T \in D(n) \mid T(I(X)) \subset I(X)\}$$

Man sieht leicht, dass A eine Unteralgebra von $D(n)$ ist. Insbesondere ist A versehen mit der Ordnungsfiltration ein gefilterter Ring. Sei jetzt $T \in A$, dann induziert T einen k-linearen Endomorphismus $\phi(T)$ von $O_X = k[x_1, \ldots, x_n]/(I(X))$. Somit liefert ϕ einen Homomorphismus von A in den Ring aller k-linearen Endomorphismen von O_X.

Da $k[x_1, \ldots, x_n]$ eine Unterring von A ist, erhalten wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
k[x_1, \ldots, x_n] \arrow[r, "r"] \arrow[d] & O_X \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{End}_k(O_X)
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist für jedes Polynom $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ der Endomorphismus $\phi(P)$ gegeben durch Multiplikation mit $r(P)$. Sei $T \in A \cap F_pD(n)$ und $f_0, f_1, \ldots, f_p$ ein Tupel von Elementen aus O_X. Wähle Repräsentaten P_i von f_i für $i = 0, \ldots, p$, dann gilt

$$[[\ldots[[\phi(T), f_0], f_1] \ldots, f_{p-1}], f_p] = \phi([[\ldots[[T, P_0], P_1] \ldots, P_{p-1}], P_p]) = 0 \tag{2.1.1}$$ eq:phiTDiffo

Das heißt $\phi(T)$ ist ein Differentialoperator der Ordnung $\leq p$ auf X. Insbesondere ist damit $\phi : A \to D_X$ ein filtrierter Ringhomomorphismus.

Wir definieren folgendes zweiseitige Ideal von A

$$J(X) = \{T \in D(n) \mid T(k[x_1, x_2, \ldots, x_n]) \subset I(X)\}$$

Man sieht leicht, dass $J(X)$ im Kern von ϕ liegt.

Lemma 2.1. *Sei $T \in D(n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $T \in J(X)$;
2. $T = \sum P_I \partial^I$ *mit* $P_I \in I(X)$.

Beweis. Die Richtung 2. $\Rightarrow$ 1. ist klar. Sei also $T \in J(X)$. Daraus folgt sofort $P_0 = T(1) \in I(X)$. Wir nehmen per Induktion an, dass $P_I \in I(X)$ für $|I| < m$. Dann ist $T' = \sum_{|I|<m} P_I \partial^I \in J(X)$ und damit auch $T'' = T - T' \in J(X)$. Andererseits gilt für jedes $J \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $|J| = m$, dass

$$T''(X^J) = \left(\sum_{|I| \geq m} P_I \partial^I \right) (X^J) = J!P_J \in I(X)$$

Damit folgt die Aussage. □

Wir bezeichnen mit D den Quotienten Ring $A/J(X)$. Die Ordnungsfiltration auf A induziert eine Filtration $(F_pD; p \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$. Da $J(X)$ im Kern von ϕ liegt, erhalten wir einen gefilterten Homomorphismus $\Phi : D \to D_X$.

prop:comDX **Proposition 2.2.** *Der Morphismus $\Phi : D \to D_X$ ist ein Isomorphismus von gefilterten Ringen.*

Wir zeigen zuerst, dass Φ injektiv ist. Sei $T \in A$, s.d. $\phi(T) = 0$ gilt. Das bedeutet, dass $\phi(T)(P+I(X)) = T(P) + I(X) \subseteq I(X)$, d.h. $T(P) \in I(X)$ für jedes $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Also gilt $T \in J(X)$ und daher ist Φ injektiv.

Um die Surjektivität zu zeigen, benötigen wir noch folgendes Lemma.

rspecDiffop **Lemma 2.3.** *Sei $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $P_I \in k[x_1, \ldots, x_n], I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, |I| \leq p$. Dann existiert ein Differentialoperator $T \in D(n)$ mit Ordnung $\leq p$, s.d. $T(X^I) = P_I$ für alle $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $|I| \leq p$.*

Beweis. Die Aussage ist für $p = 0$ trivialerweise wahr. Sei jetzt $p > 0$ und nehme per Induktion an, dass die Aussage für $p-1$ wahr ist. Wegen der Induktionsannahme existiert ein Differentialoperator T' mit der Ordnung $\leq p-1$, s.d. $T'(X^I) = P_I$ für alle $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $|I| \leq p-1$ gilt. Sei $Q_I := T'(X^I) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ für $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ und $|I| = p$. Für $|J| = p$ und $|I| \leq p-1$ wird X^I offensichtlich von ∂^J annihiliert und es gilt $\partial^J(X^I) = I!\, \delta_{IJ}$ für $|I| = |J| = p$. Daraus folgt, dass $T'' = \sum_{|J|=p} \frac{P_J - Q_J}{J!} \partial^J$ alle X^I mit $|I| \leq p-1$ annihiliert und

$$T''(X^I) = \left(\sum_{|J|=p} \frac{P_J - Q_J}{J!} \partial^J \right) (X^I) = P_I - Q_I$$

für jedes $I \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}$ mit $|I| = p$ gilt. Insbesondere gilt dann $(T' + T'')(X^I) = P_I$ für $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ und $|I| \leq p$. $\square$

Wir behaupten jetzt, dass für jedes $T \in F_p D_X$ und jedes $S \in D(n)$ mit Ordnung $\leq p$ folgendes gilt: Aus $T(r(X^I)) = r(S(X^I))$ für alle $I \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}$ mit $|I| \leq p$ folgt $T \circ r = r \circ S$. Für $p = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $p > 0$. Für $1 \leq j \leq n$ gilt

$$[T, r(x_j)](r(x^I)) = Tr(x_j x^I) - r(x_j)T(r(x^I)) = r(S(x_j x^I) - r(x_j)S(x^I) = r([S, x_j](x^I))$$

für alle $I \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}$ mit $|I| \leq p-1$. Da die Ordnungen von $[T, r(x_j)]$ und $[S, x_j]$ kleiner gleich $p-1$ sind, gilt nach Induktionsannahme $[T, r(x_j)] \circ r = r \circ [S, x_j]$. Insbesondere gilt für $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} T(r(x_j x^I)) &= [T, r(x_j)]r(x^I) + r(x_j)T(r(x^I)) = r([S, x_j](x^I)) + r(x_j)T(r(x^I)) \\ &= r(S(x_j x^I)) + r(x_j)\underbrace{\big(T(r(x^I)) - r(S(x^I))\big)}_{=0} \end{aligned}$$

wobei der letzte Term per Induktion nach $|I|$ verschwindet. Es gilt also $T(r(x^I)) = r(S(x^I))$ für alle $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Das zeigt die Behauptung.

Sei jetzt $T \in D_X$ mit Ordnung $\leq p$. Wähle $P_I \in k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ und $|I| \leq p$, s.d. $T(r(x^I)) = r(P^I)$ für alle $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $|I| \leq p$ gilt. Wegen Lemma lem:constrspecDiffop 2.3 existiert ein Differentialoperator $S \in D(n)$ mit Ordnung $\leq p$, s.d. $S(x^I) = P_I$ für alle $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $|I| \leq p$ gilt. Das zeigt $T(r(x^I)) = r(S(x^I))$ für $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $|I| \leq p$. Aus der Behauptung zuvor folgt dann $T \circ r = r \circ S$. Insbesondere gilt $r(S(I(X))) = T(r(I(X))) = 0$ und somit $S \in A$. Es gilt $\phi(S) = T$ und damit ist Φ surjektiv.

kor:Fpfinite **Korollar 2.4.** *Sei X eine affine algebraische Varietät. Dann ist $F_p D_X$ ein endlich erzeugter O_X-Modul für die Links- bzw. Rechts-Multiplikation.*

Beweis. Wir betrachten X als abgeschlossene Teilmenge von k^n. Wegen Theorem thm:compGrD 1.18 gilt die Aussage für $X = k^n$. Da $k[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch ist, ist $A \cap F_p D(n)$ ein endlich erzeugter $k[x_1, \ldots x_n]$-Modul für die Rechts- bzw. Links-Multiplikation und damit ist $F_p D = F_p A / J(X)$ ein endlich erzeugter O_X-Modul für die Rechts- bzw. Links-Multiplikation. Die Aussage folgt dann aus Proposition prop:comDX 2.2. $\square$

Sei $f \in O_X$ und $f \neq 0$. Dann ist $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ eine Zariski offene Teilmenge von X und selbst eine affine Varietät. Es gilt $O_{X_f} = (O_X)_f$. Wir bezeichnen mit $r_f : O_X \to O_{X_f}$ die Einschränkunsgabbildung.

esPropDiffop **Proposition 2.5.** *Sei $T \in F_p D_X$, dann existiert ein eindeutiger Differentialoperator $\overline{T} \in D_{X_f}$, s.d. dass folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} O_X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "r_f"'] & O_X \arrow[d, "r_f"] \\ O_{X_f} \arrow[r, "\overline{T}"] & O_{X_f} \end{tikzcd}$$

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit von $\overline{T}$. Dafür reicht es folgendes Lemma zu zeigen:

Lemma 2.6. *Sei $S \in D_{X_f}$, s.d. $S(g) = 0$ für alle $g \in r_f(O_X)$ gilt, dann ist $S = 0$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach der Ordnung p von S. Ist $p = 0$ dann gilt $S \in O_{X_f}$ und daraus folgt sofort $S = 0$. Wir nehmen jetzt $p > 0$ an. Dann ist $S' = [S, f] \in F_{p-1}D_{X_f}$ und S' annihiliert $r_f(O_X)$. Wegen der Induktionsannahme gilt dann $S' = 0$, d.h. S kommutiert mit f. Sei $h \in O_{X_f}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $f^n h \in r_f(O_X)$. Das zeigt $f^n S(h) = S(f^n h) = 0$. Da O_{X_f} nullteilerfei ist, folgt $S(h) = 0$ und damit $S = 0$. □

Wir müssen somit nur noch die Existenz von $\overline{T}$ zeigen. Wir behandeln zuerst den Fall $X = k^n$. Da $D(n)$ als k-Algebra von x_i und ∂_i erzeugt wird, reicht es die Existenz von $\overline{T}$ im Fall von $T = \partial_i$ zu zeigen. Die Derivationen ∂_i können auf eindeutige Weise auf den Funktionenkörper $k(x_1, \ldots, x_n)$ erweitert werden und erfüllen

$$\partial_i\left(\frac{g}{f^m}\right) = \frac{\partial_i(g)f - mg\partial_i(f)}{f^{m+1}}$$

für jedes $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ und $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Das heißt, die ∂_i induzieren Derivationen auf $k[x_1, \ldots, x_n]_f$. Das beweist die Aussage im Fall $X = k^n$.

Im allgemeinen Fall können wir annehmen, dass X eine abgeschlossene Teilmenge eines k^n ist. Sei $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Urbild von $f \in O_X$ und $U \subset k^n$ das Komplement der Verschwindungsmenge von P. Dann gilt $X \cap U = X_f$. Aufgrund von Proposition prop:comDX 2.2 existiert ein $S \in A \cap F_p D(n)$ mit $\phi(S) = T$. Dieser Differentialoperator induziert einen Differentialoperator $\overline{S}$ mit der Ordnung $\leq p$ auf U. Es gilt

Lemma 2.7. *Sei $S \in A$, dann bildet $\overline{S}$ das Ideal $I(X)_P$ in sich selbst ab.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach der Ordnung p von S. Ist $p = 0$, dann ist die Aussage trivial. Nehme $p > 0$ an und definieren $S' = [S, P] \in A$ mit Ordnung $\leq p - 1$. Wegen der Induktionsannahme bildet S' das Ideal $I(X)_P$ auf sich selbst ab. Sei $Q \in I(X)$, dann gilt

$$\overline{S}\left(\frac{Q}{P^m}\right) = \overline{S}'\left(\frac{Q}{P^{m+1}}\right) + P\overline{S}\left(\frac{Q}{P^{m+1}}\right)$$

Die Induktionsannahme besagt, dass

$$\overline{S}\left(\frac{Q}{P^{m+1}}\right) - P^{-1}\overline{S}\left(\frac{Q}{P^m}\right) \in I(X)_P$$

gilt. Da $\overline{S}Q \in I(X)_P$ gilt, folgt per Induktion nach m, dass auch $\overline{S}\left(\frac{Q}{P^m}\right) \in I(X)_P$ für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. □

Das Lemma zeigt, dass $\overline{S}$ einen k-linearen Endomorphismus von $k[x_1, \ldots, x_n]_P / I(X)_P = (O_X)_f = O_{X_f}$ induziert. Dass $\overline{S}$ ein Differentialoperator vom Grad $\leq p$ ist zeigt man genauso wie im Beweis, dass $\phi(T)$ ein Differentaloperator ist (siehe (eq:phiTDiffop 2.1.1)). Auf $r_f(O_X)$ stimmt dieser Differentialoperator mit T überein, d.h wir haben $\overline{T}$ konstruiert. Dies zeigt Proposition prop:resPropDiffop 2.5.

In Proposition prop:resPropDiffop 2.5 haben wir eine wohldefinierte Restriktionsabbildung $\rho_f : D_X \to D_{X_f}$ konstruiert. Aus der Eindeutigkeit dieser Abbildung folgt, dass ρ_f ein Ringhomomorphismus ist. Wir erhalten somit folgende Aussage:

Proposition 2.8. *Die Abbildung $\rho_f : D_X \to D_{X_f}$ ist ein Morphismus von gefilterten Ringen.*

Insbesondere ist ρ_f ein Morphismus von O_X-Moduln für die Links- bzw. Rechts-Multiplikation.

lem:locExD **Lemma 2.9.** *Sei $(D_X)_f$ die Lokalisierung von D_X als O_X-Modul bzgl. der Links-Multiplikation. Dann induziert der Morphismus ρ_f einen Isomorphismus β_f von $(D_X)_f$ auf D_{X_f}.*

Beweis. Für $T \in D_X$ definieren wir β_f durch $\beta_f(\frac{T}{f^m}) = \frac{\overline{T}}{f^m}$. Falls $\beta_f(\frac{T}{f^m}) = 0$ gilt, dann existiert für jedes $g \in O_X$ ein $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $f^s T(g) = 0$. Das bedeutet $T(g) = 0$ für alle $g \in O_X$, also $T = 0$ und damit ist β_f injektiv.

Um zu beweisen, dass β_f surjektiv ist, reicht es zu zeigen, dass für jedes $T \in D_{X_f}$ ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existiert, s.d. $(f^m T)(r_f(O_X)) \subset r_f(O_X)$ gilt. Wir beweisen dies per Induktion nach der Ordnung von p. Für $p = 0$ folgt dies aus $O_{X_f} = (O_X)_f$. Sei also $p > 0$ und seien $g_1, \ldots, g_n$ Erzeuger der k-Algebra O_X. Wegen der Induktionsannahme existiert ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. sowohl $f^m[T, g_i](r_f(O_X)) \subset r_f(O_X)$ für alle $1 \leq i \leq n$ als auch $f^m T(1) \in r_f(O_X)$. Falls nun $h \in O_X$ und $f^m T(h) \in r_f(O_X)$ gilt, dann gilt auch

$$f^m T(g_i h) = f^m[T, g_i](h) + f^m g_i T(h) \in r_f(O_X)\,.$$

Da auch $f^m T(1) \in r_f(O_X)$ gilt, liefert eine Induktion nach der Länge der Monome $g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n}$, dass auch $f^m T(r_f(O_X)) \subset r_f(O_X)$ gilt. Das zeigt, dass β_f auch surjektiv ist. □

Sei U offen in X und bezeichne mit $\mathcal{P}(U)$ die partiell geordnete Familie der offenen Mengen X_f mit $X_f \subset U$. Für $V, W \in \mathcal{P}_U$ mit $V \subset W$ existiert ein Ringhomomorphismus $r_V^W : D_W \to D_V$. Das heißt (D_V, r_V^W) ist ein projektives System von Ringen. Wir bezeichnen mit D_U den projektiven Limes. Dann ist $\mathcal{D}_X : U \mapsto D_U$ eine Prägarbe von Ringen auf X. Wegen Lemma lem:locExD 2.9 ist dies auch eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln für die Links-Multiplikation. Das zeigt:

Proposition 2.10. *Sei X eine affine Varietät, dann ist $\mathcal{D}_X$ ist eine Garbe von Ringen.*

Wir nennen $\mathcal{D}_X$ die Garbe der lokalen Differentialoperatoren auf X.

Proposition 2.11. *Sei X eine affine Varietät. Für jede affine offene Teilmenge $U \subset X$ gilt $\Gamma(U, \mathcal{D}_X) = D_U$.*

Beweis. Die Aussage ist klar falls $U = X_f$ für ein $f \in O_X$. Sei also $U \subset X$ eine beliebige offene affine Menge. Sei $f \in O_X$ mit $X_f \subset U$. Für $g = f_{|U}$ gilt dann $U_g = X_f$. Das zeigt

$$\Gamma(U_g, \mathcal{D}_U) \simeq D_{U_g} = D_{X_f} \simeq \Gamma(X_f, \mathcal{D}_X)$$

Insbesondere sind diese Isomorphismen kompatibel mit den Einschränkungsmorphismen. Da die offenen Mengen der Form $\{X_f \mid f \in O_X\}$ eine Basis der Topologie von X bilden, sind die X_f die in U enthalten sind eine Basis der Topologie von U. Da $\mathcal{D}_{X|U}$ und $\mathcal{D}_U$ Garben auf U sind, die auf einer Basis der Topologie übereinstimmen, sind beide gleich. Das zeigt $\Gamma(U, \mathcal{D}_X) = \Gamma(U, \mathcal{D}_U) = D_U$. □

Sei jetzt X eine algebraische Varietät. Für jede offene Menge U in X bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_U$ die partiell geordnete Familie aller affinen, offenen Teilmengen von U. Für $V, W \in \mathcal{B}_U$ mit $V \subset W$ existiert eine Ringhomomorphismus $r_V^W : D_W \to D_V$. Das heißt (D_V, r_V^W) ist ein projektives System von Ringen. Wir bezeichnen mit D_U den projektiven Limes. Dann ist $\mathcal{D}_X : U \mapsto D_U$ eine Prägarbe von Ringen auf X.

Proposition 2.12. *Sei X eine algebraische Varietät, dann ist $\mathcal{D}_X$ eine Garbe von Ringen auf X.*

Beweis. Die Aussage folgt aus der universellen Eigenschaft des projektiven Limes. □

Sei $U \subset X$ offen und $T \in D_X(U)$. Wir sagen T hat Ordnung $\leq p$, falls für jede affine offene Teilmenge $V \subset U$ der Differentialoperator $r_U^V(T)$ Ordnung $\leq p$ hat. Das definiert eine aufsteigende Filtrierung $F_\bullet \mathcal{D}_X(U)$ auf $\mathcal{D}_X(U)$.

filtexhaust **Lemma 2.13.** *Die Filtrierung $F_\bullet \mathcal{D}_X(U)$ auf $\mathcal{D}_X(U)$ ist ausschöpfend.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{D}_X(U)$. Da U quasi-kompakt ist können wir eine endliche affine Überdeckung $\{U_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ von U finden. Sei $p \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass die Einschränkungen von T auf die Elemente der Überdeckung von der Ordnung $\leq p$ sind. Sei V eine beliebige affine, offene Teilmengen von U und $S = r_V^U(T)$. Wir behaupten, dass S Ordnung kleiner gleich p hat. Seien $f_0, \ldots, f_p \in O_V$. Dann ist $R = [\ldots[[S, f_0], f_1], \ldots, f_p]$ ein Differentialoperator auf V, dessen Restriktionen auf $V \cap U_i$ alle gleich null sind. Das zeigt $R = 0$ und damit hat S Ordnung $\leq p$. $\square$

Die Filtrierung erfüllt daher die Bedingungen 1. -5. aus Abschnitt 1.1. Wir erhalten somit eine Filtrierung $F_\bullet \mathcal{D}_X$ der Garbe der lokalen Differentialoperatoren $\mathcal{D}_X$ mittels Untergarben von k-Vektorräumen. Wir nennen diese Filtrierung Ordnungsfiltrierung. Auf jedem offenen affinen Teilmenge $U \subset X$ gilt $F_p\mathcal{D}_X(U) = D_p(U)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Wir können außerdem die graduierte Garbe $Gr\mathcal{D}_X$ betrachten, die eine Garbe von kommutativen Ringen ist und für die $Gr_0\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X$ gilt.

Theorem 2.14. *Sei X eine algebraische Varietät über k. Dann gilt:*

1. *Die Garbe $\mathcal{D}_X$ ist ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul bzgl. der Links- bzw. Rechts- Multiplikation.*
2. *Die Garben $F_p\mathcal{D}_X$ für $p \in \mathbb{Z}$ sind kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln bzgl. der Links- bzw. Rechts- Multiplikation.*
3. *Die Garben $Gr_p\mathcal{D}_X$ für $p \in \mathbb{Z}$ sind kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln.*

Beweis. Da die Behauptungen alle lokaler Natur sind, können wir annehmen, dass X affin ist. Für die Links-Multiplikation folgt die erste Aussage aus Lemma 2.9. Die zweite Aussage folgt dann (ebenfalls für Links-Multiplikation) aus 2.4 und die dritte Aussage folgt dann aus den ersten beiden. Da Links- und Rechts-Multiplikation auf $Gr_p\mathcal{D}_X$ die selbe $\mathcal{O}_X$-Struktur liefert folgt die dritte Aussage dann auch für Rechts-Multiplikation. Andererseits ist

$$0 \longrightarrow F_{p-1}\mathcal{D}_X \longrightarrow F_p\mathcal{D}_X \longrightarrow Gr_p\mathcal{D}_X \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Seqeunz sowohl für die Links- als auch Rechts-Multiplikation. Induktion nach p liefert dann die zweite Aussage für die Rechts-Multiplkation. Da $\mathcal{D}_X$ ein direkter Limes von $F_p\mathcal{D}_X$ mit $p \in \mathbb{Z}$ ist, folgt die erste Aussage. $\square$

Sei jetzt X eine algebraische Varietät. Für jede affine offene Menge $U \subset X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_X(U)$ die Derivationen $Der_k(O_U)$ von O_U. Wegen Lemma 1.14 gilt $D_1(U) = O_U \oplus \mathcal{T}_X(U)$. Sei $V \subset U$ eine affine, offene Teilmenge. Dann gilt für jedes $T \in \mathcal{T}_X(U)$, dass $r_V^U(T)(1) = T(1) = 0$, also ist $r_V^U(T) \in \mathcal{T}_X(V)$. Das heißt die Restriktionsabbildungen sind kompatibel mit dieser Zerlegung in direkte Summen. Das zeigt, dass $U \mapsto \mathcal{T}_X(U)$ eine Prägarbe auf der Basis $\mathcal{B}$ aller affinen, offenen Teilmengen von X definiert und somit eine Prägarbe $\mathcal{T}_X$ auf X liefert. Da $F_1\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T}_X$ gilt und sowohl $F_1\mathcal{D}_X$ als auch $\mathcal{O}_X$ Garben sind, ist $\mathcal{T}_X$ auch eine Garbe auf X. Sie heißt die **Tangentialgarbe** von X. Ihre Schnitte über einer offenen Menge $U \subset X$ heißen **lokale Vektorfelder** von U. Die Garbe $\mathcal{T}_X$ erbt eine $\mathcal{O}_X$-Modul Struktur und ist mit dieser isomorph zu $Gr_1\mathcal{D}_X$. Aus Theorem 2.14 3. folgern wir:

Proposition 2.15. *Sei X eine algebraische Varietät über k. Dann gilt:*

1. *Die Tangentialgarbe $\mathcal{T}_X$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*
2. *$F_1\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T}_X$.*

Sind T, T' zwei Vektorfelder auf U, dann ist ihr Kommutator $[T, T']$ wieder ein Vektorfeld auf U, d.h. $\mathcal{T}_X$ ist eine Garbe von Lie-Algebren.

2.2 Die Garbe der Differentialoperatoren

Sei X eine glatte algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenem Körper der Charakteristik 0. Sei $\mathcal{D}_X$ die Garbe der lokalen Differentialoperatoren auf X und sei $F\mathcal{D}_X$ die Ordnungsfiltration. Wir bezeichnen mit $Gr\mathcal{D}_X$ die assozierte graduierte Garbe von Ringen.

Wir beschreiben zuerst die Struktur der Garbe $Gr\mathcal{D}_X$. Sei $U \subset X$ offen und affin. Dann gilt $\Gamma(U, \mathcal{D}_X) = D_U$. Wir definieren wie in (1.2.2) für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und jedes $T \in F_p D_U$ eine Abbildung $\theta_p(T) : O_U^p \to O_U$ durch

$$\theta_p(T)(f_1, f_2, \dots, f_p) = [[\dots.[[T, f_1], f_2], \dots, f_{p-1}], f_p] \, .$$

Wie wir in Lemma 1.15 gezeigt haben ist diese Abbildung symmetrisch und k-multilinear und es gilt $\sigma_p(T) = 0$ genau dann wenn $T \in F_{p-1}D_u$. Die Abbildung

$$f \mapsto \theta_p(T)(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f, f_{i+1}, \dots, f_p) \tag{2.2.1}$$

ist für jedes $i = 1, \dots, p$ ein Vektorfeld auf U. Um dies zu sehen können wir wegen der Symmetrie $i = p$ annehmen. Dann ist die Abbildung (2.2.1) ein Differentialoperator der Ordnung ≤ 1 und verschwindet auf Konstanten. Aus Proposition 2.15 folgt dann die Behauptung.

Das heißt aber, dass $\sigma_p(T)(f_1, f_2, \dots, f_p(x))$ am Punkt x nur von den Differentialen $df_i(x)$ von f_i abhängt. Wir können daher eine Funktion $\sigma_p(T)$ auf dem Kotangentialbündel $T^*(U)$ von U definieren:

$$\sigma_p(T)(x, \omega) = \frac{1}{p!}\theta_p(T)(f, f, \dots, f)(x)$$

mit $f \in O_U$, s.d. $df(x) = \omega$.

Lemma 2.16.

1. *Die Funktion $\sigma_p(T)$ ist auf $T^*(U)$ regulär.*

2. *Für ein festes $x \in U$ ist die Funktion $\sigma_p(T)$ ein homogenes Polynom vom Grad p auf $T_x^*(U)$.*

Beweis. Da die Aussage lokal ist, können wir wegen ??? annehmen, dass U genügend klein ist, s.d. ein Koordinatensystem $(f_1, f_2, \dots, f_n; D_1, D_2, \dots D_n)$ existiert und die Abbildung

$$\begin{aligned} U \times k^n &\longrightarrow T^*(U) \\ (x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &\mapsto (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i df_i(x)) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

ein Isomorphismus ist. Andererseits ist die Funktion

$$(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mapsto \frac{1}{p!}\theta_p(T)\left(\sum \xi_i f_i, \sum \xi_i f_i, \dots, \sum \xi_i f_i\right)$$

eine reguläre Funktion auf $U \times k^n$. Dies zeigt aber, dass $\sigma_p(T)$ auf $T^*(U)$ regulär ist. Die zweite Aussage folgt aus der Multilinearität. □

Wir nennen $\sigma_p(T)$ das **p-te Symbol** des Differentialoperators T. Sei $\pi : T^*(X) \to X$ die natürliche Projektion. Da π eine lokal triviale Faserung und die Faser bei $x \in X$ der Vektorraum $T_x^*(X)$ ist, induziert die natürliche Graduierung von Polynomen auf $T_x^*(X)$ die Struktur einer graduierten Garbe von Ringen auf dem direkten Bild $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$. Das Symbol σ_p definiert definiert einen Morphismus von der Garbe $F_p\mathcal{D}_X$ zur Garbe $Gr_p\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ die wir auch mit σ_p bezeichnen. Da σ_p auf $F_{p-1}\mathcal{D}_X$ verschwindet, liefert dies einen Morphismus von $Gr_p\mathcal{D}_X$ in die p-te homogene Komponenet von $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$. Wir bezeichnen mit $\sigma : Gr\mathcal{D}_X \to \pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ den zugehörigen Morphismus von graduierten Garben.

thm:GrDXpiOX **Theorem 2.17.** *Das Symbol $\sigma : Gr\mathcal{D}_X \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ ist ein Isomorphismus von Garben von graduierten $\mathcal{O}_X$-Algebren.*

Beweis. Der Beweis wird aus mehreren Schritten bestehen. Wir beweisen zuerst, dass das Symbol ein Morphismus von Garben von k-Algebren ist.

Lemma 2.18. *Sei $U \subset X$ offen und $T, S \in \mathcal{D}_X(U)$ von der Ordnung $\leq p$ bzw. $\leq q$. Dann gilt*

$$\sigma_{p+q}(TS) = \sigma_p(T)\sigma_q(S)$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{O}_X(U)$ und definiere die Abbildung $\tau : \mathcal{D}_X(U) \to \mathcal{D}_X(U)$ durch $\tau(T) = [T, f]$. Dann gilt

$$\tau(TS) = [TS, f] = TSf - fTS = [T, f]S + T[S, f] = \tau(T)S + T\tau(S)$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt daher

$$\tau^k(TS) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \tau^{k-i}(T)\tau^i(S)$$

Für festes $x \in X$ und $\omega \in T_x^*(X)$ mit $df(x) = \omega$ gilt dann

$$\begin{aligned}\sigma_{p+q}(TS)(x, \omega) &= \frac{1}{(p+q)!}\theta_{p+q}(TS)(f, f, \ldots, f)(x) = \frac{1}{(p+q)!}\tau^{p+q}(TS)(x)\\ &= \frac{1}{p!q!}\tau^p(T)(x)\tau^q(S)(x) = \sigma_p(T)(x, \omega)\sigma_q(S)(x, \omega)\end{aligned}$$

□

Da $\pi : T^*(X) \to X$ lokal trivial ist, ist die 0-te homogene Komponenet der Garbe $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ gleich $\mathcal{O}_X$ und die Abbildung σ_0 ist die Identität. Andererseits ist die 1-ste homogene Komponente von $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ isomorph zu $\mathcal{T}_X \simeq Gr_1\mathcal{D}_X$. Außerdem gilt, dass die Garbe von graduierten Ringen $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ von ihren nullten und ersten homogenen Komponenten erzeugt wird, d.h. $\sigma : Gr\mathcal{D}_X \to \pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ ist surjektiv. Es bleibt die Injektivität zu zeigen.

Lemma 2.19. *Sei $T \in F_p\mathcal{D}_X(U)$. Dann ist $\sigma_p(T) = 0$ genau dann wenn T Ordnung $\leq p-1$ hat.*

Beweis. Da die Aussage lokal ist, können wir annehmen, dass U affin ist. Wir beweisen das Lemma per Induktion nach p. Für $p = 0$ ist die Aussage klar. Sei also $p > 0$ und $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Dann ist $[T, f]$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq p - 1$. Sei $x \in U$, $\omega \in T_x^*(X)$ und setze $\eta = df(x)$. Indem wir U möglicherweise noch verkleinern, können wir annehmen, dass ein $g \in \mathcal{O}_X(U)$ existiert, s.d. $dg(x) = \omega$ gilt. Für $h \in \mathcal{O}_X(U)$ definieren wir dann die Abbildung $\tau_h : \mathcal{D}_X(U) \to \mathcal{D}_X(U)$ durch $\tau_h(T) := [T, h]$. Für jedes $\lambda \in k$ gilt dann

$$\tau_{f+\lambda g}(T) = [T, f + \lambda g] = [T, f] + \lambda[T, g] = \tau_f(T) + \lambda\tau_g(T)$$

Da τ_f und τ_g kommutieren gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dass

$$\tau_{f+\lambda g}^k(T) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \tau_g^{k-i}(\tau_f^i(T))$$

Aufgrund unserer Annahme verschwindet die aAbbildung

$$\lambda \longrightarrow \sigma_p(T)(x, \eta + \lambda\omega) = \frac{1}{p!}\tau_{f+\lambda g}^p(T)(x)$$

identisch auf k. Da $\sharp k = \infty$ gilt $\lambda^i \tau_g^{k-i}(\tau_f^i(T)) = 0$ für $1 \leq i \leq p$. Insbesondere gilt

$$\sigma_{p-1}([T, f])(x, \omega) = \frac{1}{(p-1)!}\tau_g^{p-1}(\tau_f(T))(x) = \frac{1}{(p-1)!}\tau^{p-1} - g([T, f])(x) = 0$$

für jedes $\omega \in T_x^*(X)$. Da $x \in U$ beliebig gewählt ist, folgt aus der Induktionsannahme, dass $[T, f]$ Ordnung $\leq p - 2$ hat. Daraus folgt aber, dass T Ordnung $\leq p - 1$ hat. □

Das zeigt die Aussage von Theorem 2.17. □

Proposition 2.20. *Die Garbe der lokalen Differentialoperatoren $\mathcal{D}_X$ auf einer glatten Varietät X ist ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul für die Links- und Rechts-multiplikation. Insbesondere hat jedes $x \in X$ eine offene affine Umgebung U mit einem Koordinatensystem $(f_1, f_2, \dots, f_n; D_1, D_2, \dots, D_n)$ s.d.*

1. $D^I \circ D^J = D^{I+J}$ *für jedes* $I, J \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}$
2. $(D^I; I \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}, |I| \leq p)$ *ist eine Basis des freien* $\mathcal{O}_X(U)$*-Moduls* $F_p\mathcal{D}_X(U)$ *für die Links- bzw. Rechts-Multiplikation.*
3. $(D^I; I \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0})$ *ist eine Basis des freien* $\mathcal{O}_X(U)$*-Moduls* $\mathcal{D}_X(U)$ *für die Links- bzw. Rechts-Multiplikation.*

Beweis. Sei U eine Umgebung von x mit Koordinatensystem $(f_1, f_2, \dots, f_n; D_1, D_2, \dots, D_n)$. Dann gilt $[D_i, D_j] = 0$ für $i, j = 1, \dots, n$ und die Aussage (1) folgt.

Setze $\xi_i = \sigma_1(D_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist $\pi_* \mathcal{O}_{T^*(X)}(U)$ ein freier $\mathcal{O}_X(U)$-Modul mit Basis $(\xi^I; I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ und seine homogenen Komponenten sind ebenfalls freie $\mathcal{O}_X(U)$-Moduln. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow F_{p-1}\mathcal{D}_X \longrightarrow F_p\mathcal{D}_X \longrightarrow Gr_p\mathcal{D}_X \longrightarrow 0$$

und Theorem 2.17 folgt per Induktion nach p, dass $F_p\mathcal{D}_X(U)$ ein freier $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist und das er von $(D^I; I \in \mathbb{Z}^n_{\leq 0}, |I| \leq p)$ erzeugt wird. Gilt $\sum_{|I| \leq p} f_I D^I = 0$, dann folgt, indem man das p-te Symbol nimmt, dass $f_I = 0$ für $|I| = p$ und daher auch $\sum_{|I| \leq p-1} f_I D^I = 0$ gilt. Per absteigender Induktion folgt daher $f_I = 0$ für $|I| \geq p$. Das zeigt die zweite Aussage. Aus Lemma 2.13 folgt die dritte Aussage. □

Proposition 2.21. *Sei X eine glatte affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenem Körper der Charakteristik* 0*. Dann gilt:*

1. GrD_X *ist noethersch.*
2. GrD_X *wird als* O_X*-Algebra von* Gr_1D_X *erzeugt.*

Beweis. Da $\pi : T^*(X) \to X$ eine lokal triviale Faserung ist und die Fasern Vektorräume, also insbesondere affin, sind, ist π ein affiner Morphismus. Also ist $T^*(X)$ eine affine Varietät[6]. Daraus folgt, dass

$$GrD_X = \Gamma(X, Gr\mathcal{D}_X) \simeq \Gamma(X, \pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}) = \Gamma(T^*(X), \mathcal{O}_{T^*(X)}) = O_{T^*(X)}$$

eine endlich erzeugte k-Algebra und ein noetherscher Ring ist. Da $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ als $\mathcal{O}_X$-Algebra von seiner homogenen Komponente vom Grad 1 erzeugt wird, ist der Morphismus $(\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)})_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} (\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)})_p \to (\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)})_{p+1}$ für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ein Epimorphismus. Da X affin ist, ist auch der zugehörige Morphismus der globalen Schnitte surjektiv. Daraus folgt, dass GrD_X als O_X-Algebra von Gr_1D_X erzeugt wird. □

Theorem 2.22. *Sei X eine glatte affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenem Körper der Charakteristik* 0*. Dann gilt*

1. D_X *ist links- und rechts- noethersch.*
2. *Der Ring* D_X *ist durch* O_X *und den globalen Vektorfeldern auf* X *erzeugt.*

Beweis. Aus Proposition 2.21 folgt, dass der gefilterte Ring D_X die Bedingungen 1. - 7. aus Abschnitt 1.1 erfüllt. Die erste Aussage folgt somit aus Proposition 1.5. Sei A der Unterring von D_X der durch O_X und den globalen Vektorfeldern auf X erzeugt wird. Sei $F_\bullet A$ die induzierte Filtration auf A. Wir erhalten einen injektiven Morphismus von GrA nach GrD_X der nach Proposition 2.21 auch surjektiv ist. Das zeigt aber $A = D_X$. □

[6] Siehe Hartshorne Ex. 5.17

3 $\mathcal{D}_X$-Moduln

3.1 Quasi-kohärente $\mathcal{D}_X$-Moduln

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Garbe von Ringen mit 1 auf X. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ die abelsche Kategorie der Garben von $\mathcal{A}$-Moduln auf X Seien $A = \Gamma(X, \mathcal{A})$ die globalen Schnitte von $\mathcal{A}$ und bezeichnen mit $\mathcal{M}(A)$ die abelsche Kategorie der A-Moduln. Der globale Schnittfunktor

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma(X, -) : \mathcal{M}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{M}(A) \\ \mathcal{M} &\mapsto \Gamma(X, \mathcal{M}) \end{aligned}$$

ist additiv und links-exakt. Wir haben außerdem einen Isomorphismus von Funktoren

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, -) &\longrightarrow \Gamma(X, -) \\ (T : \mathcal{A} \to \mathcal{V}) &\mapsto T(1_X) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Wir definieren außerdem den Lokalisierungsfunktor

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{M}(A) &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \\ V &\mapsto \Delta(V) = \mathcal{A} \otimes_A V \end{aligned}$$

Der Funktor Δ ist additiv und rechts-exakt. Es gilt

$$Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_A V, \mathcal{W}) = Hom_A(V, Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{W}))$$

Da für $\kappa \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes_A V, \mathcal{W})(U)$ und $\theta \in Hom_A(V, Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{W}))(U)$ die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} &\kappa \mapsto (v \mapsto (\mathcal{A}(U) \otimes v \xrightarrow{\kappa} \mathcal{W}(U))) \\ &\theta \mapsto (a \otimes v \mapsto (\theta(v)(U))\,(a)) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

invers zueinander sind. Daraus folgt aber

$$Hom(\Delta(V), \mathcal{W}) = Hom_A(V, \Gamma(X, \mathcal{W}))$$

das heißt Δ ist links-adjungiert zu Γ und man erhält natürliche Transformationen:

$$\varphi : id_{\mathcal{M}(A)} \longrightarrow \Gamma \circ \Delta \qquad \text{und} \qquad \psi : \Delta \circ \Gamma \longrightarrow id_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$$

Wir betrachten jetzt den Fall, dass X eine algebraische Varietät ist. Wie zuvor bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe und mit $O_X = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ die globalen Schnitte. Ist X affin, dann heißt $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$ **quasi-kohärenter** $\mathcal{O}_X$-Modul, falls ein O_X-Modul V existiert, s.d. $\mathcal{V} \simeq \Delta(V)$. Für eine beliebige algebraische Varietät heißt $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$ quasi-kohärent, falls jeder Punkt $x \in X$ eine affine offene Umgebung besitzt, s.d. $\mathcal{V}_{|U}$ quasi-kohärent ist. Die quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln liefern eine volle, abelsche Unterkategorie von $\mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$, die wir mit $\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{O}_X)$ bezeichnen. Der Lokalisierungsfunktor Δ ist dann ein Funktor von $\mathcal{M}(O_X)$ in $\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{O}_X)$. Ist X affin, dann besagt ein Theorem von Serre, dass $\Delta : \mathcal{M}(O_X) \to \mathcal{M}_{qc}(\mathcal{O}_X)$ eine Kategorienäquivalenz gibt, wobei $\Gamma : \mathcal{M}_{qc}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{M}(O_X)$ quasi-invers zu Δ ist.

Sei jetzt $\mathcal{D}_X$ die Garbe der lokalen Differentialoperatoren auf X. Wir haben eine natürliche Abbildung $\iota : \mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X$, die einen Vergißfunktor $\mathcal{M}(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{M}(\mathcal{O}_X)$ liefert. Wir sagen, dass ein $\mathcal{D}_X$-Modul $\mathcal{V}$ **quasi-kohärent** ist, falls er als $\mathcal{O}_X$-Modul quasi-kohärent ist. Sei $\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{D}_X)$ die volle, abelsche Unterkategorie von $\mathcal{M}(\mathcal{D}_X)$ der quasi-kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln. Wegen Serre's Theorem ist $\Gamma : \mathcal{M}_{qc}(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{M}(D_X)$ ein exakter Funktor.

KateqAffin **Theorem 3.1.** *Sei X affine Varietät. Dann ist $\Gamma : \mathcal{M}_{qc}(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{D}(D_X)$ eine Kategorienäquivalenz. Der Lokalisierungsfunktor $\Delta : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}_{qc}(\mathcal{D}_X)$ ist dazu quasi-invers.*

Beweis. Sei $V \in \mathcal{M}(D_X)$. Es existiert eine exakte Sequenz $D_X^{(I)} \to D_X^{(J)} \to V \to 0$ von D_X-Moduln. Nachdem wir Δ anwenden, erhalten wir eine exakte Sequenz $\mathcal{D}_X^{(I)} \to \mathcal{D}_X^{(J)} \to \Delta(V) \to 0$ von $\mathcal{D}_X$-Moduln. Der Funktor $\Gamma \circ \Delta : \mathcal{M}(D_X) \to \mathcal{M}(D_X)$ ist rechts-exakt. Außerdem haben wir für $V \in \mathcal{M}(D_X)$ einen adjungierten Morphsimus $\varphi_V : V \to \Gamma(X, \Delta(V))$. Wir wollen zeigen, dass dieser ein Isomorphismus ist. Man sieht leicht, dass für einen freien Modul F der Morphismus φ_F ein Isomorphismus ist. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} D_X^{(I)} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{D_X^{(I)}}"] & D_X^{(J)} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{D_X^{(J)}}"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_V"] & 0 \\ D_X^{(I)} \arrow[r] & D_X^{(J)} \arrow[r] & \Gamma(X, \Delta(V)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da die ersten beiden vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind ist auch φ_V ein Isomorphismus.

Für einen quasi-kohärenten $\mathcal{D}_X$-Modul $\mathcal{V}$ haben wir den Adjunktionsmorphismus $\psi_{\mathcal{V}} : \Delta(\Gamma(X, \mathcal{V})) \to \mathcal{V}$. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \Delta(\Gamma(X, \mathcal{V})) \xrightarrow{\psi_{\mathcal{V}}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

von quasi-kohärenten $\mathcal{D}$-Moduln. Da $\Gamma(X, -)$ exakt ist erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \Gamma(X, \Delta(\Gamma(X, \mathcal{V}))) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{V}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

Aus dem ersten Teil wissen wir, das der mittlere Morphismus ein Isomorphismus ist. Daher gilt $\Gamma(X, \mathcal{K}) = \Gamma(X, \mathcal{C}) = 0$. Damit erhalten wir $\mathcal{C} = \mathcal{K} = 0$. □

Der Träger $\mathrm{supp}(\mathcal{F})$ einer Garbe $\mathcal{F}$auf X ist das Komplement der größten offenen Menge U, s.d $\mathcal{F}_{|U} = \{0\}$ gilt. Insbesondere ist der Träger einer Garbe ist abgeschlossen. Sei $U \subset X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann ist $\mathrm{supp}(s)$ das Komplement der größten offenen Teilmenge $V \subset U$, s.d. $s_{|V} = 0$ gilt.

Lemma 3.2. *Für jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ gilt*

$$\mathrm{supp}(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}\,.$$

Beweis. Ist $x \notin supp(S)$, dann existiert eine offene Umgebung V von X, s.d. $s_{|V} = 0$ gilt und damit $s_x = 0$. Ist andererseits $s_x = 0$, dann existiert wieder eine Umgebung V mit $s_{|V} = 0$ und damit gilt $x \notin \mathrm{supp}(s)$. □

prop:suppF **Proposition 3.3.** *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Dann ist* $\mathrm{supp}(\mathcal{F})$ *der Abschluß von $\{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$.*

Beweis. Es ist klar, dass $\mathrm{supp}(F)$ den Träger all seiner Schnitte enthält. Das heißt , dass $\{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$ ist im Träger enthalten. Sei $x \in X$ ein Punkt, der nicht im Abschluß von $\{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$ liegt. Dann existiert eine offene Umgebung U von X, s.d $\mathcal{F}_y = 0$ für alle $y \in V$. Das zeigt aber $\mathcal{F}_{|V} = 0$ und daher $V \cap \mathrm{supp}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Insbesondere gilt $x \notin \mathrm{supp}(\mathcal{F})$. □

Proposition 3.4. *Sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf X. Dann gilt

$$\mathrm{supp}(\mathcal{F}_2) = \mathrm{supp}(\mathcal{F}_1) \cup \mathrm{supp}(\mathcal{F}_3)\,.$$

Beweis. Für jedes $x \in X$ sind die Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{1,x} \longrightarrow \mathcal{F}_{2,x} \longrightarrow \mathcal{F}_{3,x} \longrightarrow 0$$

kurz exakt. Das heißt es gilt

$$\{x \in X \mid \mathcal{F}_{2,x} \neq 0\} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_{1,x} \neq 0\} \cup \{x \in X \mid \mathcal{F}_{3,x} \neq 0\}\,.$$

Nehmen wir von beiden Seiten den Abschluß dann folgt die Behauptung. □

3.2 Kohärente $\mathcal{D}$-Moduln

Sei X eine glatte, affine Varietät. Dann ist D_X noethersch und die volle Unterkategorie $\mathcal{M}_{fg}(D_X)$ von $\mathcal{M}(D_X)$ die aus endlich erzeugten D_X-Moduln besteht ist abelsch. Wir sagen, dass $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul ist, falls $\mathcal{V} \simeq \Delta(V)$ für einen endlich erzeugten D_X-Modul gilt. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{coh}(\mathcal{D}_X)$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{M}(\mathcal{D}_X)$, die aus kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln besteht. Man sieht leicht, dass $\Gamma : \mathcal{M}_{coh}(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{M}_{fg}(D_X)$ eine Kategorienäquivalenz liefert mit quasi-Inversem $\Delta : \mathcal{M}_{fg}(D_X) \to \mathcal{M}_{coh}(\mathcal{D}_X)$.

em:charaCoh1 **Lemma 3.5.** *Sei X eine glatte affine Varietät und $\mathcal{V}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *$\mathcal{V}$ ist ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul.*
2. *für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U und eine exakte Sequenz*

$$\mathcal{D}_U^p \longrightarrow \mathcal{D}_U^q \longrightarrow \mathcal{V}_{|U} \longrightarrow 0$$

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Sei $\mathcal{V}$ kohärent. Dann gilt $\mathcal{V} \simeq \Delta(V)$ wobei V ein endlich erzeugter D_X-Modul ist. Da D_X noethersch ist, existiert eine exakte Sequenz

$$D_X^p \to D_X^q \to V \longrightarrow 0$$

Nach dem Anwenden von Δ und wegen $\mathcal{V} \simeq \Delta(V)$ erhalten wir

$$\mathcal{D}_X^p \to \mathcal{D}_X^q \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow 0$$

Nehme jetzt $U = X$ für alle $x \in X$.

2. $\Rightarrow$ 1. : Es existiert ein $f \in O_X$ mit $x \in X_f \subset U$. Daher können wir oBdA annehmen, dass $U = X_f$ gilt. Aus der Annahme folgt, dass

$$D_U^p \longrightarrow D_U^q \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{V}) \longrightarrow 0$$

exakt ist,, d.h. dass $\Gamma(U, \mathcal{V})$ ein endlich erzeugter D_U-Modul ist. Da $\Gamma(U, \mathcal{V}) = \Gamma(X, \mathcal{V})_f$ gilt, existieren $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma(X, \mathcal{V})$, s.d. ihre Einschränkungen auf U den $\mathcal{D}_U$-Modul $\mathcal{V}_{|U}$ erzeugen. Solche offenen Mengen liefern eine Überdeckung von X. Da X quasi-kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung und damit $w_1, \ldots, w_m \in \Gamma(X, \mathcal{V})$ finden, s.d. jeder Halm $\mathcal{V}_x$ als $\mathcal{D}_{X,x}$-Modul durch ihre Bilder erzeugt wird. Wir erhalten somit einen surjektiven Morphsimus $\mathcal{M}_X^m \to \mathcal{V}$ bzw. $D^m : X \to \Gamma(X, \mathcal{V})$. Das heißt $\Gamma(X, \mathcal{V})$ ist endlich erzeugt und damit ist $\mathcal{V}$ kohärent. $\square$

Sei jetzt X eine beliebige glatte, algebraische Varietät. Wir nennen einen quasi-kohärenten $\mathcal{D}_X$-Modul auf X **kohärent**, falls für jedes $x \in X$ eine Umgebung U von x und eine exakte Sequenz

$$\mathcal{D}_U^P \longrightarrow \mathcal{D}_U^q \longrightarrow \mathcal{V}_{|U} \longrightarrow 0$$

existiert. Diese Definition stimmt mit der vorherigen für affine Varietäten überein. Wir erhalten außerdem das folgende Resultat.

o:charcohMod **Proposition 3.6.** *Sei $\mathcal{V}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul auf einer glatten algebraischen Varietät X. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *$\mathcal{V}$ ist ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul*
2. *für jede offene affine Menge $U \subset X$, ist die Einschränkung $\mathcal{V}_{|U}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_U$-Modul.*
3. *für eine affine Überdeckung $(U_1, \ldots, U_n)$ von X sind die Einschränkungen $\mathcal{V}_{|U_i}$ kohärente $\mathcal{D}_{U_i}$-Moduln.*

Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{coh}(\mathcal{D}_X)$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{M}_{qc}(\mathcal{D}_X)$ die aus kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln besteht. Die Proposition zeigt, dass $\mathcal{M}_{coh}$ abelsch ist.

Proposition 3.7. *Sei $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}$-Modul. Dann gilt*

$$\mathrm{supp}(\mathcal{V}) = \{x \in X \mid \mathcal{V}_x \neq 0\}.$$

Beweis. Wegen Proposition 3.3 reicht es zu zeigen, dass $\{x \in X \mid \mathcal{V}_x \neq 0\}$ abgeschlossen ist. Sei y ein Punkt im Abschluß dieser Menge und sei U eine affine Umgebung von y- Dann ist wegen Lemma 3.5 $\mathcal{V}(U)$ ein endlich erzeugter D_U-Modul. Seien $s_1, \ldots, s_n$ Schnitte in $\mathcal{V}(U)$, die $\mathcal{V}(U)$ als D_U-Modul erzeugen. Diese Schnitte erzeugen auch $\mathcal{V}_{|U}$ als $\mathcal{D}_U$-Modul. Sei $Z = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{supp}(s_i)$. Dann ist Z abgeschlossen in U und in $\{x \in X \mid \mathcal{V}_x \neq 0\}$ enthalten. Sei jetzt $y \notin Z$. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von y, s.d. $s_1, \ldots, s_n$ auf V verschwinden. Das bedeutet aber $\mathcal{V}_{|V} = 0$ und damit $y \notin \mathrm{supp}(\mathcal{V})$, das ist ein Widerspruch zu $y \in \overline{\{x \in X \mid \mathcal{V}_x \neq 0\}}$. □

Sei $U \subset X$ offen, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_U$-Untermodul von $\mathcal{F}_{|U}$. Sei $\overline{\mathcal{G}}$ die Untergarbe von $\mathcal{F}$ die folgendermaßen definiert ist:

$$\overline{\mathcal{G}(V)} = \{s \in \mathcal{F}(V) \mid s_{|V \cap U} \in \mathcal{G}(V \cap U)\}.$$

Dann ist $\overline{\mathcal{G}}$ ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{F}$. Er heißt kanonische Erweiterung von $\mathcal{G}$.

Lemma 3.8. *Sei $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{G}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_U$-Untermodul von $\mathcal{F}_{|U}$. Dann ist die kanonische Erweiterung $\overline{\mathcal{G}}$ von $\mathcal{G}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*

Beweis. Sei $i : U \to X$ die natürliche Inklusion und $\mathcal{H}$ der Quotient von $\mathcal{F}_{|U}$ durch $\mathcal{G}$. Dann ist $\mathcal{H}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_U$-Modul. Betrachte den natürlichen Morphismus $\alpha : i_*(\mathcal{F}_{|U}) \to i_*(\mathcal{H})$ von quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln. Die Verknüpfung mit $\mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}_{|U})$ liefert den Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ von quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Garben. Sein Kern ist quasi-kohärent und durch

$$\ker \varphi(V) = \{s \in \mathcal{F}(V) \mid \alpha_{V \cap U}(s_{|V \cap U}) = 0\} = \{s \in \mathcal{F}(V) \mid s_{|V \cap U} \in \mathcal{G}(V \cap U)\} = \overline{\mathcal{G}}(V)$$

gegeben. □

Ein quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul $\mathcal{V} \neq 0$ heißt **irreduzibel** falls jeder quasi-kohärente Unter $\mathcal{D}_X$-Modul entweder $\{0\}$ oder $\mathcal{V}$ selbst ist.

Lemma 3.9. *Sei U offen in X und $\mathcal{V}$ ein irreduzibler quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann ist $\mathcal{V}_{|U}$ entweder ein irreduzibler quasi-kohärenter $\mathcal{D}_U$-Modul oder gleich* 0.

Beweis. Nehme an, dass $\mathcal{V}_{|U} \neq 0$. Sei $\mathcal{W}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{D}_U$-Untermodul von $\mathcal{V}_{|U}$. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathcal{W}}$ seine kanonische Erweiterung zu einem $\mathcal{D}_X$-Untermodul von $\mathcal{V}$. Da $\mathcal{V}$ irreduzibel ist, ist $\overline{\mathcal{W}}$ entweder $\mathcal{V}$ oder 0. Das zeigt aber, dass $\mathcal{W}$ entweder $\mathcal{V}_{|U}$ oder 0 ist. □

Insbesondere erhalten wir das folgende Resultat.

Proposition 3.10. *Sei $\mathcal{V}$ ein irreduzibler quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann ist $\mathcal{V}$ kohärent.*

Beweis. Sei $U \subset X$ offen und affin. Dann ist nach Lemma 3.9 $\mathcal{V}_{|U}$ entweder irreduzibel oder gleich 0. Ist $\mathcal{V}_{|U}$ irreduzibel, dann ist nach Theorem 3.1 $M = \Gamma(U, \mathcal{V})$ ein irreduzibler D_U-Modul. M ist aber auch ein endlich erzeugter D_U-Modul, denn wenn $0 \neq m \in M$, dann ist

$$D_U \longrightarrow M$$
$$P \mapsto P \cdot m$$

surjektiv wegen der Irreduzibilität von M. Da D_U noethersch ist und damit der Kern der obigen Abbildung endlich erzeugt ist, erhalten wir eine exakte Sequenz $D_U^q \to D_U \to M \to 0$. Also ist $\mathcal{V}_{|U}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_U$-Modul. Aus Proposition 3.6 folgt dann die Aussage. □

Proposition 3.11. *Sei $\mathcal{V}$ ein irreduzibler quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann ist der Trägger* $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ *eine irreduzible abgeschlossene Untervarietät von X.*

Beweis. Per Definition ist $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ eine abgeschlossene Untervarietät von X. Wir zeigen zuerst, dass $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ zusammenhängend ist. Nehme an, dass $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ die disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener Untervarietäten $Z_1, Z_2 \subset X$ ist mit $Z_1 \neq \emptyset$. Sei $U = X \setminus Z_1$ und bezeichne mit $\mathcal{W}$ die kanonische Erweiterung des null $\mathcal{D}_U$-Untermoduls von $\mathcal{V}_{|U}$. Da $\mathcal{V}$ irreduzibel ist, ist $\mathcal{W}$ entweder $\mathcal{V}$ oder 0. Sei $x \in Z_1$ und V eine affine offene Umgebung von x die nicht Z_2 schneidet. Dann ist der Träget von $\mathcal{V}_{|V}$ gleich $Z_1 \cap V = (X \setminus U) \cap V = V \setminus (V \cap U)$. Andererseits gilt

$$\Gamma(V, \mathcal{W}) = \{s \in \Gamma(V, \mathcal{V}) \mid s_{V \cap U} = 0\} = \Gamma(V, \mathcal{V})$$

und damit $\mathcal{W} \neq 0$. Das heißt $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ und $\mathcal{V}_{|U} = 0$. Daher $Z_2 = \emptyset$ und damit ist $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ zusammenhängend.

Wir möchten jetzt zeigen, dass $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ irreduzibel ist. Nehme an das ist nicht der Fall. Sei Z_1 eine irreduzible Komponente von $\operatorname{supp}(\mathcal{V})$ und Z_2 die Vereinigung aller anderen irreduziblen Komponenten. Dann gilt $\operatorname{supp}(\mathcal{V}) = Z_1 \cup Z_2$. Sei $Z = Z_1 \cap Z_2$ und $U = X \setminus Z$. Dann gilt $\mathcal{V}_{|U} \neq 0$. Wegen Lemma lem:resIrredisIrred 3.9 ist dies ein irreduzibler $\mathcal{D}_U$-modul. Seiner Träger ist $(Z_1 \cup Z_2) - (Z_1 \cap Z_2) = (Z_1 \setminus (Z_1 \cap Z_2)) \cup (Z_2 \setminus (Z_1 \cap Z_2))$. Aus dem vorherigen Resultat folgt, dass dieser Raum zusammenhängend sein muss, also $Z_2 \setminus (Z_1 \cap Z_2) = \emptyset$. Das heißt $Z_2 \subset Z_1$, was ein Widerspruch ist. □

Eine quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul $\mathcal{V}$ hat **endliche Länge** falls es eine endliche aufsteigende Filtrierung

$$\{0\} = \mathcal{V}_0 \subsetneq \mathcal{V}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$$

von quasi-kohörenten $\mathcal{D}_X$-Moduln gibt, s.d. die $\mathcal{V}_p/\mathcal{V}_{p-1}$ irreduzible $\mathcal{D}_X$-Moduln sind. Die Zahl $\ell(\mathcal{V}) = n$ heißt die Länge von $\mathcal{V}$. Per Induktion nach der Länge von $\mathcal{V}$ sehen wir das jeder quasi-kohärente $\mathcal{D}_X$-Modul von endlicher Länge kohärent ist.

Lemma 3.12. *Sei $\mathcal{V}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathcal{V}$ hat endliche Länge.*
2. *für jede offene Menge $U \subset X$ hat $\mathcal{F}_{|U}$ endliche Länge.*
3. *Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ von X, s.d. $\mathcal{V}_{|U_i}$ für $1 \leq i \leq n$ endliche Länge hat.*

Beweis. Wegen Lemma lem:resIrredisIrred 3.9 gilt 1. $\Rightarrow$ 2.. Die Implikation 2. $\Rightarrow$ 3. ist klar. Die Implikation 3. $\Rightarrow$ 1. zeigen wir per Induktion nach der Länge $\sum_{j=1}^{n} \ell(\mathcal{V}_{|U_j})$. Falls diese Summe 0 ist, gilt $\mathcal{V}_{|U_j} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$. und daher $\mathcal{V} = 0$. Wir nehmen daher an, dass die Summe positiv und nicht null ist. Wenn $\mathcal{V}$ irreduzibel ist, sind wir fertig. Nehme an $\mathcal{V}$ ist nicht irreduzibel, dann existiert ein nicht-trivialer quasi-kohärenter $\mathcal{D}_X$-Untermodul $\mathcal{M}$ und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

in der weder $\mathcal{M}$ noch $\mathcal{N}$ gleich 0 ist. Da

$$\ell(\mathcal{V}_{|U_j}) = \ell(\mathcal{M}_{|U_j}) + \ell(\mathcal{N}_{|U_j})$$

für $j = 1, \ldots, n$ gilt, folgt insbesondere

$$\sum_{j=1}^{n} \ell(\mathcal{V}_{|U_j}) = \sum_{j=1}^{n} \ell(\mathcal{M}_{U_j}) + \sum_{j=1}^{n} \ell(\mathcal{N}_{|U_j})$$

und beide Summanden auf der rechten Seite sind ungleich 0. Wir können daher auf beide die Induktionsannahme anwenden, d.h. $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ haben endliche Länge, dann hat aber auch $\mathcal{V}$ endliche Länge. □

3.3 Charakteristische Varietät

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Konstruktion der charakteristischen Varietät auf allgemeine kohärente $\mathcal{D}_X$-Moduln.

Zuerst nehmen wir an, dass X eine glatte, affine Varietät ist. Sei D_X der zugehörige Ring der Differentialoperatoren von X. In Theroem 2.22 wurde gezeigt, das der Ring D_X links- und rechts-noethersch ist. Außederm besitz er eine Filtration $F_\bullet D_X$ nach der Ordnung der Differentialoperatoren. In Korollar 2.4und Proposition 2.21 wurde gezeigt, dass $(D_X, F_\bullet)$ die Bedingungen 1. - 7. aus Abschnitt 1.1 erfüllt. Wie wir im Beweis von Proposition 2.21 gesehen haben, ist $T^*(X)$ eine affine Varietät und es gilt

$$GrD_X \simeq O_{T^*(X)}\,.$$

Nach Lemma 1.4 besitzt ein endlich erzeugter D_X-Modul V eine gute D_X-Modul Filtrierung $F_\bullet V$ und GrV ist ein endlich erzeugter Modul über $GrD_X = O_{T^*(X)}$. Sei I der Annihilator von GrV, dann hängt sein Radikalideal $r(I)$ nach Lemma 1.29 nicht von der Wahl einer guten Filtrierung auf V ab. Wir nennen dieses Ideal das charakteristische Ideal von V und bezeichnen es mit $J(V)$. Die Verschwindungsmenge von $J(V)$ in $T^*(X)$ wird charakteristische Varietät $Ch(V)$ von V gennannt. Diese Definition stimmt mit der Definition in Abschnitt 1.4 für Moduln von Differentialoperatoren auf k^n überein.

Sei jetzt $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul auf X. Dann definieren wir die charakteristische Varietät $Ch(\mathcal{V})$ von $\mathcal{V}$ als charakteristische Varietät des D_X-Moduls $\Gamma(X, \mathcal{V})$. Wir sagen, dass eine auffsteigende $\mathcal{D}_X$-Modul Filtrierung $F_\bullet\mathcal{V}$ auf $\mathcal{V}$ durch kohärente $\mathcal{O}_X$-Untermoduln **gut** ist , falls gilt

1. $F_n\mathcal{V} = \{0\}$ für $n \ll 0$.
2. Die Filtrierung $F_\bullet\mathcal{V}$ ist ausschöpfend (d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n\mathcal{V} = \mathcal{V}$).
3. Die Filtrierung $F_\bullet\mathcal{V}$ ist stabil, d.h. es existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, s.d. $F_n\mathcal{D}_X F_m\mathcal{V} = F_{m+n}\mathcal{V}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $m \geq m_0$ gilt.

Sei $F_\bullet\mathcal{V}$ eine gute Filtrierung auf $\mathcal{V}$. Dann sind die $\Gamma(X, F_p\mathcal{V})$ endlich erzeugte O_X-Untermoduln von $\Gamma(X, \mathcal{V})$ und $\{\Gamma(X, F_p\mathcal{V})\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ist eine gute Filtrierung des D_X-Moduls $\Gamma(X, \mathcal{V})$.

Lemma 3.13. *Sei X affin und $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann gilt*

1. *$\mathcal{V}$ besitzt eine gute Filtrierung.*
2. *Die Abbildung $\{F_p\mathcal{V}\}_{p\in\mathbb{Z}} \mapsto \{\Gamma(X, F_p\mathcal{V})\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ist eine Bijektion zwischen der Menge von guten Filtrierungen auf $\mathcal{V}$ und der Menge von guten Filtrierungen auf $\Gamma(X, \mathcal{V})$.*

Beweis. Der D_X-Modul $\Gamma(X, \mathcal{V})$ ist endlich erzeugt. Daher besitzt er eine gute Filtrierung $F_\bullet\Gamma(X, \mathcal{V})$. Wegen Theorem 3.1 gilt $\mathcal{V} = \Delta(\Gamma(X, \mathcal{V}))$ und die $F_p\mathcal{V} = \Delta(F_p\Gamma(X, \mathcal{V}))$ sind kohärente $\mathcal{O}_X$-Untermoduln von $\mathcal{V}$. Man sieht leicht, dass $F_\bullet\mathcal{V}$ eine gute Filtrierung auf $\mathcal{V}$ ist. Der zweite Punkt folgt dann leicht aus der Kategorienäquivalenz zwischen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln und endlich erzeugten O_X-Moduln. □

Sei $F_\bullet\mathcal{V}$ eine gute Filtrierung auf $\mathcal{V}$. Dann ist $Gr_\bullet\mathcal{V}$ ein Modul über $Gr\mathcal{D}_X = \pi_*(\mathcal{O}_{T^*(X)})$. Da X affin ist (und daher $\Gamma(X, -)$ exakt ist) gilt

$$\Gamma(X, Gr_\bullet\mathcal{V}) = Gr_\bullet\Gamma(X, \mathcal{V})$$

wobei $\Gamma(X, \mathcal{V})$ mit der guten Filtrierung $\{\Gamma(X, F_p\mathcal{V})\}_{\partial\in\mathbb{Z}}$ versehen ist. Da $Gr_\bullet\Gamma(X, \mathcal{V})$ ein endlich erzeugter $O_{T^*(X)}$-Modul ist, folgt aus einer einfachen Adaption des Beweises von Proposition A.21 das

$$Ch(\mathcal{V}) = Ch(\Gamma(X, \mathcal{V})) = \mathrm{supp}(Gr_\bullet\Gamma(X, \mathcal{V})) = \mathrm{supp}(\Gamma(X, Gr_\bullet\mathcal{V}))$$

gilt. Das zeigt, dass die Konstruktion der charakteristischen Varietät lokaler Natur ist: Sei $U \neq \emptyset$ offen in X. Dann können wir $T^*(U)$ als offenen Teilmenge $\pi^{-1}(U) = \{(x, \omega) \in T^*(X) \mid \omega \in T^*_x(X), x \in U\}$ sehen.

n:CharVarres **Lemma 3.14.** *Sei $U \subset X$ offen und affin. Dann gilt*

$$Ch(\mathcal{V}_{|U}) = Ch(\mathcal{V}) \cap \pi^{-1}(U)$$

Wir wenden uns jetzt dem Fall einer glatten algebraischen Varietät zu. Sei $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul.

Lemma 3.15. *Es existiert eine eindeutig bestimmt abgeschlossenen Untervarietät Y von $T^*(X)$ s.d. für jede offene affine Menge $U \subset X$ $Ch(\mathcal{V}_{|U}) = Y \cap \pi^{-1}(U)$ gilt.*

Beweis. Seien U und V zwei affine offene Teilmengen von X. Dann gilt wegen Lemma lem:CharVarres 3.14

$$Ch(\mathcal{V}_{|U}) \cap \pi^{-1}(U \cap V) = Ch(\mathcal{V}_{|U \cap V}) = Ch(\mathcal{V}_V) \cap \pi^{-1}(U \cap V)$$

Das heißt die Menge Y die aus Paaren (x, ω) besteht, s.d. $\omega \in T_x^*(X)$ mit $(x, \omega) \in Ch(\mathcal{V}_{|U})$ für eine affine offene Menge U, ist wohldefiniert und hat die gewünschten EIgenschaften. □

Die Menge Y heißt auch charakteristische Varietät von $\mathcal{V}$ und wir bezeichnen sie mit $Ch(\mathcal{V})$.

Die Definition einer guten Filtrierung eines kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduls macht auch für nicht affine Varietäten X Sinn. Wir wollen die Existenz solch einer Filtrierung zeigen. Zuerst benötigen wir aber ein Zwischenresultat, nämlich, dass auf einer algebrischen Varietät X kohärente Untermoduln von einer offenen Teilmenge auf ganz X erweitert erden können.

extendcohMod **Lemma 3.16.** *Sei $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_U$-Untermodul von $\mathcal{F}_{|U}$ Dann existiert eine kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{G}'$ von $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{G}'_{|U} = \mathcal{G}$.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass X affin ist. Sei $\overline{\mathcal{G}}$ die kanonische Erweiterung von $\mathcal{G}$-. Der Modul $\Gamma(X, \overline{\mathcal{G}})$ ist ein direkter Limes einer aufsteigenden Familie von endlich erzeugten O_X-Untermoduln. Sei $\{\mathcal{K}_i\}_{i \in I}$ deren Lokaliserung (mit Δ) . Sie bilden eine aufsteigende Folge von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermoduln von $\mathcal{F}$ und ihr direkter Limes ist $\overline{\mathcal{G}}$. Da $\overline{\mathcal{G}}_{|U} = \mathcal{G}$ kohärent ist, ist das System $\{\mathcal{K}_i\}_{i \in I}$ für große i stabil, d.h. es existiert ein i_0 , s.d. $\mathcal{K}_{i|U} = \mathcal{G}$ für $i \geq i_0$.

Wir beweisen jetzt den allgemeinen Fall per Induktion über die Kardialität einer endlichen affinen Überdeckung von X. Nehme an, dass $\{V_i\}_{1 \leq i \leq n}$ so eine Überdeckung ist und setze $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$. Aufgrund der Induktionsannahme existiert ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Untermodul $\mathcal{H}$ von $\mathcal{F}_{|Y}$, s.d $\mathcal{H}_{Y \cap U} = \mathcal{G}_{Y \cap U}$. Die Restriktion auf U der kanonischen Erweiterung $\overline{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{H}$ zu einem Untermodul von $\mathcal{F}$ enthält $\mathcal{G}$. Indem wir jetzt den ersten Teil des Beweises auf V_n anwenden erhalten wir einen kohärenten Untermodul $\mathcal{K}$ von$\overline{\mathcal{H}}_{|V_n}$, s.d. $\mathcal{K}_{V_n \cap U} = \mathcal{G}_{V_n \cap U}$. Sei $\mathcal{G}'$ die kanonische Erweiterung von $\mathcal{K}$ zu einem Untermodul von $\overline{\mathcal{H}}$. Dann enthält $\mathcal{G}'_{|U}$ die Garbe $\mathcal{G}$. Es gilt außerdem $\mathcal{G}'_{Y \cap U} \subset \overline{\mathcal{H}}_{Y \cap U} = \mathcal{G}_{Y \cap U}$, d.h. $\mathcal{G}'_{Y \cap U} = \mathcal{G}_{Y \cap U}$. Außerdem gilt $\mathcal{G}'_{V_n \cap U} = \mathcal{K}_{V_n \cap U} = \mathcal{G}_{V_n \cap U}$. Daher gilt $\mathcal{G}'_{|U} = \mathcal{G}$. Andererseits ist $\mathcal{G}'_{|Y} \subset \overline{\mathcal{H}}_{|Y} = \mathcal{H}$ kohärent und $\mathcal{G}'_{|V_n} = \mathcal{K}$ ist auch kohärent. Daher ist $\mathcal{G}'$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{F}$. □

Sei jetzt X eine glatte algebraische Varietät und $\mathcal{D}_X$ die Garbe der Differentialoperatoren auf X.

Theorem 3.17. *Sei $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann besitzt $\mathcal{V}$ eine gute Filtrierung.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass es einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$ gibt, s.d. der Morphismus $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ ein Epimorphismus ist. Sei $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ eine affine, offene Überdeckung von X. Dann ist für jedes $i = 1, \ldots, n$ $\Gamma(U_i, \mathcal{V})$ ein endlich erzeugter D_{U_i}-Modul. Wegen Lemma lem:extendcohMod 3.16 existiert ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{G}_i$ von $\mathcal{V}$, s.d. $\Gamma(U_i, \mathcal{G}_i)$ den Modul $\Gamma(U_i, \mathcal{V})$ als D_{U_i}-Modul erzeugt. Die Summe der $\mathcal{G}_i$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. Definiere nun $F_n\mathcal{V}$ als Bild von $F_n\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{U}$ unter der Abbildung $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Man sieht leicht, dass $F\mathcal{V}$ eine gute Filtrierung ist. □

Sei $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul und $F\mathcal{V}$ eine gute Filtrierung auf $\mathcal{V}$. Sei $Gr\mathcal{V}$ der zugehörige graduierte $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*(X)})$-Modul. Dann ist für jede offene Menge $U \subset X$ die Filtrierung $F_p(\mathcal{V}_{|U}) = (F_p\mathcal{V})_{|U}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ eine gute Filtrierung von $\mathcal{V}_{|U}$. Es gilt außerdem $Gr\mathcal{V}_{|U} = Gr(\mathcal{V}_{|U})$. Das heißt für eine affine offene Menge $U \subset X$ gilt $\Gamma(U, Gr\mathcal{V}) = Gr\Gamma(U, \mathcal{V})$. Wie wir schon vorher festgestellt haben, ist die Varietät $T^*(U)$ affin und es gilt $\Gamma(U, \pi_*(\mathcal{O}_{T^*(X)})) = O_{T^*(U)}$. Wenn wir den Modul $\Gamma(U, Gr\mathcal{V})$ als $O_{T*(U)}$-Modul lokalisieren, erhalten wir einen eindeutigen $\mathcal{O}_{T^*(U)}$-Modul $\tilde{\mathcal{V}}_U$ auf $T^*(U)$ mit der EIgenschaft, dass $\pi_*(\tilde{\mathcal{V}}_U) = Gr\mathcal{V}_{|U}$ gilt. Da $\Gamma(U, Gr\mathcal{V})$ ein endlich erzeugter $O_{T^*(U)}$-Modul ist, ist $\tilde{\mathcal{V}}_U$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{T^*(U)}$-Modul. Indem man die unterschiedlichen $\tilde{\mathcal{V}}_{|U}$ zusammenklebt, erhalten wir einen kohärenten $\mathcal{O}_{T^*(X)}$-Modul $\tilde{\mathcal{V}}$ auf $T^*(X)$ mit der Eigenschaft, dass $\pi_*(\tilde{\mathcal{V}}) = Gr\mathcal{V}$ gilt. Wir erhalten folgendes Resultat.

Proposition 3.18. *Sei $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul, $F_\bullet\mathcal{V}$ eine gute Filtrierung auf $\mathcal{V}$ und $Gr_\bullet\mathcal{V}$ der entsprechende graduierte $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*(X)})$-Modul. Dann gilt:*

1. *es existiert genau ein kohärenter $\mathcal{O}_{T^*(X)}$-Modul $\widetilde{gr^F\mathcal{V}}$ auf $T^*(X)$, s.d $\pi_*(\widetilde{gr^F\mathcal{V}}) = Gr\mathcal{V}$.*
2. $$Ch(\mathcal{V}) = \operatorname{supp}(\tilde{\mathcal{V}})$$

Proposition 3.19. *Sei*
$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{V}-3 \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz von kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln. Dann gilt
$$Ch(\mathcal{V}_2) = Ch(\mathcal{V}_1) \cup Ch(\mathcal{V}_3)$$

Beweis. Es reicht die Aussage auf affinen offenen Menge zur überprüfen. Dann können wir aber das Argument aus Proposition prop:charVarshortex 1.31 benutzen. □

Die beiden folgenden Aussagen sind direkte Verallgemeinerung von Lemma lem:Chconicaff 1.30 und Proposition prop:suppProjChar 1.32.

Proposition 3.20. *Sei $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann ist die charakteristische Varietät eine konische Untervarietät von $T^*(X)$.*

Beweis. Es reicht die Aussage lokal zu prüfen. Sei also $U \subset X$ offen und affin. Es gilt $O_{T^*(U)} = O_U[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Der Annihilator von $Gr\Gamma(U, \mathcal{V})$ ist ein homogenes Ideal in $O_U[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Daraus folgt die Aussage. □

Theorem 3.21. *Sei $\mathcal{V}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann gilt*
$$\pi(Ch(\mathcal{V})) = \operatorname{supp}(\mathcal{V})$$

Beweis. Es reicht wieder die Aussage lokal zu prüfen. Dafür können wir aber den Beweis von Proposition prop:suppProjChar 1.32 direkt adaptieren. □

Wir führen jetzt den Begriff des charakteristischen Zykels ein, welcher eine Verfeinerung des Begriffs der charakteristischen Varietät darstellt. Sei Y eine glatte algebraische Varietät und sei $\mathcal{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul. Dann können wir einen algebraischen Zykel $Cyc\,\mathcal{G}$ definieren. Sei $S(\operatorname{supp}\mathcal{G})$ die Menge der irreduziblen Komponenten des Trägers von $\mathcal{G}$. Sei $C \in S(\operatorname{supp}\mathcal{G})$ eine irreduzible Komponente und sei $U \subset Y$ eine offine offene Menge mit $\overline{C \cup U} = C$. Wir bezeichenen das Verschwindungsideal von $C \cap U$ mit $\mathfrak{p}_C \subset \mathcal{O}_Y(U)$. Durch lokalisieren erhalten wir einen lokalen Ring $\mathcal{O}_Y(U)_{\mathfrak{p}_C}$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}_C\mathcal{O}_U(U)_{\mathfrak{p}_C}$ und einen $\mathcal{O}_Y(U)_{\mathfrak{p}_c}$-Modul $G(U)_{\mathfrak{p}_C}$. Beachte das $\mathcal{O}_Y(U)_{\mathfrak{p}_C}$ und $\mathcal{G}(U)_{\mathfrak{p}_C}$ nicht von der Wahl von U abhängen (sie sind die Halme von $\mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{O}_\mathcal{G}$ am generischen Punkt von C). Der Modul $\mathcal{G}(U)_{\mathfrak{p}_C}$ ist ein artinscher $\mathcal{O}_Y(U)_{\mathfrak{p}_C}$-Modul und seine Länge $m_C(\mathcal{G})$ ist definiert. Wir nennen sie die Multiplizität von $\mathcal{G}$ entlang C. Für eine irreduzible Untervarietät C von Y mit $C \not\subset \mathrm{supp}\mathcal{G}$ setzen wir $m_C(\mathcal{G}) = 0$. Wir nennen die formale Summe

$$Cyc\, \mathcal{G} := \sum_{C \in S(\mathrm{supp}\mathcal{G})} m_C(\mathcal{G})\, C$$

den assozierten Zykel von $\mathcal{G}$.

Sei jetzt $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Indem wir eine gute Filtrierung F von $\mathcal{M}$ wählen, erhalten wir einen kohärenten $\mathcal{O}_{T^*(X)}$-modul $\widetilde{gr^F\mathcal{M}}$. Wegen Lemma lem:indepgoodfiltlength A.27 ist der Zykel $Cyc\,(\widetilde{gr^F\mathcal{M}})$ unabhängig von der Wahl der guten Filtrierung F.

Definition 3.22. *Für einen kohärenten $\mathcal{D}_X$-Modul $\mathcal{M}$ definieren wir den charakteristischen Zykel von $\mathcal{M}$ durch*

$$\mathbf{CC}(\mathcal{M}) := Cyc\,(\widetilde{gr^F M}) = \sum_{C \in S(Ch(M))} m_c(\widetilde{gr^F\mathcal{M}})C$$

Für $d \in \mathbb{N}$ definieren wir dessen Grad d Teil durch

$$\mathbf{CC}_d(\mathcal{M}) := \sum_{\substack{C \in S(Ch(\mathcal{M})) \\ \dim C = d}} m_c(\widetilde{gr^F\mathcal{M}})C$$

Proposition 3.23. *Sei*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von kohärenten $\mathcal{D}_X$-Moduln. Dann gilt für jede irreduzible Untervarietät C von $T^*(X)$ mit $C \in S(Ch(\mathcal{M})$, dass

$$m_C(\widetilde{gr^F N}) = m_C(\widetilde{gr^F M}) + m_C(\widetilde{gr^F L})\,.$$

Insbesondere gilt für $d = \dim Ch(N)$

$$\mathbf{CC}_d(N) = \mathbf{CC}_d(M) + \mathbf{CC}_d(L)\,.$$

Definition 3.24. *Ein $\mathcal{D}_X$-Modul heißt Vektorbündel mit flachem Zusammenhang falls er $\mathcal{O}_X$-lokalfrei und von endlichem Rang ist. Wir bezeichnen mit $Conn(X)$ die Kategorie der Vektorbündel mit flachem Zusammenhang.*

sp:VBcharvar **Beispiel 3.25.** *Sei $\mathcal{M}$ ein Vektorbündel mit flachem Zusammenhang vom Rang $r > 0$, setze $F_i\mathcal{M} = 0$ für $i < 0$ und $F_i\mathcal{M} = \mathcal{M}$ für $i \geq 0$. Dann definiert F eine gute Filtrierung auf $\mathcal{M}$ und lokal gilt $gr^F\mathcal{M} \simeq \mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X^r$. Da $\Theta_X \subset Ann_{\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}}(Gr^F\mathcal{M})$ gilt, folgt $Ch(M) = T_X^*(X) = s(X) \simeq X$ (wobei $s : x \mapsto (x, 0)$ der Null-Schnitt von $T^*(X)$ ist) und es gilt $\mathbf{CC}(\mathcal{M}) = rT_X^*(X)$.*

Proposition 3.26. *Sei $\mathcal{M} \neq 0$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent*

1. *$\mathcal{M}$ ist ein Vektorbündel mit flachem Zusammenhang*
2. *$\mathcal{M}$ ist kohärent über $\mathcal{O}_X$*
3. *$Ch(M) = T_X^*X \simeq X$*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 3.: Das wurde in Beispiel bsp:VBcharvar 3.25 gezeigt.

3. $\Rightarrow$ 2.: Da die Aussage lokal ist, können wir annehmen, dass X affin ist und ein lokales Koordinatensystem $\{x_i, \partial_i\}_{1 \leq i \leq n}$ existiert. Es gilt $T^*X = X \times \mathbb{C}^n$ Nehme an, es gilt $Ch(M) = T_X^*X$. Das bedeutet für eine gute Filtrierung F von M, dass

$$rad(Ann_{\mathcal{O}_X[\xi_1,\ldots,\xi_n]}(gr^F M)) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X[\xi]\xi_i$$

gilt, wobei ξ_i das Symbol von ∂_i ist und wir $\pi_*\mathcal{O}_{T^*(X)}$ mit $\mathcal{O}_X[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ identifiziert haben. Setze $I := \sum_{i=1}^n \mathcal{O}_X[\xi]\xi_i$. Da I noethersch ist, folgt

$$I^{m_0} \subset Ann_{\mathcal{O}_X[\xi_1,\ldots,\xi_n]}(gr^F\mathcal{M})$$

für $m_0 \gg 0$. Da die Menge $\{\xi^\alpha \mid |\alpha| = m_0\}$ das Ideal I^{m_0} erzeugt, gilt

$$\partial^\alpha F_j\mathcal{M} \subset F_{j+m_0-1}\mathcal{M} \qquad \text{für} \quad |\alpha| = m_0$$

Da andererseits F eine gute Filtrierung ist, gilt $F_i\mathcal{D}_X F_j\mathcal{M} = F_{i+j}\mathcal{M}$ für $j \gg 0$. Daraus folgt

$$F_{m_0+j}\mathcal{M} = (F_{m_0}\mathcal{D}_X)(F_j\mathcal{M}) = \sum_{|\alpha|\leq m_0} \mathcal{O}_X\partial^\alpha F_j\mathcal{M} \subset F_{j+m_0-1}\mathcal{M} \qquad j \gg 0$$

Das bedeutet $F_{j+1}\mathcal{M} = F_j\mathcal{M} = \mathcal{M}$ für $j \gg 0$. Da die $F_j\mathcal{M}$ kohärent über $\mathcal{O}_X$ sind, folgt die Aussage.

2. $\Rightarrow$ 1.: Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{D}_X$-Modul, der kohärent über $\mathcal{D}_X$ ist. Es reicht zu zeigen, dass für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{M}_x$ über $\mathcal{O}_{X,x}$ frei über ist. Sei $\{x_i, \partial_{x_i}\}$ ein lokales Koordinatensystem ist. Dann wird das maximale Ideal $\mathcal{M}$ von $\mathcal{O}_{X,x}$ von $x_1,\ldots,x_n$ erzeugt. Aus dem Nakayama Lemma folgt, dass $s_1,\ldots,s_m \in \mathcal{M}_X$ existieren, s.d. $\mathcal{M}_X = \sum_{i=1}^m \mathcal{O}_{X,x}s_i$ und dass $\overline{s}_1,\ldots,\overline{s}_m \in \mathcal{M}_x/\mathfrak{m}\mathcal{M}_x$ eine Basis von $\mathcal{M}_x/\mathfrak{m}\mathcal{M}_x$ über $\mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}$ sind. Wir zeigen, dass die $\{s_1,\ldots,s_m\}$ freie Erzeuger des $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls $\mathcal{M}_x$ sind. Nehme an es existiert eine nicht-triviale Relation

$$\sum_{i=1}^m f_is_i = 0 \qquad \text{mit} \quad f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$$

Beachte, dass alle $f_i \in \mathfrak{m}$ liegen, da wir ansonsten eine nicht-triviale Relation modulo $\mathfrak{m}$ erhalten würden.

Wir definieren $ord(f_i) = \max\{l \mid f_i \in \mathfrak{m}^l\}$. Sei l der Index, s.d. $ord(f_l)$ minimal ist. Da $f_i \in \mathfrak{m}$ für alle i gilt, existiert ein j, s.d. $\partial_j f_l \neq 0$. Wir wenden ∂_j auf die obige Relation an und erhalten

$$0 = \sum_{i=1}^m (\partial_j f_i)s_j + f_i(\partial_j s_i) = \sum_{i=1}^m g_is_i$$

Es gilt außerdem

$$\min\{ord(f_i) \mid i = 1,\ldots,m\} > \min\{ord(g_i) \mid i = 1,\ldots,m\}$$

Indem wir das Argument wiederholen, erhalten wir eine nicht-triviale Relation

$$\sum_{i=1}^m \overline{h}_i\overline{s}_i = 0 \qquad \text{mit} \quad \overline{h}_i \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{C}$$

in $\mathcal{M}_x/\sum_{i=1}^n x_i\mathcal{M}_x$. Das ist aber nicht möglich aufgrund der Wahl der $s_1,\ldots,s_n$. □

4 Operationen auf $\mathcal{D}$-Moduln

Lemma 4.1. *Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Eine links $\mathcal{D}_X$-Modulstruktur auf $\mathcal{M}$, die die gegebene $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur erweitert, ist äquivalent zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung*

$$\nabla : \Theta_X \longrightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{M})$$
$$\theta \mapsto \nabla_\theta$$

die für $f \in \mathcal{O}_X$, $\theta \in \Theta_X$ und $s \in \mathcal{M}$ folgende Eigenschaften hat:

1. $\nabla_{f\theta}(s) = f\nabla_\theta(s)$

2. $\nabla_\theta(fs) = \theta(f)s + f\nabla_\theta(s)$

3. $\nabla_{[\theta_1,\theta_2]}(s) = [\nabla_{\theta_1}, \nabla_{\theta_2}](s)$

Die links $\mathcal{D}_X$-Modulstruktur ist dann durch

$$\theta s = \nabla_\theta(s) \qquad \text{für} \quad \theta \in \Theta,\ s \in M$$

gegeben.

Beweis. Die Aussage ist klar, da $\mathcal{D}_X$ durch $\mathcal{O}_X$ und Θ_X erzeugt wird und die Relation $[\theta, f] = \theta(f)$ erfüllt. □

Für rechts $\mathcal{D}_X$-Moduln gilt analog folgende Aussage.

ightDmodconn **Lemma 4.2.** *Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Eine rechts $\mathcal{D}_X$-Modulstruktur auf $\mathcal{M}$, die die gegebene $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur erweitert, ist äquivalent zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung*

$$\begin{aligned} \theta' : \Theta_X &\longrightarrow \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) \\ \theta &\mapsto \nabla'_\theta \end{aligned}$$

die für $f \in \mathcal{O}_X, \theta \in \Theta_X$ und $s \in \mathcal{M}$ folgende Eigenschaften hat:

1. $\nabla'_{f\theta}(s) = \nabla'_\theta(fs)$

2. $\nabla'_\theta(fs) = \theta(f)s + f\nabla'_\theta(s)$

3. $\nabla'_{[\theta_1,\theta_2]}(s) = [\nabla'_{\theta_1}, \nabla'_{\theta_2}](s)$

Die rechts $\mathcal{D}_X$-Modulstruktur auf $\mathcal{M}$ ist dann durch

$$s\theta = -\nabla'_\theta(s)$$

gegeben.

Wir möchten jetzt die Links-Rechts-Korrespondenz von Kapitel subsec:ModRingDiff 1.3 auf $\mathcal{D}_X$-Modul erweitern. Sei $\{x_i, \partial_i\}_{1\le i\le n}$ ein lokales Koordinatensystem auf einer affinen, offenen Menge $U \subset X$. Für $P(x,\partial) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha \in D_U$ betrachten wir die formal Adjugierte

$$^tP(x,\partial) := \sum_\alpha (-\partial)^\alpha a_\alpha(x) \in D_U \tag{4.0.1}$$ eq:formaladj

Es gilt dann $^t(PQ) = {}^tQ\,{}^tP$ und wir erhalten mit $P \mapsto {}^tP$ einen Anti-Ringautomorphismus auf D_U. Für einen links D_U-Modul M definieren wir die Rechtsaktion von D_U auf M durch $sP := {}^tPs$ und erhalten einen rechts D_U-Modul ^tM. Diese Transformation hängt aber von dem gewählten Koordinatensystem ab.

Beispiel 4.3. *Betrachte die Varietät $\mathbb{C}^*$ mit den Koordinaten x, ∂_x und z, ∂_z wobei $z = 1/x$. Betrachte den Operator $P(z,\partial_z) = \partial_z$. Dann gilt $^tP = -\partial_z$. In der x-Koordinate gilt aber $P = -x^2\partial_x$ und $^tP = x^2\partial_x + 2x$.*

Um die Links-Rechts-Korrespondenz global zu definieren benutzen wir das kanonische Geradenbündel

$$\Omega_X := \Omega_X^n = \bigwedge^n \Omega_X^1$$

Ein $\theta \in \Theta_X$ operiert auf Ω_X mittels der Lie-Ableitung Lie_θ:

$$(Lie_\theta\omega)(\theta_1,\dots,\theta_n) := \theta(\omega(\theta_1,\dots,\theta_n)) - \sum_{i=1}^n \omega(\theta_1,\dots,[\theta,\theta_i],\dots,\theta_n)$$

für $\omega \in \Omega_X$ und $\theta_1,\dots,\theta_n \in \Theta_X$.

Lemma 4.4. *Die Lie-Ableitung hat folgende Eigenschaften*

1. $Lie_{[\theta_1,\theta_2]}\omega = Lie_{\theta_1}Lie_{\theta_2}\omega - Lie_{\theta_2}Lie_{\theta_1}\omega$
2. $Lie_\theta(f\omega) = \theta(f)\omega + f Lie_\theta\,\omega$
3. $Lie_{f\theta}\,\omega = Lie_\theta(f\omega)$

Beweis. Wir beweisen die 2. und 3. Aussage. Der Beweis der ersten Aussage bleibt dem Leser überlassen. Die zweite Aussage folgt aus

$$\begin{aligned}
Lie_\theta(f\omega)(\theta_1,\dots,\theta_n) &= \theta(f\omega(\theta_1,\dots,\theta_n)) - \sum_{i=1}^n f\omega(\theta_1,\dots,[\theta,\theta_i],\dots,\theta_n] \\
&= \theta(f)\omega(\theta_1,\dots,\theta_n) + f\theta\omega(\theta_1,\dots,\theta_n) - \sum_{i=1}^n f\omega(\theta_1,\dots,[\theta,\theta_i],\dots,\theta_n] \\
&= \left(\theta(f)\omega + f Lie_\theta\omega\right)(\theta_1,\dots,\theta_n)
\end{aligned}$$

Sei $\theta = \sum_{i=1}^n g_i\partial_i$. Da ω eine Top-Differentialform ist, reicht es $(Lie_{f\theta}\omega)(\partial_1,\dots,\partial_n)$ auszuwerten:

$$\begin{aligned}
(Lie_{f\theta}\omega)(\partial_1,\dots,\partial_n) &= f\theta\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \sum_{i=1}^n \omega(\partial_1,\dots,[f\theta,\partial_i],\dots,\partial_n) \\
&= \theta f\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \theta(f)\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \sum_{i=1}^n \omega(\partial_1,\dots,f[\theta,\partial_i] - \partial_i(f)\theta,\dots,\partial_n) \\
&= \theta f\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \theta(f)\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \sum_{i=1}^n f\omega(\partial_1,\dots,[\theta,\partial_i],\dots,\partial_n) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \omega(\partial_1,\dots,\partial_i(f)g_i\partial_i,\dots,\partial_n) \\
&= \theta f\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \theta(f)\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \sum_{i=1}^n f\omega(\partial_1,\dots,[\theta,\partial_i],\dots,\partial_n) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n \partial_i(f)g_i\right)\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) \\
&= \theta f\omega(\partial_1,\dots,\partial_n) - \sum_{i=1}^n f\omega(\partial_1,\dots,[\theta,\partial_i],\dots,\partial_n) = (Lie_\theta f\omega)(\partial_1,\dots,\partial_n)
\end{aligned}$$

□

lem:rightDmodconn

Nach Lemma 4.2 induziert dies eine Rechts-$\mathcal{D}_X$-Modulstruktur auf Ω_X. In lokalen Koordinaten ergibt dies

$$(f dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n)P(x,\partial) = ({}^tP(x,\partial)f)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n \qquad \text{für} \quad f\in\mathcal{O}_X$$

Proposition 4.5. *Sei $\mathcal{M},\mathcal{N}\in Mod(\mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{M}',\mathcal{N}'\in Mod(\mathcal{D}_X^{op})$. Dann gilt für $\theta\in\mathcal{T}_X$*

1. $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}\in Mod(\mathcal{D}_X)$ *mit* $\theta(s\otimes t) = \theta(s)\otimes t + s\otimes\theta(t)$
2. $\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}\in Mod(\mathcal{D}_X^{op})$ *mit* $(s'\otimes t)\theta = s'\theta\otimes t - s'\otimes\theta t$
3. $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})\in Mod(\mathcal{D}_X)$ *mit* $(\theta\psi)(s) = \theta(\psi(s)) - \psi(\theta(s))$.

4. $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}',\mathcal{N}') \in Mod(\mathcal{D}_X)$ *mit* $(\theta\psi)(s) = -\psi(s)\theta + \psi(s\theta)$

5. $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}') \in Mod(\mathcal{D}_X^{op})$ *mit* $(\psi\theta)(s) = \psi(s)\theta + \psi(\theta(s))$

sorproductex **Lemma 4.6.** *Sei* $\mathcal{M},\mathcal{N} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ *und* $\mathcal{M}' \in Mod(\mathcal{D}_X^{op})$. *Wir haben folgende Isomorphismen von* $\mathbb{C}$*-Garben*

$$\begin{gathered}(\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \simeq (\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N} \\ (s' \otimes t) \otimes s \longleftrightarrow s' \otimes (s \otimes t) \longleftrightarrow (s' \otimes s) \otimes t\end{gathered}$$

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Isomorphismus, der Beweis des zweiten verläuft ähnlich. Wir beweisen den ersten Isomorphismus zuerst auf Prägarbenniveau, d.h. das für alle $U \subset X$ gilt

$$\big(\mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)\big) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} \mathcal{M}(U) \simeq \mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} \big(\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)\big)$$

Wir müssen beweisen, dass die obigen Morphismen wohldefiniert sind. Betrachte die Abbildung

$$(\mathcal{M}'(U) \times \mathcal{N}(U)) \times \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} \big(\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)\big)$$

Sei $f \in \mathcal{O}_X(U)$ es gilt

$$(s'f, t, s) \mapsto s'f \otimes s \otimes t = s' \otimes s \otimes ft \leftarrow\!\shortmid (s', ft, s)$$

also faktoriziert die Abbildung über

$$(\mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)) \times \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} (\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U))$$

Es gilt außerdem

$$((s'\otimes t), \theta s) \mapsto s'\otimes(\theta s\otimes t) = s'\otimes\theta(s\otimes t) - s'\otimes(s\otimes\theta t) = s'\theta\otimes(s\otimes t) - s'\otimes(s\otimes\theta t) \leftarrow\!\shortmid ((s'\theta\otimes t), s) - ((s'\otimes\theta t), s)$$

Wir erhalten somit eine Abbildung

$$\big(\mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)\big) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} \mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} \big(\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)\big)$$

Durch eine ähnliche Argumentation erhält man eine Abbildung in die Rückrichtung. Die beiden Abbildungen sind offensichtlich invers zueinander. Da die Vergarbung von $U \mapsto \big(\mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)\big) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} \mathcal{M}(U)$ die Garbe $(\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ liefert (genauso für $U \mapsto \mathcal{M}'(U) \otimes_{\mathcal{D}_X(U)} (\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U))$), folgt die Behauptung. ☐

Proposition 4.7. *Der Funktor*

$$\begin{aligned}\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\bullet) : Mod(\mathcal{D}_X) &\longrightarrow Mod(\mathcal{D}_X^{op}) \\ \mathcal{M} &\mapsto \mathcal{M}^r := \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}\end{aligned}$$

ist eine Kategorienäquivalenz. Ein quasi-inverser Funktor ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \bullet) : Mod(\mathcal{D}_X^{op}) &\longrightarrow Mod(\mathcal{D}_X) \\ \mathcal{N} &\mapsto \mathcal{N}^\ell := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{N})\end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Sei $\Omega_X^{\otimes -1} := \mathcal{H}om(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$. Wir bemerken zuerst, dass wir folgenden Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln haben

$$\Omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}om(\Omega_X, \mathcal{M})$$

Da Ω_X lokal-frei ist sieht man leicht, dass dieser Morphismus ein Isomorphismus ist. Wir erhalten folgenden Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \simeq \Omega_X^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$$

Das die beiden $\mathcal{D}_X$-Strukturen übereinstimmen überprüft man lokal. ☐

4.1 Inverses Bild

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten algebraischen Varietäten und $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}_Y$-Modul. Betrachte da inverse Bild

$$f^*\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$$

in der Kategorie der $\mathcal{O}$-Moduln. Wir möchten jetzt wie in Abschnitt subsec:invImaffin 1.7 dieses inverse Bild mit einer links $\mathcal{D}_X$-Struktur versehen. Der Pull-back von Differentialformen ist durch $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Omega^1_Y \to \Omega^1_X$ gegeben. Der $\mathcal{O}_X$-duale Morphismus ist

$$\mathcal{T}_X \to f^*\mathcal{T}_Y = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{T}_Y \qquad \theta \mapsto \widetilde{\theta}$$

Wir können daher eine links $\mathcal{D}_X$-Struktur auf $f^*\mathcal{M}$ durch

$$\theta(\psi \otimes s) = \theta(\psi) \otimes s + \psi\widetilde{\theta}(s)$$

mit $\theta \in \mathcal{T}_X$, $\psi \in \mathcal{O}_X$ und $s \in \mathcal{M}$ definieren. Falls wir ein lokales Koordinatensystem $\{y_i, \partial_i\}$ auf Y gegeben haben können wir die Wirkung expliziter schreiben:

$$\theta(\psi \otimes s) = \theta(\psi) \otimes s + \psi \sum_{i=1}^{n} \theta(y_i \circ f) \otimes \partial_i s$$

Indem wir $\mathcal{D}_Y$ als links $\mathcal{D}_Y$-Modul über die Links-Multiplikation auffassen erhalten wir einen links $\mathcal{D}_X$-Modul $f^*\mathcal{D}_Y = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$. Die rechts Multiplikation von $\mathcal{D}_Y$ auf $\mathcal{D}_Y$ liefert eine rechts $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-Modulstruktur auf $f^*\mathcal{D}_Y$.

Definition 4.8. *Den $(\mathcal{D}_X, f^{-1}\mathcal{D}_Y)$-Bimodul $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$ bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_{X\to Y}$.*

Aus der Assoziativität des Tensor-produktes folgt

$$f^*M \simeq \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$$

sp:closedemb **Beispiel 4.9.** *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von glatten algebraischen Varietäten. An jedem Punkt von X können wir lokale Koordinaten $\{y_k, \partial_{y_k}\}_{1\leq k\leq n}$ auf einer affinen offenen Teilmenge V von Y wählen, s.d. $U = X \cap V$ durch $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$ gegeben ist. Setze $x_k = y_k \circ i$. Dies gibt lokale Koordinaten für U. Der Morphismus $\mathcal{T}_U \to \mathcal{O}_U \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_V} i^{-1}\,\mathcal{T}_V$ ist durch $\partial_{x_k} \mapsto \partial_{y_k}$ für $k = 1, \ldots, r$ gegeben. Setze $\mathcal{D}' := \bigoplus_{m_1,\ldots,m_r} \mathcal{O}_U \partial_{y_1}^{m_1} \ldots \partial_{y_r}^{m_r} \subset \mathcal{D}_V$. Da $[\partial_{y_k}, \partial_{y_l}] = 0$ gilt, ist D' ein Unterring von $\mathcal{D}_V$ und es gilt $\mathcal{D}_V \simeq \mathcal{D}' \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}]$ als Links $\mathcal{D}'$-Modul. Es gilt also $\mathcal{D}_{U\to V} \simeq (\mathcal{O}_U \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_V} i^{-1}\mathcal{D}') \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}]$. Man sieht leicht, dass $\mathcal{O}_U \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_V} i^{-1}\mathcal{D}'$ ein $\mathcal{D}_U$-Untermodul von $\mathcal{D}_{U\to V}$ ist, der isomorph zu $\mathcal{D}_U$ ist. Wir erhalten folgenden Isomorphismus von links $\mathcal{D}_U$-Moduln*

$$\mathcal{D}_{U\to V} \simeq \mathcal{D}_U \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}]$$

Insbesondere ist $\mathcal{D}_{X\to Y}$ lokal-frei über $\mathcal{D}_X$ von unendlichem Rang.

Um das derivierte direkte Bild zu definieren, müssen wir noch die Existenz von geeigneten Auflösungen beweisen.

Zunächst brauchen wir den Begriff der globalen Dimension eines Ringes A. Sei M ein links A-Modul und $P \to M$ eine projektive Auflösung. Die minimale Länge aller projektiven Auflösungen von M wird projektive Dimension $pd(M)$ genannt. Das Supremum der $pd(M)$ über alle Moduln heißt globale links-Dimension von A. Wir benutzen folgende Proposition ohne Beweis.

rop:globDIm **Proposition 4.10.** *Sei $A = \mathcal{D}_X(U)$ für $U \subset X$ affin, offen oder $A = \mathcal{D}_{X,x}$ für $x \in X$. Dann ist die links und rechts globale Dimension von A kleiner gleich $2 \dim X$.*

:locfreeres **Proposition 4.11.** *Nehme an, dass X eine quasi-projektive Varietät ist (also isomorph zu einer lokal abgeschlossenen Untervarietät des projektiven Raumes ist)*

1. *Jedes $\mathcal{M} \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$ ist Quotient eines lokal-freien ($\Rightarrow$ lokal projektiven $\Rightarrow$ flachen) $\mathcal{D}_X$-Moduls*
2. *Jedes $\mathcal{M} \in Mod_c(\mathcal{D}_X)$ ist Quotient eines lokal-freien $\mathcal{D}_X$-Moduls von endlichem Rang.*

Beweis. Sei $\mathcal{M} \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$. Nehme einen quasi-koherenten $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{F}$ von $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X\mathcal{F}$ (z.B. $\mathcal{F} = \mathcal{M}$). Es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ Quotient eines lokal-freien $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}_0$ ist. In der Tat erhalten wir von solch einem $\mathcal{F}$, die Sequenz

$$\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_0 \twoheadrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{D}_X\mathcal{F}$$

von surjektiven $\mathcal{D}_X$-linearen Morphismen und $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_0$ ist eine lokal-freier $\mathcal{D}_X$-Modul. Nehme eine lokal abgeschlossene Einbettung $i : X \to Y = \mathbb{P}^n$. Es reicht zu zeigen, dass der $\mathcal{O}_Y$-Modul $i_*\mathcal{F}$ der Quotient eines lokal-freien $\mathcal{O}_Y$-Moduls ist. Da $i_*\mathcal{F}$ ein quasi-koherenter $\mathcal{O}_Y$-Modul ist, ist er eine Summe von kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Wegen [FAC, 55. Corollaire] ist $i_*\mathcal{F}$ also ein Quotient eine Summe von invertierbaren $\mathcal{O}_Y$-Moduln der Form $\mathcal{O}(m)$. Sei $Y = \bigcup_{k=0}^n U_k$ die affine Standardüberdeckung von $Y = \mathbb{P}^n$. Dann ist $\mathcal{O}(m)_{|U_k}$ frei für jedes m und jedes k. Daher ist $i_*\mathcal{F}$ ein Quotient von lokal-freien $\mathcal{O}_Y$-Moduln.

Ist $\mathcal{M}$ kohärent kann man für $\mathcal{F}$ im Beweis von 1. einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul nehmen. Damit folgt die zweite Aussage. ☐

Annahme: Im folgenden nehmen wir an, dass alle algebraischen Varietäten quasi-projektiv sind.

Korollar 4.12. *Sei $\mathcal{M} \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$.*

1. *Es existiert einen Auflösung*
$$\ldots \longrightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$
von $\mathcal{M}$ durch lokal-freie $\mathcal{D}_X$-Moduln.
2. *Es existiert eine endliche Auflösung*
$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_m \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$
von $\mathcal{M}$ durch lokal-projektive $\mathcal{D}_X$-Moduln.

Ist $\mathcal{M} \in Mod_c(\mathcal{D}_X)$ können wir annehmen, dass alle Terme der Auflösung in 1. und 2. endlichen Rang haben.

Beweis. Der erste Punkt folgt aus Proposition prop:locfreeres 4.11. Für den zweiten Punkt nehmen wir eine Auflösung wie in 1. und setzen $\mathcal{Q} = \text{Coker}\,(\mathcal{P}_{2\dim X+1} \to \mathcal{P}_{2\dim X})$. Es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{Q}$ lokal projektiv ist. Sei $U \subset X$ affin und offen. Wegen Theorem thm: KateqAffin 3.1 erhalten wir eine Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow \mathcal{P}_{2\dim X-1}(U) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{P}_1(U) \longrightarrow \mathcal{P}_0(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U)$$

wobei die $\mathcal{P}_i(U)$ projektive $\mathcal{D}_X(U)$-Moduln sind. Da die globale Dimension von $\mathcal{D}_X(U)$ kleiner gleich $2\dim X$ ist (siehe prop:globDim 4.10), folgt dass $\mathcal{Q}(U)$ ebenfalls projektiv ist. Also ist $\mathcal{Q}_{|U}$ ein projektives Objekt in $Mod_{qc}(\mathcal{D}_U)$. ☐

Sei jetzt $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten, algebraischen Varietäten. Wir definieren den Funktor

$$\begin{aligned} f^+ : D^b(\mathcal{D}_Y) &\longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X) \\ M &\mapsto \mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{P} \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}$ eine flache Auflösung von M ist.

Lemma 4.13. *Sei $for_X : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{O}_X)$ der Vergißfunktor dann ist folgendes Diagramm kommutativ*

$$\begin{tikzcd}
D^b(\mathcal{D}_Y) \arrow[r, "f^+"] \arrow[d, "for_Y"'] & D^b(\mathcal{D}_X) \arrow[d, "for_X"] \\
D^b(\mathcal{O}_Y) \arrow[r, "Lf^*"] & D^b(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Dies folgt aus $for_X\left(\mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M}\right) = \mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(for_Y\mathcal{M})$ $\square$

p:invImpreqc **Proposition 4.14.** *Der Funktor f^+ bildet $D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ auf $D^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$ ab.*

Beweis. Als Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln haben wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M} &= (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{M} \\
&= \mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M}
\end{aligned}$$

In Proposition prop:locfreeres 4.11 wurde gezeigt das ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul lokalfrei aufgelöst werden kann. Angewandt auf $\mathcal{M}$ zeigt dies die Behauptung. $\square$

mnotpresCoh **Bemerkung 4.15.** *Beachte ,dass $f^+\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_{X\to Y}$. Wenn f eine abgeschlossene Einbettung mit $\dim X < \dim Y$ ist, dann ist $\mathcal{D}_{X\to Y}$ ein lokal-freier $\mathcal{D}_X$-Modul von unendlichem Rang (siehe Besipiel bsp:closedemb 4.9). Dies zeigt, dass f^+ $D^b_c(\mathcal{D}_Y)$ nicht auf $D^b_c(\mathcal{D}_X)$ schickt.*

Wir werden auch das verschobene inverse Bild

$$f^{\maltese} = f^+[\dim X - \dim Y] : D^b(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X)$$

betrachten, welches kompatibel mit der Riemann-Hilbert Korrespondenz ist.

Proposition 4.16. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen von glatten algebraischen Varietäten. Es gilt*

$$(g \circ f)^+ \simeq f^+ \circ g^+$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y\to Z} &= (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}(\mathcal{O}_Y \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Z} g^{-1}\mathcal{D}_Z) \\
&= (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{P} \\
&= \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{P} \\
&= \mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} (f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{(g\circ f)^{-1}\mathcal{O}_Z} (g\circ f)^{-1}\mathcal{D}_Z) \\
&= \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} (f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{(g\circ f)^{-1}\mathcal{O}_Z} (g\circ f)^{-1}\mathcal{D}_Z) \\
&= \mathcal{O}_X \otimes_{(g\circ f)^{-1}\mathcal{O}_Z} (g\circ f)^{-1}\mathcal{D}_Z \\
&= \mathcal{D}_{X\to Z}
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\mathcal{D}_{X\to Z} \simeq \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y\to Z} \simeq \mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y\to Z}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)^{+}\mathcal{M} &= \mathcal{D}_{X\to Z} \overset{L}{\otimes}_{(g\circ f)^{-1}\mathcal{D}_Z} (g\circ f)^{-1}\mathcal{M} \\
&= \left(\mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y\to Z}\right) \overset{L}{\otimes}_{(g\circ f)^{-1}\mathcal{D}_Z} (g\circ f)^{-1}\mathcal{M} \\
&= \mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\left(\mathcal{D}_{Y\to Z} \overset{L}{\otimes}_{g^{-1}\mathcal{D}_Z} g^{-1}\mathcal{M}\right) \\
&= f^{+}(g^{+}\mathcal{M})
\end{aligned}
$$

□

invImopenEMb **Beispiel 4.17.** *Sei $U \subset X$ offen und $j : U \to X$ die Einbettung. Es gilt $\mathcal{D}_{U\to X} = j^{-1}\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_U$. Daher gilt $j^{+} = j^{-1}$.*

othMorinvIm **Proposition 4.18.** *Sei $f : X \to Y$ ein glatter Morphismus zwischen glatten algebraischen Varietäten. Es gilt*

1. *Für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_Y)$ gilt $\mathcal{H}^i(f^{+}\mathcal{M}) = 0$ für $i \neq 0$.*
2. *Für $\mathcal{M} \in Mod_c(\mathcal{D}_Y)$ gilt $f^{+}\mathcal{M} \in Mod_c(\mathcal{D}_X)$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Flachheit von $\mathcal{O}_X$ über $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ und daher gilt $f^{+}\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{M}$.

Für die zweite Behauptung reicht es zu zeigen, dass der Morphismus $\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$ mit $P \mapsto P(1\otimes 1)$ surjektiv ist. Da die Aussage lokal ist, können wir annehmen, dass X und Y affin ist und lokale Koordinaten $\{x_i, \partial_{x_i}\}$ und $\{y_i, \partial_{y_i}\}_{i=1,\dots,m}$ haben, s.d. gilt

$$
\partial_{x_i} \mapsto \begin{cases} 1\otimes \partial_{y_i} & \text{für } 1 \le i \le m \\ 0 & \text{für } m+1 \le i \le n \end{cases}
$$

unter der kanonischen Abbildung $\mathcal{T}_X \to f^{*}\mathcal{T}_y = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{T}_Y$. Dann gilt

$$
\mathcal{D}_{X\to Y} = \bigoplus_{r_1,\dots,r_m} \mathcal{O}_X \partial_{y_1}^{r_1}\dots\partial_{y_m}^{r_m}
$$

und der kanonische Isomorphismus $\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$ ist durch $\partial_{x_1}^{r_1}\dots\partial_{x_n}^{r_n} \mapsto \delta_{r_{m+1}+\dots r_n,0}\partial_{y_1}^{r_1}\dots\partial_{y_m}^{r_m}$ gegeben. □

Sei X, Y glatte Varietäten der Dimension r und n und $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung. Wir geben jetzt eine Beschreibung der Kohomologiegarben von $i^{+}\mathcal{M}$ für $\mathcal{M} \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$.

Proposition 4.19. *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von glatten algebraischen Varietäten. Sei $d := \dim Y - \dim X$. Dann gilt für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_Y)$, dass $H^j(i^{+}\mathcal{M}) = 0$ für $j \neq -d, \dots, 0$.*

Wir haben eine lokal-freie Auflösung

$$
0 \longrightarrow \mathcal{K}_{n-r} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \tag{4.1.1}
$$ eq:resOX

von $\mathcal{O}_X$ als $i^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul. Wir beschreiben diese in lokalen Koordinaten $\{y_i, \partial_{y_i}\}$ wie in Beispiel 4.9. bsp:closedemb
Definiere

$$
\mathcal{K}_j := \bigwedge^{j}\left(\bigoplus_{k=r+1}^{n} i^{-1}\mathcal{O}_Y dy_k\right)
$$

Wir haben den kanonischen Morphismus $i^{-1}\mathcal{O}_Y = \mathcal{K}_0 \to \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{K}_j \to \mathcal{K}_{j-1}$ ist durch

$$f dy_{k_1} \wedge \ldots \wedge dy_{k_j} \mapsto \sum_{p=1}^{j} (-1)^{p+1} y_{k_p} f dy_{k_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_{k_p}} \wedge \ldots \wedge dy_{k_j}$$

gegeben. Um die Konstruktion zu globalisieren, muss man die Wohldefiniertheit unter Koordinatenwechseln prüfen. Ist $\{z_l, \partial_{z_l}\}$ ein anderes Koordinatensystem, s.d. $z_{r+1} = \ldots = z_n = 0$ die Untervarietät X definiert , dann gilt $y_k = \sum_{l=r+1}^{n} c_{kl} z_l$ und die Korrespondenz $dy_k \mapsto \sum_{l=r+1}^{n} c_{kl} dz_l$ gibt die Identifizierung.

Aus der obigen Auflösung erhalten wir eine lokal-freie Auflösung des rechts $i^{-1}\mathcal{D}_Y$-Moduls $\mathcal{D}_{X\to Y}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{n-r} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}\mathcal{D}_Y \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{K}_0 \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}\mathcal{D}_Y \longrightarrow \mathcal{D}_{X\to Y} \longrightarrow 0 \qquad (4.1.2)$$ eq:ResDXY

Daher kann man die Kohomologie von $i^{+}\mathcal{M}$ mittels des Komplexes

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{K}_{n-r} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}\mathcal{M} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{K}_0 \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

berechnen. Das zeigt aber die Aussage.

Wir haben in Proposition prop:smoothMorinvIm 4.18 gezeigt, dass das inverse Bild eines kohärenten $\mathcal{D}$-Moduls unter einem glatten Morphismus wieder kohärent ist. In Bemerkung bem:invImnotpresCoh 4.15 haben wir gezeigt, dass kohärente Moduln unter inversen Bildern im Allgemeinen nicht erhalten bleiben. Wir untersuchen jetzt eine hinreichend Bedingung, dass kohärente Moduln erhalten bleiben.

Für einen Morphismus $f : X \to Y$ von glatten algebraischen varietäten haben wir folgende natürlich Morphismen

$$T^*X \xleftarrow{\rho_f} X \times_Y T^*Y \xrightarrow{\varpi_f} T^*Y$$

wobei ρ_f der Pull-back von DIfferentialformen ist und ϖ_f die Projektin auf den zweiten Faktor.

Ist f eine abgeschlossene Einbettung (bzw. glatt) , dann ist ρ_f glatt (bzw. eine abgeschlossene Einbettung) und ϖ_f ist eine abgeschlossene Einbettung (bzw. glatt). Wir setzen

$$T^*_X Y := \rho_f^{-1}(T^*_X X) \subset X \times_Y T^*Y$$

Wenn f eine abgeschlossene Einbettung ist, dann ist $T^*_X Y$ das konormalen Bündel von X in Y.

vImnonCharex **Lemma 4.20.** *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen von glatten algebraischen Varietäten. Dann haben wir folgendes kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
T^*X & X \times_Y T^*Y \arrow[l, "\rho_f"'] \arrow[d, "\varpi_f"'] & X \times_Z T^*Z \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] \\
 & T^*Y & Y \times_Z T^*Z \arrow[l, "\rho_g"] \arrow[d, "\varpi_g"] \\
 & & T^*Z
\end{tikzcd}$$

s.d. $\rho_f \circ \varphi = \rho_{g\circ f}$, $\varpi_g \circ \psi = \varpi_{g\circ f}$ gilt und das Quadrat in der oberen rechten Ecke kartesisch ist.

Definition 4.21. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten algebraischen varietäten und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_Y$-Modul. Wir sagen, dass F* ***nicht-charakteristisch*** *bzgl. $\mathcal{M}$ ist , falls die Bedingung*

$$\varpi_f^{-1}(Ch(\mathcal{M})) \cap T^*_X Y \subset X \times_Y T^*_Y Y$$

gilt.

nCharHypsurf **Beispiel 4.22.** *Wir betrachten den Fall der Einbettung einer Hyperfläche $f : X \to Y$. In diesem Fall ist das Konormalenbündel $T^*_X Y$ ein geradenbündel auf X. Sei $P \in D_Y$ ein Differentialoperator der Ordnung $m \geq 0$ und setze $\mathcal{M} = \mathcal{D}_Y/\mathcal{D}_Y P$. In diesem Fall ist $Ch(M)$ die Nullstellenmenge des Symbols $\sigma_M(P)$ und daher ist f nicht-charakteristisch bzgl. des kohärenten $\mathcal{D}_Y$-Moduls $\mathcal{M}$ genau dann wenn*

$$(\sigma_m(P))(\xi) \neq 0 \qquad \forall\, \xi \in T^*_X Y \setminus (\textit{zero-section of } T^*_X Y)$$

gilt. Wir nehmen jetzt lokale Koordinaten $\{z_i, \partial_i\}_{1 \leq i \leq n}$ von Y, s.d. $z_1 = 0$ die definierende Gleichung von X ist. seine $(z_1, \ldots, z_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ die entsprechenden Koordinaten auf T^*Y. Dann kann die Bedingung folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\sigma_m(P)(0, z_2, \ldots, z_n, 1, 0, \ldots, 0) \neq 0 \qquad \forall\, (z_2, \ldots, z_n)$$

bzw.

$$\frac{\partial^m}{\partial \xi_1^m} \sigma_m(P)(0, z_2, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0 \qquad \forall\, (z_2, \ldots, z_n)$$

In der klassichen Analysis sagen wir in diesem Fall, dass Y eine nicht-charakteristische Hyperfläche von X bzgl. des Differentialoperaotrs P ist. Wir möchten zeigen, das $\mathcal{H}^0(f^+\mathcal{M})$ ein lokal-freier $\mathcal{D}_X$-Modul vom Rang m ist. Per Definition haben wir

$$H^0(f^+\mathcal{M}) = (\mathcal{D}_Y/z_1\mathcal{D}_Y) \otimes_{\mathcal{D}_Y} (\mathcal{D}_Y/\mathcal{D}_Y P) \simeq \mathcal{D}_Y(z_1\mathcal{D}_Y + \mathcal{D}_Y P)$$

Setze $\mathcal{D}' = \sum_{(j_2,\ldots,j_n)} \mathcal{O}_Y \partial_2^{j_2} \ldots \partial_n^{j_n} \subset \mathcal{D}_Y$. Indem wir lokal arbeiten und den leitkoeffizienten von ∂_1^m invertieren, können wir annehmen, dass P die Form

$$P = \partial_1^m + \sum_{i=0}^{m-1} P_i \partial_1^i \qquad P_i \in \mathcal{D}'$$

hast. Wir zeigen, dass

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_X^{\oplus m} & \longrightarrow & \mathcal{D}_Y/(z_1\mathcal{D}_Y + \mathcal{D}_Y P) \\ (Q_0, \ldots, Q_{m-1}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} Q_j \partial_1^j \end{array}$$

ein Isomorphismus von $\mathcal{D}_X$-Moduln ist. Dafür müssen wir nur zeigen, dass für jedes $R \in D_Y$ ein eindeutiges $Q \in D_Y$ und $R_0, \ldots, R_{m-1}$ßinD' existiert, s.d.

$$R = QP + \sum_{j=0}^{m-1} R_j \partial_1^j$$

gilt. Beachte, dass $\mathcal{D}_Y = \bigoplus_{j=0}^{\infty} D' \partial_1^j$ gilt. Daher können wir R eindeutig als

$$R = \sum_{j=0}^{p} S_j \partial_1^j \qquad S_j \in D'$$

schreiben. Gilt $p \geq m$, dann ist $R - S_p \partial_1^{p-m} P \in \sum_{j=0}^{p-1} D' \partial_1^j$. Wir können daher die Existenz von Q und $R_0, \ldots, R_{m-1}$ per Induktion nach p zeigen. Um die Eindeutigkeit zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $D_Y P \cap (\sum_{j=0}^{m-1} D' \partial_1^j) = 0$ gilt. Nehme an es existiert ein $Q \in D_Y$, s.d. $QP \in \bigoplus_{j=0}^{m-1} D' \partial_1^j$ gilt. Ist $Q \neq 0$, dann können wir $Q = \sum_{j=0}^{p} T_j \partial_1^j$ mit $T_j \in D'$ und $T_p \neq 0$ schreiben. Dann gilt $QP \in T_p \partial_1^{m+p} + \sum_{j=0}^{m+p-1} D' \partial_1^j$. Das ist ein Widerspruch, also gilt $Q = 0$.

Beispiel 4.23. *Ein glatter Morphismus $f : X \to Y$ ist nicht-charakteristisch bzgl. jedem kohärenten $\mathcal{D}_Y$-Modul.*

Theorem 4.24. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen glatten, algebraischen Varietäten und sei $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_Y$-Modul. Nehme an, dass F nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{M}$ ist. Dann gilt*

1. *$\mathcal{H}^j(f^+\mathcal{M}) = 0$ für $j \neq 0$.*
2. *$\mathcal{H}^0(f^+\mathcal{M})$ ist ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul.*
3. *$Ch(\mathcal{H}^0(f^+\mathcal{M})) \subset \rho_f(\overline{\omega}_f^{-1}(Ch\mathcal{M})$.*

Für den Beweis brauchen wir noch folgendes Lemma.

ulocnonchar

Lemma 4.25. *Sei $f : X \to Y$ die Einbettung einer Hyperfläche und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_Y$-Modul. Nehme an, dass f nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{M}$ ist. Für jedes $x \in X$ existiert eine offene, affine Umgebung U, s.d. $u \in \mathcal{M}(U)$ ein lokaler Differentialoperator $P \in \mathcal{D}_Y(U)$, s.d. $Pu = 0$ gilt und f nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U P$ ist. Insbesondere existiert lokal eine exakte Sequenz*

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U P_i \longrightarrow \mathcal{M}_{|U} \longrightarrow 0$$

s.d. f nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U P_i$ für $i = 1, \ldots, r$ ist.

Proof. Aus $Ch(\mathcal{D}_Y u) \subset Ch(\mathcal{M}_{|U})$ folgt, dass f nicht-charakteristisch bzgl. des $\mathcal{D}_U$-Untermoduls $\mathcal{D}_U u$ von $\mathcal{M}_{|U}$ ist. Die Varietät $Ch(\mathcal{D}_U u)$ ist die Nullstellenmenge von $gr^F I$ wobei $I = \{Q \in D_U \mid Qu = 0\}$ ist. Da T_X^*Y ein Geradenbündel auf X ist, existiert lokal ein $P \in I$, s.d. f nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U P$ ist. $\square$

Beweis von Theorem 2.4.6. **Schritt 1**: Wir betrachten zuerst den Fall, in dem X eine Hyperfläche $\{z_1 = 0\}$ von Y ist. Wir zeigen 1. : Es reicht die Aussage lokal zu beweisen. Wir nehmen also eine affine offene Menge U und arbeiten mit dem Modul der globalen Schnitte $M := \mathcal{M}(U)$. Da $f^+\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ lokal durch den Komplex

$$M \xrightarrow{z_1 \cdot} M$$

dargestellt wird, der in den Graden -1 und 0 konzentriert ist, reicht es zu zeigen, dass $M \xrightarrow{z_1} M$ injektiv ist. Nehme an es existiert ein $u \in M$ mit $z_1 u = 0$. Wegen Lemma lem:ulocnonchar 4.25 existiert ein $P \in D_U$, s.d. $Pu = 0$ gilt und f nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{D}_U/\mathcal{D}_U P$ ist. Dann ist P ein Differentialoperator wie in Beispiel bsp:nonCharHypsurf 4.22. Sei $m \geq 0$ die Ordnung von P und definiere $ad_{z_1}(P) = [z_1, P] = z_1 P - P z_1 \in D_U$. Dann ist $ad_{z_1}^m(P) \in O_U^* \subset D_U$. Aus $ad_{z_1}^m(P)u = 0$ folgt daher $u = 0$. Das zeigt den ersten Punkt. Wir zeigen 2. und 3. : Es reicht wieder lokal zu arbeiten. Sei also $x \in X$ und U eine offene, affine Umgebung von x in Y. Setze $M := \mathcal{M}(U)$. Sei F eine gute Filtrierung von M, dann ist $gr^F M$ ein kohärenter $gr^F D_U$-Modul. Setze $N := M/z_1 M$ und definiere eine Filtrierung $F_i N = Im(F_i M/z_1 F_i M \to N = M/z_1 M)$. Es reicht zu zeigen, dass $gr^F N$ ein kohärenter $gr^F D_V$-Modul ist (wobei $V = U \cap X$), dessen Träger in $\rho_f \overline{\omega}_f^{-1}(Ch(M))$ enthalten ist. Wir haben folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F_{i-1}M/z_1F_{i-1}M \arrow[r] \arrow[d] & F_iM/z_1F_iM \arrow[r] \arrow[d] & gr_i^F M/z_1 gr_i^F M \arrow[d, dotted] \\
F_{i_1}N \arrow[r] & F_iN \arrow[r] & gr_i^F N
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $gr^F M/z_1 gr^F M \to gr^F N$ ein Epimorphismus. Da f nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{M}$ ist, ist $\rho_f : V \times_U T^*U \supset \overline{\omega}_f^{-1}(\operatorname{supp} gr^F M) \to T^*V$ ein endlicher Morphismus. Da die charakteristische Varietät konisch ist, folgt, dass $\overline{\omega}_f^{-1}(\operatorname{supp} gr^F M)$ schon in $T^*V \subset V \times_U T^*V$ enthalten ist. Es folgt also, dass $gr^F M/z_1 gr^F M$ ein endlich erzeugter $gr^F D_V$-Modul ist und damit ist auch $gr^F N$ ein endlich erzeugter $gr^F D_V$-Modul und sein Träger ist in $\rho_f(\overline{\omega}_f^{-1}(\operatorname{supp} gr^F M)$ enthalten.

Schritt 2: Wir behandeln jetzt den Fall einer allgemeinen abgeschlossenen Einbettung. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach der Kodimension von X. Der Fall $\mathrm{codim}_Y X = 1$ wurde in Schritt 1 behandelt. Im allgemeinen Fall können wir $f : X \hookrightarrow Y$ faktorisieren als $X \overset{g}{\hookrightarrow} Z \overset{h}{\hookrightarrow} Y$ wobei g und h abgeschlossene Einbettungen von glatten Varietäten mit $\mathrm{codim}_Z X, \mathrm{codim}_Y Z < \mathrm{codim}_Y X$ ist. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T^*X & X \times_Z T^*Z \arrow[l, "\rho_g"'] \arrow[d, "\varpi_g"'] & X \times_Y T^*Y \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] \\
& T^*Z & Z \times_Y T^*Y \arrow[l, "\rho_h"] \arrow[d, "\varpi_h"] \\
& & T^*Y
\end{tikzcd}$$

Wir können Z so wählen, dass eine offene Umgebung U von X in Z existiert , s.d.

$$\varpi_h^{-1}(Ch(\mathcal{M})) \cap T_U^*Y \subset U \times_Y T_Y^*Y$$

erfüllt ist. Also können wir annehmen, dass Z nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{M}$ ist. Aus der Induktionsannahmen folgt dann, dass $\mathcal{H}^i(h^+\mathcal{M}) = 0$ für $i \neq 0$ gilt und $\mathcal{L} := \mathcal{H}^0(h^+\mathcal{M}$ ist ein kohärenter $\mathcal{D}_Z$-Modul mit $Ch(\mathcal{L}) \subset \rho_h(\varpi_h^{-1})/Ch(\mathcal{M}))$. Es folgt leicht aus Lemma 4.20, dass g nicht-charakteristisch bzgl. $\mathcal{L}$ ist. Nach Induktionsannahme gilt daher $\mathcal{H}^i(f^+\mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}^i(g^+\mathcal{L}) = 0$ für $i \neq 0$ und $\mathcal{H}^0(f^+\mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}^0(g^+\mathcal{L})$ ist ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul der folgende Inklusionen erfüllt

$$Ch(\mathcal{H}^0(f^+\mathcal{M})) = Ch(\mathcal{H}^0(g^+\mathcal{L})) \subset \rho_g \varpi_g^{-1}(Ch(\mathcal{L})) \subset \rho_g \varpi_g^{-1} \rho_h \varpi_h^{-1}(Ch(\mathcal{M})) = \rho_f \varpi_f^{-1}(Ch(\mathcal{M}))$$

Schritt 3: Ist $f : X = Y \times Z \to Y$ die Projektion, dann folgt die Behauptung ais dem Isomorphismus $f^+\mathcal{M} \simeq \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{O}_Z$.

Schritt 4: Im allgemeinen Fall eines Morphismus $f : X \to Y$ faktorisieren wir f per Grapheinbettung in eine abgeschlossene Einbettung und eine Projektion. Die Aussage folgt dann mit Schritt 2 und Schritt 3.

□

4.2 Tensor-Produkte

Der Bi-Funktor

$$(\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\bullet) : Mod(\mathcal{D}_X) \times Mod(\mathcal{D}_X) \longrightarrow Mod(\mathcal{D}_X)$$

ist rechts exakt bzgl. beider Faktoren. Daher können wir den links-derivierten Funktor

$$(\bullet) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\bullet) : D^b(\mathcal{D}_X) \times D^b(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X)$$

durch flache Auflösungen von M oder N definieren. Da ein flacher $\mathcal{D}_X$-Modul auch übe $\mathcal{O}_X$ flach ist, erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
D^b(\mathcal{D}_X) \times D^b(\mathcal{D}_X) \arrow[r, "(\bullet) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\bullet)"] \arrow[d] & D^b(\mathcal{D}_X) \arrow[d] \\
D^b(\mathcal{O}_X) \times D^b(\mathcal{O}_X) \arrow[r, "(\bullet) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\bullet)"] & D^b(\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Insbesondere bildet der Funktor $(\bullet) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\bullet)$ $D^b_{qc}(\mathcal{D}_X) \times D^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$ in $D^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$ ab.

Sind X und Y glatte algebraische Varietäten und $p_1 : X \times Y \to X$ bzw. $p_2 : X \times Y \to Y$ die Projektionen. Für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{N} \in Mod(\mathcal{D}_Y)$ definieren wir

$$M \boxtimes N := \mathcal{D}_{X\times Y} \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\mathcal{D}_Y} (p_1^{-}\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\mathcal{N})$$

Da der Bifunktor

$$(\bullet) \boxtimes (\bullet) : Mod(\mathcal{D}_X) \times Mod(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow Mod(\mathcal{D}_{X\times Y})$$

bzgl- beiden Faktoren exakt ist, erweitert er sich zu einem Funktor

$$(\bullet) \boxtimes (\bullet) : D^b(\mathcal{D}_X) \times D^b(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_{X\times Y})$$

Man sieht leicht, dass der Funktor $(\bullet) \boxtimes (\bullet)$ quasi-kohärente und kohärente Garben erhält.

Lemma 4.26. *Sei X eine glatte algebraische Varietät, $\Delta_X : X \to X \times X$ die Diagonaleinbettung und $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ dann gilt*

$$M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \Delta_X^+(M \boxtimes N)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ der Isomorphismus $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \mathcal{H}^0 \Delta_X^+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$ gilt. Wir haben folgenden Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^0 \Delta_X^+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) &\simeq \mathcal{D}_{X\to X\times X} \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{X\times X}} i^{-1}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \\
&\simeq (\mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{X\times X}} i^{-1}\mathcal{D}_{X\times X}) \otimes_{i^{-1}\mathcal{D}_{X\times X}} i^{-1} \left(\mathcal{D}_{X\times X} \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}_X \otimes p_2^{-1}\mathcal{D}_X} (p_1^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\mathcal{N} \right) \\
&\simeq \mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{X\times X}} i^{-1} \left(\mathcal{D}_{X\times X} \otimes_{p_1^{-1}\mathcal{D}_X \otimes p_2^{-1}\mathcal{D}_X} (p_1^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} p_2^{-1}\mathcal{N} \right) \\
&\simeq \mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{X\times X}} i^{-1}\mathcal{D}_{X\times X} \otimes_{\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{D}_X} (\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{N}) \\
&\simeq \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}
\end{aligned}$$

Die Kompatibiltät der $\mathcal{D}_X$-Wirkung rechnet man lokal nach.Wir bemerken noch, dass wenn $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ flache $\mathcal{D}_X$-Moduln sind, dass dann $\mathcal{P}_1 \boxtimes \mathcal{P}_2$ ein flacher $\mathcal{D}_{X\times X}$-Modul ist. Die Aussage des Lemmas zeigt man jetzt mit Hilfe flacher auflösungen von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. □

Proposition 4.27. *1. Seien $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ Morphismen zwischen glatten Varietäten. Dann gilt für $M_1 \in D^b(\mathcal{D}_{Y_1})$ und $M_2 \in D^b(\mathcal{D}_{Y_2})$ dass*

$$(f_1 \times f_2)^+(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq f_1^+\mathcal{M}_1 \boxtimes f_2^+\mathcal{M}_2$$

2. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten algebraischen Varietäten. Dann gilt für $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_Y)$

$$f^+(\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}) \simeq f^+\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} f^+\mathcal{N}$$

Beweis. Auf dem Level von $\mathcal{O}_{X\times X}$-Moduln folgt die erste Aussage aus

$$(f_1 \times f_2)^*(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2) \simeq f_1^*\mathcal{M}_1 \boxtimes f_2^*\mathcal{M}_2$$

Die Kompatibilität der $\mathcal{D}_{X\times X}$-Wirkung rechnet man wieder lokal nach. Die zweite Aussage folgt aus:

$$f^+(\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}) \simeq f^+\Delta_Y^+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \simeq \Delta_X^+(f \times f)^+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \simeq \Delta_X^+(f^+\mathcal{M} \boxtimes f^+\mathcal{N}) \simeq f^+\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} f^+\mathcal{N}$$

□

Proposition 4.28. *Sei $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{M}' \in D^b(\mathcal{D}_X^{op})$. Dann haben wir folgende Isomorphismus von Garben von k-Vektorräumen*

$$(\mathcal{M}' \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}' \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \simeq (\mathcal{M}' \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N}$$

Beweis. Indem wir flache Auflösungen von $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L}$ nehmen, können wir $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{M}' \in Mod(\mathcal{D}_X^{op})$ annehmen, Die Aussage folgt dann aus Lemma lem:tensorproductex 4.6. □

4.3 Direkte Bilder

Wie wir schon in Abschnitt subsec:dirImaff 1.8 gesehen haben läßt sich das direkte Bild einfacher für einen rechts $\mathcal{D}$-Modul erklären. Wir definieren den additiven Funktor

$$f_*((\bullet) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) : Mod(\mathcal{D}_X^{op}) \longrightarrow Mod(\mathcal{D}_Y^{op})$$

Wir konstruieren jetzt das direkte Bild für Links-Moduln über das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Mod(\mathcal{D}_X) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\bullet)"] & Mod(\mathcal{D}_Y) \arrow[d, "\Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\bullet)"] \\
Mod(\mathcal{D}_X^{op}) \arrow[r] & Mod(\mathcal{D}_Y^{op})
\end{tikzcd}$$

Für einen links $\mathcal{D}_X$-Modul erhalten wir also

$$\Omega_Y^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*((\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})$$

Wegen Lemma lem:tensorproductex 4.6 haben wir folgenden Isomorphismus von rechts $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-Moduln

$$(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} \simeq (\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$$

wobei $f^{-1}\mathcal{D}_Y$ auf $(\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes_{\mathcal{D}X} \mathcal{M}$ durch

$$((\omega \otimes R) \otimes s)P = (\omega \otimes RP) \otimes s)$$

operiert ($\omega \in \Omega_X, R \in \mathcal{D}_{X\to Y}, s \in \mathcal{M}, P \in \mathcal{D}_Y$). Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
&\Omega_Y^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*((\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \\
\simeq &\Omega_Y^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*((\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}) \\
\simeq &f_*((\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})
\end{aligned}$$

defn:DYX **Definition 4.29.** *Wir definieren den $(f^{-1}\mathcal{D} - Y, \mathcal{D}_X)$-Bimodul $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ durch*

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} := \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Omega_Y^{\otimes -1}$$

sp:DYXclosed **Beispiel 4.30.** *Wir geben eine lokale Beschreibung von $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ im Fall einer abgeschlossenen Einbettung $i : X \to Y$. Nehme lokale Koordinaten $\{y_k, \partial_{y_k}\}$ auf $V \subset Y$ und setze $U = V \cap X$ wie in Beispiel bsp:closedemb 4.9 sowie $x_k = y_k \circ i$. Dann gilt*

$$\mathcal{D}_{V\leftarrow U} \simeq \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_U$$

wobei die links $i^{-1}\mathcal{D}_V$-Modulstruktur folgendermaßen beschrieben wird: Sei $\mathcal{D}' = \bigoplus_{m_1,\ldots,m_r} \partial_{y_1}^{m_1} \ldots \partial_{y_r}^{m_r} \mathcal{O}_V \subset \mathcal{D}_V$. Es gilt $\mathcal{D}_V \simeq \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}'$ und damit $i^{-1}\mathcal{D}_V \simeq \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} i^{-1}\mathcal{D}'$. Es reicht daher die Wirkung von $\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots \partial_{y_n}]$ und $i^{-1}\mathcal{D}'$ auf $\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} i^{-1}\mathcal{D}_U$ zu erklären. Die Wirkung von $\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots \partial_{y_n}]$ ist Multiplikation mit dem ersten Faktor von $\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} i^{-1}\mathcal{D}'$. Sei jetzt $Q \in i^{-1}\mathcal{D}'$, $F \in \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}]$ und $R \in \mathcal{D}_X$. Gilt $QF = \sum_k F_k Q_k$ (für $F_k \in \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}]$ und $Q_k \in i^{-1}\mathcal{D}'$) im Ring $i^{-1}\mathcal{D}_Y$, dann ist die Wirkung von Q auf $F \otimes R \in \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X$ durch

$$Q(F \otimes R) = \sum_k F_k \otimes Q_k R$$

Schließlich ist die $i^{-1}\mathcal{D}'$-Linksmodulstruktur von $\mathcal{D}_X \simeq i^{-1}\mathcal{D}' \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ durch $Q(P \otimes 1) = QP \otimes 1$ gegeben.

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten algebraischen Varietäten. Wir definieren Funktoren

$$\begin{aligned}
D^b(\mathcal{D}_X) \ni \mathcal{M} &\mapsto \mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \in D^b(f^{-1}\mathcal{D}_Y) \\
D^b(f^{-1}\mathcal{D}_Y) \ni \mathcal{N} &\mapsto Rf_*(\mathcal{N}) \in D^b(\mathcal{D}_Y)
\end{aligned}$$

indem wir eine flache Auflösung von $\mathcal{M}$ und eine injektive Auflösung von $\mathcal{N}$ benutzen. Wir erhalten einen Funktor

$$\begin{aligned} f_+ : D^b(\mathcal{D}_X) &\longrightarrow D^b(\mathcal{D}_Y) \\ \mathcal{M} &\mapsto f_*\mathcal{M} := Rf_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}) \end{aligned}$$

Wir haben auch ein direktes Bild $f_+ : D^b(\mathcal{D}_X^{op}) \to D^b(\mathcal{D}_Y^{op})$ für rechts $\mathcal{D}$-Moduln, welches durch

$$f_+\mathcal{M} := Rf_*(\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})$$

definiert ist. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} D^b(\mathcal{D}_X) \arrow[r, "f_+"] \arrow[d, "\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\bullet)"'] & D^b(\mathcal{D}_Y) \arrow[d, "\Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\bullet)"] \\ D^b(\mathcal{D}_X^{op}) \arrow[r, "f_+"] & D^b(\mathcal{D}_Y^{op}) \end{tikzcd}$$

Proposition 4.31. *Sei $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen zwischen glatten algebraischen Varietäen. Dann gilt*

$$(g \circ f)_+ \simeq g_+ \circ f_+$$

Beweis. Sei $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$. Es gilt

$$(g \circ f)_+(\mathcal{M}) \simeq ((g \circ f)_+\mathcal{M}^r)^\ell \simeq$$

Es reicht also die Aussage für rechts Moduln zu prüfen. Für $\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_X^{op})$ gilt

$$\begin{aligned} (g_+ \circ f_+)\mathcal{N} &\simeq Rg_*\left(Rf_*\left(\mathcal{N} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}\right) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to Z}\right) \\ &\longrightarrow Rg_*Rf_*\left(\left(\mathcal{N} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}\right) \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y\to Z}\right) \\ &\simeq R(g\circ f)_*\left(\mathcal{N} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_{Y\to Z}\right)\right) \\ &\simeq R(g\circ f)_*\left(\mathcal{N} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Z}\right) \\ &\simeq (g \circ f)_+\mathcal{N} \end{aligned}$$

wobei die Existenz des zweiten Morphismus aus der Existenz eines Morphismus

$$Rf_*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{G} \longrightarrow Rf_*(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{G}) \tag{4.3.1}$$

eq:Projform0

folgt. Dieser wird aus

$$f^{-1}(Rf_*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{G}) \simeq f^{-1}Rf_*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{G}$$

mittels Adjunktion konstruiert. Wir beweisen, dass (4.3.1) ein Isomorphismus ist. Wir können annehmen, dass Y affin ist. Außerdem können wir $\mathcal{G}$ durch einen Komplex von freien links $\mathcal{D}_Y$-Moduln ersetzen. Es reicht also folgendes zu zeigen:

$$(Rf_*\mathcal{F})^{\bigoplus I} \simeq Rf_*\left(\mathcal{F}^{\bigoplus I}\right)$$

In (Hartshorne, III, Theorem 2.7, Lemma 2.8) wird aber gezeigt, dass auf noetherschen toplogischen Räumen Rf_* mit beliebigen direkten Summen vertauscht. Das bedeutet der Morphismus (4.3.1) ist ein Isomorphismus. Das zeigt die Behauptung. ∎

dirImopenEmb **Beispiel 4.32.** *Sei $j : U \to X$ eine offene Einbettung. Dann gilt*

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow U} = \Omega_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{D}_{U \to X} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}\Omega_X^{\otimes -1} \simeq \mathcal{D}_U$$

Beispiel 4.33. *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Eunbettung und $V \subset Y$ offen und affin mit lokalen Koordinaten $\{y_i, \partial_{y_i}\}$,s.d. $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$ eine Gleichung für $U := X \cap V$ ist. Aus Beispiel 4.30 folgt, dass* bsp:DYXclosed

$$i_+\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} i_*\mathcal{M}$$

gilt, Die Wirkung von $\mathcal{D}_Y$ auf $\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} i_*\mathcal{M}$ ist folgendermaßen gegeben. Das Vektorfeld ∂_{y_k} für $k > r$ ist durch Multiplikation auf dem ersten Faktor $\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}]$ gegeben. Die Multiplikation mit ∂_{y_k} für $k \leq r$ ist durch

$$\partial_{y_k}(1 \otimes m) = 1 \otimes \partial_{y_k} m$$

gegeben. Multiplikation mit φ ist durch

$$\varphi(1 \otimes m) = 1 \otimes (\varphi_{|X})m$$

gegeben.

Das zeigt folgende Aussagen.

Proposition 4.34. *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von glatten algebraischen Varietäten.*

1. *Für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ gilt $\mathcal{H}^k(i_+\mathcal{M}) = 0$ für $k \neq 0$. Insbesondere ist i_+ ein exakter Funktor.*
2. *Der Funktor i_+ erhält quasi-kohärente $\mathcal{D}$-Moduln.*

Um das direkte Bild für Projektionen $Y \times Z \to Z$ zu untersuchen brauchen wir folgende Auflösungen.

lem:resOX **Lemma 4.35.** *Sei X eine n-dimensionale glatte, algebraische Varietät. Wir haben die folgende Auflösung für den links $\mathcal{D}_X$-Modul $\mathcal{O}_X$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^n \mathcal{T}_X \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^0 \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Wobei die letzte Abbildung durch die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^0 \mathcal{T}_X \simeq \mathcal{D}_X &\longrightarrow \mathcal{O}_X \\ P &\mapsto P(1) \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

gegeben ist, Das Differential ist

$$d : \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^k \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^{k-1} \mathcal{T}_X$$

ist durch

$$d(P \otimes \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k) = \sum_i (-1)^{i+1} P\theta_i \otimes \theta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\theta}_i \wedge \ldots \wedge \theta_k + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} P \otimes [\theta_i, \theta_j] \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\theta}_i \wedge \ldots \wedge \widehat{\theta}_j \wedge \ldots \wedge \theta_k$$

Diese Auflösung heißt Spencer Auflösung von $\mathcal{O}_X$.

Wir haben folgende lokal-freie Auflösung des rechts $\mathcal{D}_X$-Modul Ω_X:

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0$$

Die letzte Abbildung ist durch

$$\begin{aligned} \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X &\longrightarrow \Omega_X \\ \omega \otimes P &\mapsto \omega P \end{aligned}$$

gegeben. Das Differential

$$d : \Omega_X^k \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow \Omega_X^{k+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$$

ist durch

$$d(\omega \otimes P) = d\omega \otimes P + \sum_i dz_i \wedge \partial_i P$$

gegeben.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für Ω_X. Um zu zeigen, dass

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0$$

exakt ist, betrachten wir die Filtration

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} F_{p-n}\mathcal{D}_X \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} F_p\mathcal{D}_X \longrightarrow F_p\Omega_X \longrightarrow 0$$

wobei $(F_p\mathcal{D}_X)_{p\in\mathbb{Z}}$ die Ordnung-filtration ist und $F_p\Omega_X = 0$ für $p < 0$ und $F_p\Omega_X = \Omega_X$ ist. Es reicht zu zeigen, dass die obigen Sequenzen für $p \in \mathbb{Z}$ exakt sindo der was äquivalent ist, dass die Sequenzen

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} gr_{p-n}^F\mathcal{D}_X \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} gr_p^F\mathcal{D}_X \longrightarrow gr_p^F\Omega_X \longrightarrow 0$$

exakt sind.

Außerdem reicht es die Exaktheit lokal zu zeigen. Wir können daher annehmen, dass X affin mit lokalen Koordinaten $\{z_i, \partial_i\}$ ist. Indem wir alle Sequenzen addieren erhalten wir

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0 \otimes_{O_X} O_X[\xi_1, \dots, \xi_n] \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_X^n \otimes_{O_X} O_X[\xi_1, \dots, \xi_n] \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0$$

wobei das Differential durch

$$d(dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \otimes Q) = \sum_j dz_j \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k} \otimes \xi_i Q$$

wobei $Q \in O_X[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Das ist aber der Koszul Komplex $Kos((\xi_1, \dots, \xi_n), O_X[\xi_1, \dots, \xi_n])$, welcher exakt ist. □

Seien Y, Z glatte algebraische Varietäten und setze $X = Y \times Z$. Seien $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ die Projektionen. Wir wollen $f_+\mathcal{M} = Rf_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M})$ für $\mathcal{M} \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$ berechnen. Es gilt

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Omega_Y^{\otimes -1} \simeq g^*\Omega_Z \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y \simeq \mathcal{D}_Y \boxtimes \Omega_Z$$

Wir lösen jetzt Ω_Z wie in Lemma lem:resOX 4.35 auf. Wir erhalten $\Omega_Z \simeq \Omega_Z^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_Z$ in $D^b(\mathcal{D}_Z^{op})$. Also

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \simeq (\mathcal{D}_Y \boxtimes (\Omega_Z^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_Z)) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \simeq (\mathcal{O}_Y \boxtimes \Omega_Z^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

Sei $n = \dim Z = \dim X - \dim Y$ und setze

$$\Omega_{X/Y}^k = \mathcal{O}_Y \boxtimes \Omega_Z^k$$

für $k = 0, \dots, n$. Für $\mathcal{M} \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$ definieren wir den relativen deRham Komplex $DR_{X/Y}(M)$ durch

$$(DR_{X/Y}(M))^k := \begin{cases} \Omega^{n+k}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} & -n \leq k \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d(\omega \otimes s) = dw \otimes s + \sum_{i=1}^{n} (dz_i \wedge \omega) \otimes \partial_i s$$

wobei $\{z_i, \partial_i\}$ lokale Koordinaten auf Z sind. Beachte, dass $(DR_{X/Y}(M))^k = g^{-1}\Omega^{n+k}_Z \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Z} \mathcal{M}$ ein links $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-Modul ist, wobei die $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-Struktur durch

$$P(\omega \otimes s) = \omega \otimes ((P \otimes 1)s)$$

wobei $P \in f^{-1}\mathcal{D}_Y, \omega \in g^{-1}\Omega^{n+k}_Z$ und $s \in \mathcal{M}$ ist, wobei wir mit $P \mapsto P \otimes 1$ den kanonischen Homomorphismus $f^{-1}\mathcal{D}_Y \to \mathcal{D}_X$ bezeichnen. Das heißt $DR_{X/Y}(\mathcal{M})$ ist ein Komplex von $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-Moduln. Wegen Lemma 4.35 [lem:resOX] folgt

$$\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \simeq DR_{X/Y}(\mathcal{M})$$

in der derivierten Kategorie der $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-Moduln.

Proposition 4.36. *Seien Y und Z glatte, algebraische Varietäten und $f : X = Y \times Z \to Y$ die Projektion. Es gilt*

1. *Für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ gilt $f_+\mathcal{M} \simeq Rf_*(DR_{X/Y}(M))$*
2. *Für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ gilt $H^j(f_+\mathcal{M}) = 0$ für $j \neq -\dim Z, \dots, \dim Z$.*
3. *Der Funktor f_+ bildet $\mathcal{D}^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$ auf $\mathcal{D}^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$ ab.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der obigen Diskussion. Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache , dass f kohomologische Dimension $\dim Z$ hat. Für die dritte Aussage genügt es zu zeigen, dass für $\mathcal{M} \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$ der Modul $\mathcal{H}^i Rf_*(DR_{X/Y}(\mathcal{M})^k)$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul für jedes i und k ist. Das folgt aber aus der Tatsache, dass $DR_{X/Y}(M)^k$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist und $Rf_* : D^b_{qc}(\mathcal{O}_X) \to D^b(\mathcal{O}_Y)$ gilt (Hartshorne, III, Corollary 8.6). □

Da ein Morphismus $f : X \to Y$ in eine abgeschlossene Einbettung $i : X \to X \times Y$ mit $x \mapsto (x, f(x))$ und eine Projektion $X \times Y \to Y$ faktorisert werden kann, erhalten wir folgendes Resultat.

p:dirImpreqc **Proposition 4.37.** *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten, algebraischen Varietäten. Dann gilt $f_+ : D^b_{qc}(\mathcal{D}_X) \to D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y)$.*

Proposition 4.38. *Seiem $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ Morphismen zwischen algebraischen Varietäten. Dann ist für $\mathcal{M}_1 \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_1})$ und $\mathcal{M}_2 \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_{X_2})$ der kanonische Morphismus*

$$(f_{1+}\mathcal{M}_1) \boxtimes (f_{2+}\mathcal{M}_2) \longrightarrow (f_1 \times f_2)_+(\mathcal{M}_1 \boxtimes \mathcal{M}_2)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Indem man $f_1 \times f_2$ mittels $X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ faktorisiert, reicht es für einen Morphismus $f : X \to Y$ und eine glatte algebraischen Varietät T zu zeigen, dass der Morphismus

$$(f_+\mathcal{M}) \boxtimes \mathcal{N} \longrightarrow (f \times id_T)_+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$$

ein Isomorphismus ist. Außerdem zerlegen wir f in eine abgeschlossene Einbettung $i : X \times T \to X \times Y \times T$ und eine Projektion $X \times Y \times T \to Y \times T$.

Wir beweisen die Aussage zuerst für die abgeschlossene Einbettung i. Da die Frage lokal ist, nehmen wir lokale Koordinaten $\{y_k\partial_{y_k}\}_{1\leq k\leq n}$, s.d. $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$ die definierenden Gleichungen für X ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} i_+\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} &\simeq \left(\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} i_*\mathcal{M}\right) \boxtimes \mathcal{N} \\ &\simeq \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} (i \times id_T)_*(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \\ &\simeq (i \times id_T)_+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \end{aligned}$$

Sei jetzt $p : Z = X \times Y \to Y$ die Projektion. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_+\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} &\simeq Rf_*(DR_{Z/Y}(\mathcal{M})) \boxtimes \mathcal{N} \\ (f \times id_T)_+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) &\simeq R(f \times id_T)_*(DR_{Z\times T/Y\times T}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})) \end{aligned}$$

Da $DR_{Z/Y}(\mathcal{M})^k$ ist ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Z$-Modul ist, gilt

$$\begin{aligned} Rf_*(DR_{Z/Y}(\mathcal{M})^k) \boxtimes \mathcal{N} &\simeq R(f \times id_T)_* \left(DR_{Z/Y}(\mathcal{M})^k \boxtimes \mathcal{N}\right) \\ &\simeq R(f \times id_T)_*(DR_{Z\times T/Y\times T}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})^k) \end{aligned}$$

lem:dirImcommextProd

wobei wir beim ersten Isomorphismus Lemma ~~4.39 benutzt haben~~. Es folgt also

$$Rf_*(DR_{Z/Y}(\mathcal{M})) \boxtimes \mathcal{N} \simeq R(f \times id_T)_*(DR_{Z\times T/Y\times T}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}))$$

□

ncommextProd

Lemma 4.39. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten, algebraischen Varietäten und sei T eine glatte, algebraische Varietät. Für $\mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{O}_X)$ und $\mathcal{N} \in D^b_{qc}(\mathcal{O}_T$ ist der kanonische Morphismus*

$$Rf_*(\mathcal{M}) \boxtimes N \longrightarrow R(f \times id_T)_*(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Da die Frage lokal ist, können wir annehmen, dass wir in $D^b_{qc}(\mathcal{O}_T)$ einen Isomorphismus $\mathcal{F} \simeq \mathcal{N}$ haben, wobei für jedes k der Modul $\mathcal{F}^k$ ein direkter Summand eines freien Moduls ist und $\mathcal{F}^k = 0$ für $|k| \gg 0$ gilt. Wir können daher oBdA annehmen, dass $\mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_T$ gilt. Betrachte das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times T \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f\times id_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times T \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

wobei $p : X \times T \to X$ und $q : Y \times T \to Y$ die Projektionen sind. Dann gilt

$$Rf_* \boxtimes \mathcal{O}_T \simeq q^* Rf_*(\mathcal{M}) \simeq R(f \times id_T)_* p^*(\mathcal{M}) \simeq R(f \times id_T)_*(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{O}_T)$$

aufgrund des Basiswechsels für $\mathcal{O}$-Moduln (siehe [Hartshorne, II, Proposition 5.12]). □

Theorem 4.40. *Sei $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus. Dann gilt für $\mathcal{M} \in D^b_c(\mathcal{D}_X)$, dass $f_+\mathcal{M} \in D^b_c(\mathcal{D}_Y)$.*

Proof. Da wir X, Y als quasi-projektiv voraussetzen, können wir annehmen, dass f projektiv ist, da wir folgende Faktorisierung haben

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^n \overset{p}{\longrightarrow} Y$$

wobei $i(x) = (f(x), j(x))$ mit $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ gilt. Es reicht daher die Behauptung für die beiden Fälle getrennt zu beweisen.

Im Fall einer abgeschlossenen Einbettung, reichtes das Problem lokal auf Y zu betrachten. Wir wählen eine freie Auflösung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{M}$ in $D^b_c(\mathcal{D}_X)$. Daher reicht es die Kohärenz von $i_+\mathcal{D}_X$ zu zeigen. Es gilt aber $i_+\mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_Y/\mathcal{D}_Y\mathcal{I}$ wobei $\mathcal{I}$ die idealgarbe von X ist.

Wir betrachten jetzt den Fall einer Projektion $p : X = Y \times \mathbb{P}^n \to Y$. Da das Problem lokal auf Y ist, können wir annehmen, dass Y eine affine Varietät ist. Wegen Theorem ??? existiert eine Auflösung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{M}$ in $D^b_c(\mathcal{D}_X)$, s.d. $\mathcal{F}$ ein beschränkter Komplex von $\mathcal{D}_X$-Moduln ist und jeder Term $\mathcal{F}^j$ von $\mathcal{F}$ ein direkter Summand eines freien $\mathcal{D}_X$-Moduls von endlichem Rang ist. Es reicht zu zeigen, dass $p_+\mathcal{F}^j \in D^b_c(\mathcal{D}_Y)$ gilt. Da $\mathcal{F}^j$ zusätzlich ein direkter Summand von $\mathcal{D}_X^n$ ist und damit $p_+\mathcal{F}^j$ ein direkter Summand von $p_+\mathcal{D}_X^n$ ist, reicht es zu zeigen, dass $p_+\mathcal{D}_X \in D^b_c(\mathcal{D}_X)$ gilt. Wegen $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \simeq \mathcal{D}_Y \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^n}$, folgt

$$p_+\mathcal{M} \simeq Rp_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X) \simeq Rp_*(\mathcal{D}_Y \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^n}) \simeq \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathbb{C}} R\Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n})$$

Es gilt $R\Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}) \simeq \mathbb{C}[-n]$ und damit $p_*\mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_Y[-n]$. □

4.4 Adjunktionsformeln

Wir haben in Definition defn:DYX 4.29 den $(f^{-1}\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_X)$-Bimodul $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ durch

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Omega_Y^{\otimes -1}$$

definiert. Es gilt somit

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} &= \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Omega_Y^{\otimes -1} \\ &\simeq \Omega_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{\otimes -1}) \\ &\simeq f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \Omega_X\end{aligned}$$

Wir erhalten folgende alternative Beschreibung von $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$.

Lemma 4.41. *Wir haben den folgenden Isomorphismus von $(f^{-1}\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_X)$-Bimoduln:*

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \simeq f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \Omega_X$$

Der Term rechts hat eine $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-Struktur , die durch die links $\mathcal{D}_Y$-Struktur von $\mathcal{D}_Y$ induziert wird. Die rechts $\mathcal{D}_X$-Modulstruktur erhält man folgendermaßen: $\mathcal{D}_Y$ hat eine rechts $\mathcal{D}_Y$-Struktur, damit hat $\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{\otimes -1}$ eine links $\mathcal{D}_Y$-Modulstruktur. Indem wir den inversen Bild Funktor für Links $\mathcal{D}_Y$-Moduln anwenden, erhalten wir auf $f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ eine links $\mathcal{D}_X$-Struktur. Durch eine links-rechts Transformation erhalten wir eine rechts $\mathcal{D}_X$-Struktur auf

$$f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X = f^{-1}(\mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \Omega_X$$

irectImchar1 **Proposition 4.42.** *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von glatten, algebraischen Varietäten. Sei $d = \mathrm{codim}_Y(X)$. Dann gilt*

$$i^+\mathcal{M} \simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{M})[d]$$

Beweis. Wir zeigen zuerst den Isomorphismus

$$R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{D}_Y) \simeq \mathcal{D}_{X\to Y}[-d] \tag{4.4.1}$$ eq:transfMod

Der obige Isomorphismus ist nach Rechts-Links-Transformation äquivalent zu

$$R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y^{op}}(\mathcal{D}_{X\to Y}, i^{-1}\mathcal{D}_Y) \simeq \mathcal{D}_{Y\leftarrow X}[-d]$$

Es gilt

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y^{op}}(\mathcal{D}_{X\to Y}, i^{-1}\mathcal{D}_Y) &\simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y^{op}}(\mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}\mathcal{D}_Y, i^{-1}\mathcal{D}_Y) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, i^{-1}\mathcal{D}_Y) \\ &\simeq i^{-1}\mathcal{D}_Y \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, i^{-1}\mathcal{O}_Y) \end{aligned}$$

in dem wir die Koszul Auflösung $\mathcal{K}_\bullet$ von $\mathcal{O}_X$ als $i^{-1}\mathcal{O}_Y$-Auflösung benutzen (siehe (4.1.1) sehen wir, dass $R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, i^{-1}\mathcal{O}_Y)$ durch den Komplex

$$\mathcal{K}_0^* \longrightarrow \mathcal{K}_1^* \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{K}_d^*$$

dargestellt wird, wobei $\mathcal{K}_j^* = \mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{O}_Y}(\mathcal{K}_j, i^{-1}\mathcal{O}_Y)$ ist. Der Term $\mathcal{K}_d$ ist ein lokal-freier $i^{-1}\mathcal{O}_Y$-Modul vom Rang 1 und wir haben eine kanonische perfekte Paarung

$$\mathcal{K}_j \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{K}_{d-j} \longrightarrow \mathcal{K}_d$$

für jedes j. Es folgt also $\mathcal{K}_j^* \simeq \mathcal{K}_{d-j} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{K}_d^*$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}_0^* \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{K}_d^*] &\simeq [\mathcal{K}_d \longrightarrow \mathcal{K}_{d-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{K}_0] \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{K}_d^* \\ &\simeq \mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{K}_d^*[-d] \\ &\simeq i^{-1}\Omega_Y^{\otimes -1} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \Omega_X[-d] \end{aligned}$$

Daher gilt

$$R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y^{op}}(\mathcal{D}_{X\to Y}, i^{-1}\mathcal{D}_Y) \simeq i^{-1}\mathcal{D}_Y \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}\Omega_Y^{\otimes -1} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \Omega_X[-d] \simeq \mathcal{D}_{Y\leftarrow X}[-d]$$

den aus (4.4.1) folgt

$$\begin{aligned} i^+\mathcal{M} &= \mathcal{D}_{X\to Y} \overset{L}{\otimes}_{i^{-1}\mathcal{D}_Y} i^{-1}\mathcal{M} \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{D}_Y) \overset{L}{\otimes}_{i^{-1}\mathcal{D}_Y} i^{-1}\mathcal{M}[d] \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{M})[d] \end{aligned}$$

□

Definition 4.43. *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung einer glatten, algebraischen Varietät. Wir definieren den links-exakten Funktor*

$$i^\natural : Mod(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow Mod(\mathcal{D}_X)$$

durch

$$i^\natural\mathcal{M} = \mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{M})$$

Proposition 4.44. *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung. Dann gilt*

$$i^+\mathcal{M} \simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{M})[d] \simeq Ri^\natural\mathcal{M}[d]$$

Proof. Der erste Isomorphismus wurde in Proposition 4.42 gezeigt. Wir zeigen zuerst, dass

$$i^\natural\mathcal{M} \simeq \mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\Gamma_X(\mathcal{M})) \tag{4.4.2}$$

für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_Y)$ gilt, wobei $\Gamma_X(\mathcal{M})$ die Untergarbe von $\mathcal{M}$ ist, die aus Schnitten besteht, deren Träger in X liegt. Dafür reicht es zu zeigen, dass für $\psi \in \mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{M})$ $\psi(s) \in i^{-1}\Gamma_X(\mathcal{M})$ liegt. Da die Aussage lokal ist, können wir eine lokale Koordinate wie in Beispiel 4.30 nehmen. Dann gilt $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \simeq \mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X$. Da der $i^{-1}\mathcal{D}_Y$-Modul $\mathbb{C}[\partial_{y_{r+1}}, \ldots, \partial_{y_n}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X$ von $1 \otimes 1$ erzeugt wird, können wir $s = 1 \otimes 1$ annehmen. Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ das definierende Ideal von X. Wegen $(i^{-1}\mathcal{I})s = 0$ gilt $(i^{-1}\mathcal{I})\psi(s) = 0$. Dies zeigt $\psi(s) \in i^{-1}\Gamma_X(\mathcal{M})$. Das zeigt (eq:RhomlocCoh 4.4.2).

Wir zeigen jetzt

$$Ri^{\natural}\mathcal{M} \simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}R\Gamma_X(\mathcal{M}))$$

für $\mathcal{M} \in D^+(\mathcal{D}_Y)$. Dafür genügt es zu zeigen, dass für einen injektiven $\mathcal{D}_Y$-Modul $\mathcal{J}$ der $i^{-1}\mathcal{D}_Y$-Modul $i^{-1}\Gamma_X(\mathcal{J})$ auch injektiv ist. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} Hom_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{K}, i^{-1}\Gamma_X(\mathcal{I})) &\simeq Hom_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(i^{-1}i_*\mathcal{K}, i^{-1}\Gamma_X(\mathcal{I})) \\ &\simeq Hom_{\mathcal{D}_Y}(i_*\mathcal{K}, i_*i^{-1}\Gamma_X(\mathcal{I})) \\ &\simeq Hom_{\mathcal{D}_Y}(i_*\mathcal{K}, \Gamma_X(\mathcal{I})) \\ &\simeq Hom_{\mathcal{D}_Y}(i_*\mathcal{K}, \mathcal{I}) \end{aligned}$$

für jeden $i^{-1}\mathcal{D}_Y$-Modul $\mathcal{K}$. Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass der kanonische Morphismus

$$R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}R\Gamma_X(\mathcal{M})) \longrightarrow R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{M})$$

ein Isomorphismus ist Sei $j : Y \setminus X \to Y$ die offene Einbettung des Komplements. Wir erhalten ein ausgezeichnetes Dreieck

$$R\Gamma_X(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow Rj_*j^{-1}\mathcal{M} \xrightarrow{+1}$$

Es reicht daher zu zeigen, dass

$$R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}Rj_*j^{-1}\mathcal{M})[d] \simeq i^+Rj_*j^{-1}\mathcal{M} = 0$$

gilt. Das folgt aber aus dem nächsten Lemma. ☐

closedEmbvan **Lemma 4.45.** *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung. Sei $j : U = Y \setminus X \to Y$ die offene Einbettung des Komplements. Dann gilt für jedes $\mathcal{K} \in D^b(\mathcal{O}_U)$, dass $\mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}Rj_*\mathcal{K} = 0$*

Proof. Es gilt

$$i_*(\mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} i^{-1}Rj_*\mathcal{K}) = i_*\mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} Rj_*\mathcal{K} = Rj_*(j^{-1}i_*\mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_{Y\setminus X}} \mathcal{K}) = 0.$$

Hier haben wir die Projektionsformel für $\mathcal{O}$-Moduln benutzt (siehe [Hartshorne, Residues and Duality, II, Proposition 5.6]). ☐

Wir benutzen folgende Aussage ohne Beweis. Sei $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{R}$ Garben von Ringen auf einem topologischen Raum und $\mathcal{F} \in D^-(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, $\mathcal{G} \in D^+(\mathcal{R})$, $\mathcal{K} \in D^-(\mathcal{S})$, dann gilt

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{S}} \mathcal{K}, \mathcal{G}) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{S}}(\mathcal{K}, R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \tag{4.4.3}$$

eq:KSformula

(für den Beweis siehe [Kashiwara-Shapira, Sheaves on manifolds, Proposition 2.6.3]. Der Beweis in loc. cit. fordert, dass $\mathcal{S}$ im Zentrum von $\mathcal{R}$ liegt, dies ist aber nicht notwendig, wenn wir annehmen, dass $\mathcal{F}$ eine Bi-Modulstruktur hat.)

p:AdjiDirInv **Proposition 4.46.** *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von glatten, algebraischen Varietäten.*

1. *Für $\mathcal{M} \in D^-(\mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{N} \in D^+(\mathcal{D}_Y)$ existieren funktorielle Isomorphismen*

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i_+\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq i_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, Ri^{\natural}\mathcal{N})$$

2. *Der Funktor $Ri^{\natural} : D^b(\mathcal{D}_Y) \to D^b(\mathcal{D}_X)$ ist rechts-adjungiert zum Funktor $i_+ : D^b(\mathcal{D}_X) \to D^b(\mathcal{D}_Y)$.*

Proof. Die zweite Aussage folgt aus der ersten indem man den Funktor $H^0(R\Gamma(Y,\bullet))$ anwendet und beachtet, dass $H^0(RHom_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{K},\mathcal{L}) \simeq Hom_{D^b(\mathcal{D}_Y)}(\mathcal{K},\mathcal{L}))$ gilt.

Für die erste Aussage folgt aus (eq:KSformula 4.4.3) und $\mathcal{M} \in D^-(\mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{N} \in D^+(\mathcal{D}_Y)$, dass

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}\mathcal{N})) \simeq R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}, i^{-1}\mathcal{N})$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i_+\mathcal{M},\mathcal{N}) &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}),\mathcal{N}) \\
&\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}), R\Gamma_X(\mathcal{N})) \\
&\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}), i_*i^{-1}R\Gamma_X(\mathcal{N})) \\
&\simeq i_*R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(i^{-1}i_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}), i^{-1}R\Gamma_X(\mathcal{N})) \\
&\simeq i_*R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}, i^{-1}R\Gamma_X(\mathcal{N})) \\
&\simeq i_*R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\mathcal{H}om_{i^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}, i^{-1}R\Gamma_X(\mathcal{N}))) \\
&\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, Ri^\natural\mathcal{N}).
\end{aligned}$$

□

r:adjinonder **Korollar 4.47.** *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung.*

1. *Für $\mathcal{M} \in Mod(\mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{N} \in Mod(\mathcal{D}_Y)$ existieren funktorielle Isomorphismen*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i_*\mathcal{M},\mathcal{N}) \simeq i_*\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, i^\natural N)$$

2. *Der Funktor $i^\natural : Mod(\mathcal{D}_Y) \to Mod(\mathcal{D}_X)$ ist rechts-adjungiert zu $\mathcal{H}^0 i_+ : Mod(\mathcal{D}_X) \to Mod(\mathcal{D}_Y)$.*

4.5 Kashiwara Äquivalenz

In diesem Abschnitt möchten wir Kashiwaras Äquivalenz für allgemeine $\mathcal{D}$-Moduln zeigen. Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung. Wir bezeichnen mit $Mod^X_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ bzw. $Mod^X_c(\mathcal{D}_Y)$ die volle Unterkategorie von $Mod_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ bzw. $Mod_c(\mathcal{D}_Y)$ die aus $\mathcal{D}_Y$-Moduln besteht, deren Träger in X enthalten ist.

thm:KEq **Theorem 4.48.** *Sei $i : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung.*

1. *Der Funktor i_+ induziert Äquivalenzen*

$$\begin{aligned}
Mod_{qc}(\mathcal{D}_X) &\xrightarrow{\simeq} Mod^X_{qc}(\mathcal{D}_Y) \\
Mod_c(\mathcal{D}_X) &\xrightarrow{\simeq} Mod^X_c(\mathcal{D}_Y)
\end{aligned}$$

   von abelschen Kategorien. Eine Quasi-Inverse ist durch $\mathcal{H}^0 i^+$ gegeben.

2. *Für $\mathcal{N} \in Mod^X_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ gilt $\mathcal{H}^j i^+\mathcal{N} = 0$*

Proof. Um die erste Aussage zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass die kanonischen Morphismen (siehe kor:adjinonder 4.47

$$\mathcal{M} \longrightarrow i^\natural\mathcal{H}^0 i_+\mathcal{M} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{H}^0 i_+\, i^\natural\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$$

Isomorphismen sind. Die Aussage für kohärente Moduln folgt aus der Aussage für quasi-kohärente Moduln, wenn wir zeigen können, dass sowohl $\mathcal{H}^0 i_+$ als auch $i^\natural$ kohärente Moduln erhält. Beachte also, das es reicht die Aussage lokal zu beweisen. Da die zweite Aussage im Theorem auch lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass Y affin ist mit lokalen Koordinaten $\{y_i, \partial_{y_i}\}_{1\le i\le n}$. Außerdem können wir per Induktion annehmen, dass X eine Hyperfläche ist, die durch $y_n = 0$ gegeben ist. Wir setzen $y = y_n, \partial = \partial_{y_n}$ und $\theta = y\partial$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^0 i_+\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}} i_*\mathcal{M} && \mathcal{M}\in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)\\
&\mathcal{H}^{-1}i^+ = i^\natural\mathcal{M} = Ker(y : i^{-1}\mathcal{N} \to i^{-1}\mathcal{N}) && \mathcal{N}\in Mod^X_{qc}(\mathcal{D}_Y)\\
&\mathcal{H}^0 i^+\mathcal{N} = \mathrm{Cok}(y : i^{-1}\mathcal{N} \longrightarrow i^{-1}\mathcal{N}) && \\
&H^j i^+\mathcal{N} = 0 && j\neq 0,-1
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\mathcal{N}\in Mod^X_{qc}(\mathcal{D}_Y)$. Betrachte die Eigenräume

$$\mathcal{N}^j := \{s\in\mathcal{N} \mid \theta s = js\} \qquad j\in\mathbb{Z}$$

von θ. Wegen dem Kommutator $[\partial, y] = 1$ gilt

$$y\mathcal{N}^j \subset \mathcal{N}^{j+1}, \qquad \partial\mathcal{N}^j \subset \mathcal{N}^{j-1}$$

und θ entspricht der Multiplikation mit j auf $\mathcal{N}^j$. Daher induziert $\partial y = \theta + 1 : \mathcal{N}^j \to \mathcal{N}^j$ einen Isomorphismus für $j\neq -1$: Insbesonder sind für $j < -1$ beide Morphismen $\mathcal{N}^j \xrightarrow{y} \mathcal{N}^{j+1} \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}^j$ Isomorphismen. Wir wollen zeigen, dass

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathcal{N}^{-i} \tag{4.5.1}$$

eq:KeqNdirSu

gilt. Da $\mathcal{N}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul ist, der Träger in X hat, wird jedes $s\in\mathcal{N}$ durch y^k mit genügend großem k annihiliert. Es reicht also die Behauptung

$$\mathrm{Ker}(y^k : \mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}) \subset \bigoplus_{j=1}^{k}\mathcal{N}^{-j} \qquad k\ge 1 \tag{4.5.2}$$

eq:KEqKeryk

zu zeigen. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach k. Sie ist wahr für $k = 1$ da die Bedingung $ys = 0$ die Gleichung $\theta s = (\partial y - 1)s = -s$ impliziert. Nehme jetzt an, dass $k > 1$ gilt und das die Aussgae für $k-1$ waht ist. Für einen Schnitt $s\in\mathrm{Ker}(y^k : \mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N})$ gilt $y^k s = y^{k-1}(ys) = 0$, also $ys\in\bigoplus_{j=1}^{k-1}\mathcal{N}^j$. Dann gilt aber $\partial ys\in\bigoplus_{j=2}^{k}\mathcal{N}^{-j}$ und damit

$$\theta s + s = y\partial s + s = \partial ys \in \bigoplus_{j=2}^{k}\mathcal{N}^{-j}\,. \tag{4.5.3}$$

eq:KEq1

Andererseits gilt $y^{k-1}(\theta s + ks) = y^k\partial s + ky^{k-1}s = \partial y^k s = 0$ und damit

$$\theta s + ks \in \bigoplus_{j=1}^{k-1}\mathcal{N}^{-j} \tag{4.5.4}$$

eq:KEq2

Die Different der Gleichungen (4.5.4) und (4.5.3) gibt $(k-1)s\in\bigoplus_{j=1}^{k}\mathcal{N}^{-j}$. Wegen $k > 1$ erhalten wir $s\in\bigoplus_{i=1}^{k}\mathcal{N}^{-i}$. Das zeigt (4.5.2)und damit (4.5.1).

Wegen (4.5.1) sehen wir leicht, dass $H^0 i^+\mathcal{N} = 0$ gilt. Dies zeigt die zweite Aussage, Wir sehen auch von (4.5.1), dass

$$\mathcal{N} = \mathbb{C}[\partial]\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{N}^{-1}, \qquad i^\natural = i^{-1}\mathcal{N}^{-1}$$

gilt. Daraus folgt, dass $Mod_{qc}(\mathcal{D}_X) \simeq Mod^X_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{H}^0 i_+$ und $i^\natural$ kohärente $\mathcal{D}$-Moduln erhalten. Wir arbeiten wieder lokal. Ist $\mathcal{M}\in Mod_c(\mathcal{D}_X)$, also endlich erzeugt über $\mathcal{D}_X$, dann ist $\mathcal{H}^0 i_+\mathcal{M}\simeq\mathbb{C}[\partial]\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{M}$ endlich erzeugt über $\mathcal{D}_Y$. Nehme jetzt an, dass $\mathcal{N}\in Mod^X_c(\mathcal{D}_Y)$ also endlich erzeugt über $\mathcal{D}_Y$ ist. Es gilt $N = \mathbb{C}[\partial]\simeq_{\mathbb{C}}\mathcal{N}^{-1}$. Dieser $\mathcal{D}_Y$-Modul ist durch endlich viele Schnitte $s_1,\dots,s_r\mathcal{N}^{-1}$ erzeugt. Dann wird $i^\natural\mathcal{N} = i^{-1}\mathcal{N}$ als $\mathcal{D}_X$-Modul von diesen Schnitten $s_1,\dots,s_r$ erzeugt. $\square$

Wir bezeichnen mit $D^{b,X}_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ bzw. $D^{b,X}_{c}(\mathcal{D}_Y)$ die Unterkategorie von $D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ (bzw. $D^b_c(\mathcal{D}_Y)$) die aus Komplexen $\mathcal{N}$ bestehen, der Kohomologie $\mathcal{H}^*(\mathcal{N})$ Träger auf X hat.

kor:Kaseq **Korollar 4.49.** *Sei $\sharp = qc, c$. Dann liefert der Funktor*

$$i_+ : D^b_\sharp(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^{b,X}_\sharp(\mathcal{D}_Y)$$

eine Kategorien-Äquivalenz. Ein Quasi-Inverses wird durch

$$Ri^\natural = i^+[-d] : D^{b,X}_\sharp(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow D^b_\sharp(\mathcal{D}_X)$$

gegeben.

Proof. Aus Proposition prop:dirImpreqc 4.37 und Proposition prop:invImpreqc 4.14 folgt, dass i_+ und $Ri^\natural$ komplexe mite quasi-kohärenter Kohomologie erhalten. Aus Proposition prop:AdjiDirInv 4.46 folgt, das kanonische Morphismen

$$\mathcal{M} \longrightarrow Ri^\natural i_+\mathcal{M}, \qquad i_+Ri^\natural\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \qquad \mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_X),\ \mathcal{N} \in D^{b,X}_{qc}(\mathcal{D}_Y)$$

existieren. Wir wollen zeigen, dass diese Isomorphismen sind. Wir zeigen, dass $\mathcal{M} \longrightarrow Ri\sharp i_+\mathcal{M}$ ein Isomorphismus ist, der Fall $i_+Ri^\natural\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ ist ähnlich. Wir beweisen die Aussage per Induktion über die kohomologische Länge $l(\mathcal{M}) := \max\{i \mid \mathcal{H}^i(\mathcal{M} \neq 0\} - \min\{j \mid \mathcal{H}^j(\mathcal{M}) \neq 0\}$. Nehme an, es gilt $l(\mathcal{M}) = 0$, dann ist $\mathcal{M}$ isomorph in $D^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$ zu einem 1-Term Komplex $\mathcal{M}'[k]$ für $\mathcal{M}' \in Mod_{qc}(\mathcal{D}_X)$. Dieser Fall wurde sch on Theorem thm:KEq 4.48 bewiesen. Nehme jetzt $l(\mathcal{M}) > 0$ an. In diesem Fall existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, s.d. $l(\tau^{\leq k}\mathcal{M}) < l(\mathcal{M})$ und $l(\tau^{>k}\mathcal{M}) < l(\mathcal{M})$ gilt, wobei die Abschneide-Fuktoren $\tau^{\leq k}$ und $\tau^{>k}$ folgendermaßen definiert sind:

$$\tau^{\leq k}\mathcal{M} = \tau^{k+1}\mathcal{M} := [\ldots \longrightarrow \mathcal{M}^{k-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^k_{\mathcal{M}}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots]$$
$$\tau^{\geq k+1}\mathcal{M} = \tau^{>k}\mathcal{M} := [\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d^k_{\mathcal{M}}) \longrightarrow \mathcal{M}^{k+1} \longrightarrow \ldots]$$

Wir erhalten ein Dreieck ausgezeichnetes Dreieck

$$\tau^{\leq k}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \tau^{>k}\mathcal{M} \xrightarrow{+1}$$

Indem wir den Funktor $Ri\natural i_+$ anwenden erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tau^{\leq k}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \tau^{>k}\mathcal{M} \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "\gamma"'] & {} \\
Ri^\natural i_+\tau^{\leq k}\mathcal{M} \arrow[r] & Ri^\natural i_+\mathcal{M} \arrow[r] & Ri^\natural i_+\tau^{>k}\mathcal{M} \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}$$

Per Induktionvoraussetzung sind α und γ Isomorphismen. Also ist aic β ein Isomorphismus. Beachte, dass ein ähnlicher Beweis auch zeigt, dass die Funktoren Komplexe mit kohärenter Kohmologie erhalten. $\square$

4.6 Basiswechsel

Sei X ein topologischer Raum, $i : Z \to X$ abgeschlossen und $j : U \to X$ die offene Einbettung des Komplements. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Wir definieren die Prägarbe

$$\Gamma_Z(\mathcal{F})(V) = \ker(\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V \setminus Z))$$

für $V \subset X$ offen. Dies ist sogar eine Garbe (siehe Garbenkohomolgie-Skript Proposition 4.18). Für $\mathcal{F} \in D^b(\mathbb{C}_X)$ existiert folgendes ausgezeichnete Dreieck

$$R\Gamma_Z(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow Rj_*j^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

(siehe Garben-Kohomologie-Skript Proposition 4.21). Die Kohomologiegarbe $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}) = \mathcal{H}^i R\Gamma_Z(\mathcal{F})$ heißen lokale Kohomologie-Garben.

Sei jetzt X eine algebraische Varietät und $Z \subset X$ eine Untervarietät und $\mathcal{M}$ eine quasi-kohärente Garbe. Wir möchten eine andere Charakterisierung der lokalen Kohomologie geben. Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ die zu Z gehörende Idealgarbe und $\mathcal{M}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}$-Modul. Wir definieren die Garbe

$$\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})(V) = \{m \in \mathcal{M}(V) \mid \exists k \text{ mit } \mathcal{I}(V)^k m = 0\}$$

Lemma 4.50. *Sei $\mathcal{M}$ eine quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gilt*

$$\Gamma_Z(\mathcal{M}) = \Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})$$

Proof. Da beide Garbe Untergarben von $\mathcal{M}$ sind reicht es die Aussage lokal auf allen affinen, offenen Mengen zu prüfen. Sei also oBdA $X = \operatorname{Spec} R$ und $Z = V(I)$ mit $I \subset R$). Setze $M = \mathcal{M}(X)$. Dann gilt

$$\Gamma_I(M) := \Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})(X) = \{m \in M \mid \exists k \text{ mit } I^k m = 0\}.$$

Wir müssen also zeigen, $\Gamma_I(M) = \{m \in M \mid \operatorname{supp}(m) \subset Z = V(I)\}$.
$\subset$: Sei $m \in M$ mit $I^k m = 0$. Setze $N := R \cdot m \subset M$. Dann gilt $\operatorname{supp}(m) = \operatorname{supp}(N) \subset V(I^k) = V(I)$.
$\supset$: Sei $m \in M$ mit $supp(m) \subset V(I)$. Setze $N := R \cdot m$ und $Ann(N) = J$. Dann gilt $V(J) = \operatorname{supp}(N)\operatorname{supp}(m) \subset V(I)$ und damit $I \subset r(J)$. Da R noethersch ist existiert ein k mit $I^k \subset J$ also $I^k m = 0$. $\square$

Für $\mathcal{D}$-Moduln erhalten wir folgendes Resultat.

Proposition 4.51. *Sei X eine glatte algebraische Varietät. Dann gilt*

1. *Für $\mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$ existiert ein ausgezeichnetes Dreieck*

$$R\Gamma_Z(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow j_+ j^+ \mathcal{M} \xrightarrow{+1} . \tag{4.6.1}$$

2. *Sei Z eine glatte Untervarietät. Dann gilt für $\mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_U)$, dass*

$$i^+ j_+ \mathcal{M} = 0 .$$

3. *Sei Z eine glatte Untervarietät. Dann gilt für $\mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_X)$, dass*

$$R\Gamma_Z(\mathcal{M}) \simeq i_+ i^+ \mathcal{M}[d] \simeq i_+ i^{\maltese} \mathcal{M}$$

wobei $d := \dim X - \dim Z$.

Proof. Es gilt $j^+\mathcal{M} = j^{-1}\mathcal{M}$ für $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ (siehe Beispiel 4.17) und $j_+\mathcal{N} = Rj_*\mathcal{N}$ für $\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_U)$ (siehe Beispiel 4.32), d.h. es gilt $j_+ j^+ \mathcal{M} \simeq Rj_* j^{-1}\mathcal{M}$ das zeigt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 4.45. Wir zeigen die dritte Aussage. Da $\mathcal{M}$ und $j_+j^+\mathcal{M}$ quasi-kohärente Kohomologie haben und deren Einschränkungen auf U gleich sind, folgt $R\Gamma_Z \in D^{b,Z}_{qc}(\mathcal{D}_X)$. Wegen Korollar 4.49, dass $R\Gamma_Z(\mathcal{M}) \simeq i_+ i^+ R\Gamma_Z(\mathcal{M})[-1]$ gilt. Daher recht es zu zeigen, dass $i^+ R\Gamma_Z(\mathcal{M}) \simeq i^+\mathcal{M}$ gilt. Dies folgt aber, indem man i^+ auf das ausgezeichnete Dreieck (4.6.1) anwendet und bemerkt, dass $i^+ j_+ = 0$ gilt. $\square$

Theorem 4.52 (Basiswechsel)**.** *Seien $f : Y \to X$ und $g : Z \to X$ zwei Morphismen zwischen algebraischen Varietäten und betrachte das kartesische Diagramm*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

wobei $W := Y \times_X Z$ gilt. Dann existiert eine Isomorphismus von Funktoren:

$$g^{\maltese} f_+ \simeq \widetilde{f}_+ \widetilde{g}^{\maltese} : D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y) \longrightarrow D^b_{qc}(\mathcal{D}_Z)$$

mit $d_X := \dim X$ etc.

Proof. Wir können den Morphismus $g : Z \to X$ in eine Einbettung $Z \to Z \times X$ und eine Projektion $Z \times X \to X$ zerlegen. Daher reicht es das Theorem nur in diesen beiden Fällen zu zeigen.

Sei $g = pr_X : Z = T \times X \to X$ eine Projektion. Wir erhalten das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \times Y \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ T \times X \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

mit $\widetilde{g} = pr_Y$, $\widetilde{f} = id_T \times f$. Dann gilt für $\mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y)$

$$\widetilde{f}_+ \widetilde{g}^+ \mathcal{M} \simeq (id_T \times f)_+ (\mathcal{O}_T \boxtimes \mathcal{M}) \simeq \mathcal{O}_T \boxtimes f_+ \mathcal{M} \simeq g^+ f_+ \mathcal{M}$$

Sei jetzt $i = g : Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung, s.d. $W = f^{-1}(Z)$ glatt ist. Dann erhalten wir zwei kartesische Diagramme

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\widetilde{i}"] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & Y \arrow[d, "f"] & V = f^{-1}(U) \arrow[l, "\widetilde{j}"'] \arrow[d, "h"'] \\ Z \arrow[r, "i"] & X & U = X \setminus Z \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

Wegen Kashiwaras Aquivalenz erhalten wir $i^{\maltese} i_+ \simeq Id$ und daher

$$\widetilde{f}_+ \widetilde{i}^{\maltese} \simeq i^{\maltese} i_* \widetilde{f}_* \widetilde{i}^{\maltese} \simeq i^{\maltese} f_+ \widetilde{i}_+ \widetilde{i}^{\maltese}$$

Der kanonische Morphismus $\widetilde{i}_* \widetilde{i}^{\maltese} \to Id$ (siehe Proposition prop:trianglokKoh 4.51 liefert den Morphismus $\widetilde{f}_* \widetilde{i}^{\maltese} \to i^{\maltese} f_+$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$i^{\maltese} f_+ \widetilde{i}_+ \widetilde{i}^{\maltese} \mathcal{M} \simeq i^{\maltese} f_* \mathcal{M}$$

für $\mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ gilt. Wir wenden $i^{\maltese} f_+$ auf das ausgezeichnete Dreieck

$$\widetilde{i}_+ \widetilde{i}^{\maltese} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \widetilde{j}_+ \widetilde{j}^{\maltese} \mathcal{M} \xrightarrow{+1}$$

an. Unsere Behauptung ist dann äquivalent zu $i^{\maltese} f_+ \widetilde{j}_+ \widetilde{j}^{\maltese} \mathcal{M} = 0$. Wegen $i^{\maltese} f_+ \widetilde{j}_+ \widetilde{j}^{\maltese} \mathcal{M} \simeq i^{\maltese} j_+ h_+ \widetilde{j}^{\maltese} \mathcal{M}$ folgt das aus Proposition prop:trianglokKoh 4.51 2. . □

Korollar 4.53. *Gilt $g(Z) \cap f(Y) = \emptyset$, dann folgt $\widetilde{f}_+ \widetilde{g}^{\maltese} = 0$.*

Korollar 4.54 (Projektionsformel)**.** *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von glatten, algebraischen varietäten. Dann gilt für $\mathcal{M} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y)$ und $\mathcal{N} \in D^b_{qc}(\mathcal{D}_Y)$, dass*

$$f_+(\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} f^+ \mathcal{N}) \simeq f_+ \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}$$

Proof. Wir wenden Theorem thm:basechange 4.52 auf das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(id_X \times f) \circ \Delta_X"] \arrow[d, "f"'] & X \times Y \arrow[d, "f \times id_Y"] \\ Y \arrow[r, "\Delta_Y"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

an. Dann gilt

$$f_+(\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} f^+\mathcal{N}) \simeq f_+\left((id_X \times f) \circ \Delta_X\right)^+ (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \simeq \Delta_Y^+(f \times id_Y)_+(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \simeq f_+\mathcal{M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}\,.$$

□

4.7 Dualität

Wir wollen zu einem gegebenen $\mathcal{D}$-Modul einen dualen $\mathcal{D}$-Modul definieren. Sei $\mathcal{M}$ ein links $\mathcal{D}_X$-Modul, dann ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ ein rechts $\mathcal{D}_X$-Modul (bzgl. der rechts Multiplikation auf $\mathcal{D}_X$). Indem wir eine rechts-links Transformation anwenden erhalten wir den links $\mathcal{D}_X$-Modul $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}$. Da der Funktor $\mathcal{H}_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{D}_X)$ nicht exakt ist, ist es natürlicher den Komplex $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}$ zu betrachten. Sei $X = \mathbb{C}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ indem wir $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\bullet, \mathcal{D}_X)$ auf die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

anwenden, berechnen wir $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ und erhalten

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \longrightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{P\cdot} \mathcal{D}_X$$

(hier haben wir $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_X) \simeq \mathcal{D}_X$ benutzt. Wir erhalten

$$\mathcal{E}xt^0_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) = \ker(P : \mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_X) = 0$$

und

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \simeq \mathcal{D}_X/P\mathcal{D}_X$$

Nach anwenden der rechts-links Transformation erhalten wir

$$\mathcal{E}^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1} \simeq \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_x P^t$$

wobei ${}^tP$ durch (eq:formaladjointOp 4.0.1) definiert ist.

Definition 4.55. *Der* ***Dualitätsfunktor*** $\mathbb{D} = \mathbb{D}_X : \mathcal{D}^-(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{D}_X)$ *ist durch*

$$\mathbb{D}\mathcal{M} := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}[d_X]$$

definiert, wobei $d_X := \dim X$.

Beispiel 4.56. *Es gilt*

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{D}\mathcal{D}_X) = \begin{cases} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1} & \text{für } k = -d_X \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

lem:extU **Lemma 4.57.** *Sei* $\mathcal{M}$ *ein kohärenter* $\mathcal{D}_X$*-Modul. Für jede offene, affine Teilmenge* U *von* X *gilt*

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)(U) = Ext^i_{\mathcal{D}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{D}_X(U))$$

Proof. Nehme eine Auflösung $\mathcal{P} \to \mathcal{M}_{|U}$ von $\mathcal{M}_{ßmidU}$ durch freie $\mathcal{D}_U$-Moduln von endlichem Rang. Da U affin ist, liefert $\mathcal{P}(U) \to \mathcal{M}(U)$ eine Auflösung von $\mathcal{M}(U)$ durch freier $\mathcal{D}_X(U)$-Moduln von endlichem Rang. Per Definition gilt $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X))(U) = (\mathcal{H}^i(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{P}, \mathcal{D}_U)))(U)$. Setze $\mathcal{L} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{P}, \mathcal{D}_U)$. Da U affine ist und $\mathcal{L}$ ein Komplex von kohärenten rechts $\mathcal{D}_U$-Moduln ist, gilt $\mathcal{H}^i(\mathcal{L})(U) \simeq \mathcal{H}^i(\mathcal{L}(U))$. Es gilt

$$\mathcal{L}(U) = Hom_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{P}, \mathcal{D}_U) = Hom_{\mathcal{D}_X(U)}(\mathcal{P}(U), \mathcal{D}_X(U))$$

woebei das zweite Gleichheitszeichen aus der Kategorienäquivalenz (thm:_KategAffin 3.1) folgt. Wir erhalten also

$$(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X))(U) = H^i(Hom_{\mathcal{D}_X(U)}(\mathcal{P}(U), \mathcal{D}_X(U))) = Ext^i_{\mathcal{D}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{D}_X(U))$$

□

Proposition 4.58. *1. Es gilt* $\mathbb{D} : D^b_c(\mathcal{D}_X) \to \mathcal{D}^b_c(\mathcal{D}_X)^{op}$

2. $\mathbb{D}^2 \simeq Id$ *auf* $D^b_c(\mathcal{D}_X)$.

Proof. 1.: Wir können annhemen, dass $\mathcal{M} \in Mod - C(\mathcal{D}_X)$ gilt. Dann folgt aus dem beweis von Lemma lem:extU 4.57, dass $\mathcal{H}^i(\mathbb{D}\mathcal{M}) \in Mod_c(\mathcal{D}_X)$ für alle i gilt. Die Beschränktheit des Komplexes $\mathbb{D}\mathcal{M}$ folgt aus Proposition prop:globDim 4.10 und Lemma lem:extU 4.57.

2.: Wir konstruieren zuerst einen kanonischen Morphismus $\mathcal{M} \to \mathbb{D}^s\mathcal{M}$ für $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$. Es gilt

$$\mathbb{D}^2\mathcal{M} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\otimes -1}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\otimes -1} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{op}}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X), \mathcal{D}_X)$$

wobei $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ und $\mathcal{D}_X$ als Objekte in $D^b(\mathcal{D}_X^{op})$ aufgefasst werden. Setze $\mathcal{H} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$. Indem wir $\mathcal{H}^0(R\Gamma(X, \bullet))$ auf

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X^{op}}(\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}, \mathcal{D}_X) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{op}}(\mathcal{H}, \mathcal{D}_X))$$

anwenden erhalten wir

$$Hom_{\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X^{op}}(\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}, \mathcal{D}_X) \simeq Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{op}}(\mathcal{H}, \mathcal{D}_X))$$

Der kanonische Morphismus $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \to \mathcal{D}_X$ in $D^b(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X^{op})$ liefert den kanonischen Morphismus

$$\mathcal{M} \longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{op}}(\mathcal{H}, \mathcal{D}_X) = \mathbb{D}^2\mathcal{M}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M} \to \mathbb{D}^2\mathcal{M}$ für $\mathcal{M} \in D^b_c(\mathcal{D}_X)$ ein Isomorphismus ist. Da die Frage lokal ist, können wir annehmen, dass X affin ist. Außerdem können wir, $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{D}_X$ ersetzen indem wir eine Auflösung von M durch freie D_X-Moduln wählen. Dann ist der Beweis klar. □

Proof. $\mathbb{D}$ ist voll treu auf $D^b_c(\mathcal{D}_X)$. □

Das folgende Theorem gibt eine Abschätzung für die Dimensionen der charakteristischen varietäten $Ch(\mathcal{H}^i(\mathbb{D}\mathcal{M}))$ für $\mathcal{M} \in Mod_c(\mathcal{D}_X)$.

Theorem 4.59. *Sei X eine glatte algebraische Varietät und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{D}_X$-Modul. Es gilt*

1. $\operatorname{codim}_{T^*X} Ch(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}) \geq i$
2. $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) = 0$ *für* $i < \operatorname{codim}_{T^*X} Ch(\mathcal{M})$.

A Appendix

A.1 Hilbert Polynome

sec:Hilb

Sei $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ ein graduierter, noetherscher, kommutativer Ring mit $1 \in R_0$.

lem:RR0 **Lemma A.1.**

1. *R_0 ist noethersch.*
2. *R ist eine endlich erzeugte R_0-Algebra.*

Beweis. (1):Sei $R_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$. Dann ist R_+ ein Ideal in R und $R_0 \simeq R/R_+$. Da R noethersch ist, ist somit auch der Quotient R_0 noethersch.
(2): Das Ideal R_+ ist endlich erzeugt. Sei $x_1, \dots, x_s$ eine Menge von homogenen Erzeugern von R_+ und sei $d_i = \deg x_i$. Sei S die R_0-Unteralgebra die durch $x_1, \dots, x_s$ erzeugt wird. Wir zeigen per Induktion, dass $R_n \subset S$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Es ist klar, dass $R_0 \subset S$ gilt. Sei jetzt $n > 0$ und $y \in R_n$. Dann ist $y \in R_+$ und daher gilt $y = \sum_{i=1}^{s} y_i x_i$ wobei $y_i \in R_{n-d_i}$. Aus der Induktionsannahme folgt $y_i \in S$ und damit $y \in S$. □

Sei $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter R-Modul. Dann ist jedes M_n ein R_0-Modul und es gibt ein $N \in \mathbb{Z}$, s.d $M_n = 0$ für $n < N$.

lem:M0finite

Lemma A.2. *Die R_0-Moduln M_n $(n \in \mathbb{Z})$ sind endlich erzeugt.*

Beweis. Seien $m_1, \dots, m_k$ homogene Erzeuger von M und $\deg m_i = r_i$. Für $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seien $z_i(j)$ für $1 \leq i \leq l(j)$ alle homogenen Monome in $x_1, \dots, x_s$ vom Grad j. Für $m \in M_n$ gilt $m = \sum_{i=1}^{k} y_i m_i$ mit $y_i \in R_{n-r_i}$ und $y_i = \sum_{k=1}^{l(n-r_i)} a_{ik} z_k(n-r_i)$, also $m = \sum_{i,k} a_{ik} z_k(n-r_i) m_i$, d.h. M_n wird durch die Menge $\{z_k(n-r_i)m_i \mid 1 \leq k \leq l(n-r_i), 1 \leq i \leq k\}$ erzeugt. □

Sei $\mathcal{M}_{fg}(R_0)$ die Kategorie der endlich erzeugten R_0-Moduln. Sei λ eine Funktion auf $\mathcal{M}_{fg}(R_0)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$. Die Funktion λ heißt additiv falls für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

folgende Gleichung gilt

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$$

Bemerkung A.3.

1. $\lambda(0) = 0$
2. *Für eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0$$

Sei M ein endlich erzeugter, graduierter R-Modul. Die Poincaré-Reihe $P(M,t)$ von M (bezüglich λ) ist

$$P(M,t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M_n) t^n \in \mathbb{Z}((t))^7$$

Theorem A.4. *Sei R ein graduierter, noetherscher , kommutativer Ring mit* 1 *und $x_1, \dots, x_s$ homogene Erzeuger von R als R_0-Algebra mit $d_i = \deg x_i$. Für jeden endlich erzeugten graduierten R-Modul M gilt*

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{d_i})}$$

mit $f(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Beweis. Wir beweisen das Theorem über Induktion nach der Anzahl s der Erzeuger $x_1, \dots, x_s$ von R. Sei $s = 0$, dann gilt $R = R_0$ und M ist ein endlich erzeugter R_0-Modul. Es gilt daher $M_n = 0$ für $n \gg 0$, also ist nur für endlich viele n der Term $\lambda(M_n) \neq 0$. Daraus folgt $P(M,t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Nehme jetzt $s > 0$ an.

[7] $\mathbb{Z}((t))$ ist die Lokaliserung von $\mathbb{Z}[[t]]$ nach dem multiplikativen System $\{t^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$

Die Multiplikation mit x_s induziert einen R-Modul Endomorphismus mit Kern K und Kokern L. Dann sind K, L gaduierte R-Moduln und wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{x_s \cdot} M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Im Grad n erhalten wir

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_s \cdot} M_{n+d_s} \longrightarrow L_{n+d_s} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R_0-Moduln. Insbesondere gilt

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+d_s}) - \lambda(L_{n+d_s}) = 0$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(1 - t^{d_s})P(M,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M_n)t^n - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M_n)t^{n+d_s} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\lambda(M_{n+d_s}) - \lambda(M_n)\right) t^{n+d_s} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\lambda(L_{n+d_s}) - \lambda(K_n)\right) t^{n+d_s} \\ &= P(L,t) - P(K,t)t^{d_s} \qquad \text{(A.1.1)}\end{aligned}$$

Aus der Konstruktion folgt, dass x_s auf L und K als 0 operiert, sie tragen also die Struktur von $A/(x_s)$-Moduln und daher können wir die Induktionsannahme auf sie anwenden. Das zeigt die Behauptung. □

Wir bezeichnen mit $d_\lambda(M)$ die Polordnung von $P(M,t)$ bei 1.

kor:HilbPol **Korollar A.5.** *Sei $d_i = \deg(x_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, s$. Für genügend große n ist die Funktion $n \mapsto \lambda(M_n)$ gleich einem Polynom vom Grad $d_\lambda(M) - 1$ mit rationalen Koeffizienten.*

Beweis. Sei p der Grad der Nullstelle vonf f bei 1. Dann existiert ein $g(z) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ mit $f(t) = (1-t)^p g(t)$ und $g(1) \neq 0$. Setzte $d := d_\lambda(M) = s - p$, es gilt also

$$P(M,t) = \frac{g(t)}{(1-t)^d}$$

Es gilt

$$(1-t)^{-d} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(d+1)\ldots(d+k-1)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k-1}{d-1} t^k$$

Wir schreiben $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k t^k$ und erhalten

$$\lambda(M_n) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \binom{d+n-k-1}{d-1}$$

für alle $n \geq N$. Dies ist aber

$$\sum_{k=-N}^{N} a_k \frac{(d+n-k-1)!}{(d-1)!(n-k)!} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-k+d-1)}{(d-1)!}$$

also ist $\lambda(M_n)$ ein Polynom in n mit Leitkoeffizient

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\right) \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} = g(1)\frac{n^{d-1}}{(d-1)!} \neq 0$$

□

Wir nennen das Polynom welches für große n die Werte $\lambda(M_n)$ annimmt, das Hilbertpolynom von M.

PolyPoiHilb **Beispiel A.6.** *Sei $R = k[X_1, \ldots, X_s]$ der Polynomring in s Variablen mit Grundkörper k. Dieser ist durch den Totalgrad eines Polynoms graduiert (jedes X_i hat Grad 1). Es gilt $R_0 = k$ und für jeden endlich erzeugten graduierten R-Modul M gilt $\dim_k M_n < \infty$. Daher können wir die Poincaré-Reihe für $\lambda = \dim_k$ definieren. Im Fall $R = M$ gilt*

$$P(M,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_k M_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} t^n = \frac{1}{(1-t)^s}$$

Das Hilbertpolynom ist

$$\dim_k R_n = \binom{s+n-1}{s-1} = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \ldots$$

Wir beweisen jetzt eine Charakterisierung von Polynomen (mit Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik 0) das ganzzahlige Werte für große positive Zahlen hat. Zuerst bemerken wir aber folgendes.

bem:Pbinom **Bemerkung A.7.** *Für $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $q \geq s$ gilt*

$$q^s = s!\binom{q}{s} + Q(q)$$

wobei Q ein Polynom vom Grad $s-1$ ist. Daher kann jedes Polynom vom Grad d für große q folgendermaßen eindeutig geschrieben werden:

$$P(q) = c_0\binom{q}{d} + c_1\binom{q}{d-1} + \ldots c_{d-1}\binom{q}{1} + c_d$$

wobei die c_i geeignete Koeffizienten sind. Falls die c_i ganzzahlig sind hat das Polynom P für ganzzahlige Argumente $q \geq d$ ganzzahlige Werte.

Wir beweisen die Umkehrung.

PoylbinomInt **Lemma A.8.** *Falls das Polynom*

$$q \mapsto P(q) = c_0\binom{q}{d} + c_1\binom{q}{d-1} + \ldots c_{d-1}\binom{q}{1} + c_d$$

ganzzahlige Werte für große $n \in \mathbb{Z}$ annimmt, dann sind alle Koeffizienten c_i ganzzahlig.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach d. Der Fall $d = 0$ ist klar. Es gilt

$$\begin{aligned} P(q+1) - P(q) &= \sum_{i=0}^{d} c_i\binom{q+1}{d-i} - \sum_{i=0}^{d} c_i\binom{q}{d-i} \\ &= \sum_{i=0}^{d} c_i\left(\binom{q+1}{d-i} - \binom{q}{d-i}\right) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i\binom{q}{d-i-1} \end{aligned}$$

wobei wir die Identität $\binom{q+1}{s} = \binom{q}{s} + \binom{q}{s-1}$ benutzen. Das heißt $q \mapsto P(q+1) - P(q)$ ist ein Polynom mit Koeffizienten in $c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}$ und ist ganzzahlige für große n, da P ganzzahlig für große n ist. Die Induktionsannahme liefert dann, dass die $c_0, \ldots c_{d-1}$ ganzzahlig sind und daraus folgt, dass c_d ebenfalls ganzzahlig ist. □

Sei F ein Polynom vom Grad d mit Leitkoeffizient a_0. Dann ist

$$\begin{aligned} G(n) &= F(n) - F(n-1) \\ &= (a_0 n^d + a_1 n^{d-1} + \ldots) - (a_0(n-1)^d + a_1(n-1)^{d-1} + \ldots) = a_0 d n^{d-1} + \ldots \end{aligned}$$

ein Polynom vom Grad $d-1$ mit Leitkoeffizient da_0. Das nächste Lemma liefert die Umkehrung.

em:DifftoAc **Lemma A.9.** *Sei F eine Funktion auf $\mathbb{Z}$, s.d.*

$$G(n) = F(n) - F(n-1)$$

gleich einem Polynom vom Grad $d-1$ für große $n \in \mathbb{Z}$ ist. Dann ist F für große $n \in \mathbb{Z}$ gleich einem Polynom vom Grad d.

Beweis. Nehme an, dass $G(n) = P(n-1)$ für $n \geq N \geq d$ für ein geeignetes Polynom P vom Grad $d-1$ gilt. Dann können wir P nach Bemerkung bem:Pbinom A.7 folgendermaßen schreiben:

$$P(n) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{n}{d-i-1}$$

Wir erhalten für $n \geq N+1$:

$$F(n) = \sum_{k=N+1}^{n} (F(k) - F(k-1)) + F(N) = \sum_{k=N+1}^{n} G(k) + F(N) = \sum_{k=d}^{n} P(k-1) + C$$

wobei C eine Konstante ist. Es gilt

$$\binom{q}{s} = \sum_{j=s+1}^{q} \left(\binom{j}{s} - \binom{j-1}{s} \right) + 1 = \sum_{j=s+1}^{q} \binom{j-1}{s-1} + 1 = \sum_{j=s}^{q} \binom{j-1}{s-1} \tag{A.1.2}$$ eq.binomid1

für $q > s \geq 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=d}^{n} P(k-1) &= \sum_{k=d}^{n} \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{k-1}{d-i-1} = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left(\sum_{k=d}^{n} \binom{k-1}{d-i-1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left(\sum_{k=d-i}^{n} \binom{k-1}{d-i-1} \right) - \sum_{i=1}^{d-1} c_i \left(\sum_{k=d-i}^{d-1} \binom{k-1}{d-i-1} \right) \\ &\overset{\text{eq.binomid1 (A.1.2)}}{=} \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{n}{d-i} + C' \end{aligned}$$

□

Insbesondere ist die Summe $\sum_{n \leq N} \lambda(M_n)$ für große N gleich einem Polynom vom Grad $d_\lambda(M)$. Setzen wir,

$$\sum_{n \leq N} \lambda(M_n) = a_0 N^d + a_1 N^{d-1} + \ldots + a_{d-1} N + a_d$$

für große N, dann ist $d! a_0$ ganzzahlig.

A.2 Lokale Ringe

Im folgenden ist $(R, \mathfrak{m})$ ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring und $k = R/\mathfrak{m}$ sein Restklassenkörper.

lem:Nak **Lemma A.10** (Nakayama Lemma)**.** *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul mit $\mathfrak{m}M = M$, dann gilt $M = 0$.*

Beweis. Nehme an $M \neq 0$ und sei $m_1, \ldots, m_s$ ein minimales System von Erzeugern für M als R-Modul. Dann gilt nach Voraussetzung $v_s = \sum_{i=1}^{s} r_i m_i$ für $r_i \in \mathfrak{m}$. also $(1 - r_s) m_s = \sum_{i=1}^{s-1} r_i m_i$. Da $(1 - r_s)$ invertierbar ist, erzeugen schon die $v_1, \ldots, v_{s-1}$ M im Widerspruch zur Annahme der Minimalität. □

Da R noethersch ist, ist $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ endlich.

Lemma A.11. *Die Anzahl der minimalen Erzeuger von* $\mathfrak{m}$ *ist gleich* $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Beweis. Sei $s = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Dann können wir $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{m}$ finden, s.d. die Restklassen $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s$ eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sind. Sei I das Ideal was von $a_1, \ldots, a_s$ erzeugt wird. Dann gilt $I + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ also $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}/I) = \mathfrak{m}/I$, nach dem Nakayama-Lemma also $\mathfrak{m}/I = 0$. □

Ein minimales Erzeugendensystem $(a_1, \ldots, a_s)$ heißt Koordinatensystem von R.

Sei $GrR = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p/\mathfrak{m}^{p+1}$. Aus der Tatsache, dass $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$ mit $X_i \mapsto \overline{a}_i$ surjektiv ist, folgt dass GrR eine endlich erzeugte k-Algebra und daher ein noetherscher Ring ist.

Sei M ein endlicher erzeuger R-Modul. Wir definieren eine absteigende Filtration $\mathfrak{m}^p M$ auf M und betrachten den graduierten GrR-Modul $GrM := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1} M$.

Lemma A.12. *Sei M ein endlich erzeugeter R-Modul, dann ist GrM ein endlich erzeugter GrR-Modul.*

Beweis. Aus der Definition von GrM folgt $\mathfrak{m} \cdot Gr^p M = Gr^{p+1} M$ für $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Daher erzeugt $Gr^0 M = M/\mathfrak{m}M$ den Modul GrM. Die Behauptung folgt jetzt aus der Tatsache, dass $M/\mathfrak{m}M$ ein endlich dimensionaler k-Vektorraum ist. □

Aus Lemma lem:MOfinite A.2 folgt, dass $\dim_k /\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1} M) < \infty$ gilt. Insbesondere haben die R-Moduln $\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1} M$ endliche Länge. Da die Länge eine additive Funktion ist, folgt aus Korollar kor:HilbPol A.5 dass, für große $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, die Funktion $p \mapsto length_R(\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1} M) = \dim_k(\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1} M)$ gleich einem Polynom mit rationalen Koeffizienten ist. Außerdem ist die Funktion

$$p \mapsto length_R(M/\mathfrak{m}^p M) = \sum_{q=0}^{p-1} length_R(\mathfrak{m}^q M/\mathfrak{m}^{q+1} M)$$

für große p gleich einem Polynom mit rationalen Koeffizienten und der Leitterm ist von der Form $e\frac{p^d}{d!}$ mit $e, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Die Zahlen $d(M) := d$ bzw. $e(M) = e$ heißen Dimension bzw. Multiplizität von M.

lem:AR **Lemma A.13** (Artin-Rees Lemma)**.** *Sei M ein endlich erzeuhter R-Modul und N ein Untermodul. Dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d.*

$$\mathfrak{m}^{p+m_0} M \cap N = \mathfrak{m}^p(\mathfrak{m}^{m_0} M \cap N)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Beweis. Setze $R^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n$. Dann ist R^* in natürlicher Weise ein graduierter Ring. Sei $a_1, \ldots, a_s$ ein Koordinatensystem von R. Dann existierz ein kanonisher surjektiver Morphismus $R[a_1, \ldots, a_s] \to R^*$, d.h. A^* ist ein graduierter noetherscher Ring. Sei $M^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n M$. Dann ist M^* eine graduierter R^*-Modul, der von $M_0^* = M$ als R^*-Modul erzeugt wird. Da M ein endlich erzeugter R-Modul ist, folgt, dass M^* ein endlich erzeugter R^*-Modul ist.

Wir setzen $N^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (N \cap \mathfrak{m}^n M) \subset M^*$. Dann gilt

$$\mathfrak{m}^p(N \cap \mathfrak{m}^n M) \subset \mathfrak{m}^p \cap \mathfrak{m}^{n+p} M \subset N \cap \mathfrak{m}^{n+p} M$$

Dies zeigt, dass N^* ein R^*-Untermodul von M^* ist. Da R^* ein noetherscher Ring ist, ist N^* endlich erzeugt, d.h. es existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $\bigoplus_{n=0}^{m_0} (N \cap \mathfrak{m}^p M)$ den Modul M erzeugt. Dann gilt für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dass

$$N \cap \mathfrak{m}^{p+m_0} M = \sum_{s=0}^{m_0} \mathfrak{m}^{p+m_0-s}(N \cap \mathfrak{m}^s M) \subset \mathfrak{m}^p(N \cap \mathfrak{m}^{m_0} M) \subset N \cap \mathfrak{m}^{p+m_0} M$$

$\square$

thm:Krull **Theorem A.14** (Durchschnittsatz von Krull). *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt*

$$\bigcap_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p M = \{0\}.$$

Beweis. Setze $E = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p M$. Dann gilt nach dem Artin-Rees Lemma A.13

$$E = \mathfrak{m}^{p+m_0} M \cap E = \mathfrak{m}^p(\mathfrak{m}^{m_0} M \cap E) = \mathfrak{m}^p E$$

Insbesondere gilt $\mathfrak{m}E = E$ und daher $E = 0$ nach dem Nakayama-Lemma A.10. $\square$

lem:dMexseq **Lemma A.15.** *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten R-Moduln. Dann gilt

1. $d(M) = \max(d(M'), d(M''))$
2. *Falls $d(M) = d(M') = d(M'')$, dann gilt $e(M) = e(M') + e(M'')$.*

Beweis. Wir versehen M mit der Filtrierung $\mathfrak{m}^p M$ für $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und M' bzw. M'' mit den induzierten Filtrierungen $M' \cap \mathfrak{m}^p M$ bzw. $\mathfrak{m}^p M''$. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow GrM' \longrightarrow GrM \longrightarrow GrM'' \longrightarrow 0$$

Das zeigt für alle $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dass

$$length_R(\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1}M) = length_R((M' \cap \mathfrak{m}^p M)/(M' \cap \mathfrak{m}^{p+1}M)) + length_R(\mathfrak{m}^p M''/\mathfrak{m}^{p+1}M'')$$

bzw. nachdem wir aufsummiert haben

$$length_R(M/\mathfrak{m}^p M) = lenght_R(M'/(M' \cap \mathfrak{m}^p M)) + length_R(M''/\mathfrak{m}^p M'') \tag{A.2.1}$$ eq:addlen

Daraus folgt, dass die Funktion $p \mapsto length_R(M'/(M' \cap \mathfrak{m}^p M))$ für große p glein einem Polynom ist. Andererseit gilt wegen dem Artin-Rees Lemma A.13, dass

$$\mathfrak{m}^{p+m_0} M' \subset \mathfrak{m}^{p+m_0} M \cap M' \subset \mathfrak{m}^p M'$$

d.h. für große $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sind die Funktionen $p \mapsto length_R(M'/(M' \cap \mathfrak{m}^p M))$ und $p \mapsto length_R(M'/\mathfrak{m}^p M')$ durch Polynome mit demselben Leitterm gegeben. Die erste Aussage folgt dann unmittelbar aus Formel (A.2.1). Sind die Grade der Polynome gleich, dann folgt aus derselben Formel, dass sich die Leitterm addieren. Daraus folgt 2. . $\square$

kor:ineqdTan **Korollar A.16.** *Sei R ein noetherscher, lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, dann gilt*

$$d(M) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Beweis. Wegen Lemma A.15 reicht es zu zeigen, dass $d(R) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) =: s$ gilt[8]. Dies folgt aaber aus der Existenz eines surjektiven Homomorphismus $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$ und der Tatsache, dass die Dimension des Raums der Polynome vom Grad $\leq N$ in s Variablen ein Polynom in n vom Grad s ist. $\square$

Ein noetherscher, lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ heißt regulär falls $d(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ gilt.

[8] Es gilt $d(R) = d(R^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $d(M) \leq d(R^n)$ für endlich erzeugte M

hm:regGrIso **Theorem A.17.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring und $(a_1, \ldots, a_s)$ ein Koordinatensystem von R. Dann ist folgendes äquivalent:*

1. *R ist ein regulärer, lokaler Ring.*
2. *der kanonische Isomorphismus $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$, $X_i \mapsto a_i$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Der Morphismus $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$ ist per Definition surjektiv. Sei I der Kern, der in natürlicherweise graduiert ist. Falls der Kern $I \neq 0$ ist, enthält er ein homogenes Polynom P vom Grad $d > 0$. Sei J das ideal in $k[X_1, \ldots, X_s]$ welches von P erzeugt wird. Die Poncaré-Reihe von J ist, wegen Beispiel A.6 und $\deg P = d$, gleich $P(J, T) = \frac{t^d}{(1-t)^s}$. Aus der Additivität von $\lambda = \dim_k$ folgt

$$\begin{aligned} P(k[X_1, \ldots, X_s]/J, t) &= P(k[X_1, \ldots, X_s], t) - P(J, t) \\ &= \frac{1 - t^d}{(1-t)^s} = \frac{1 + t + \ldots + t^{d-1}}{(1-t)^{s-1}} \end{aligned}$$

Die Ordnung des Pols bei 1 der Poincaré-Reihe von $P(k[X_1, \ldots, X_s]/J, t)$ ist $s - 1$. Aus Korollar A.5 folgt dann, dass die Funktion $n \mapsto \dim_k(k[X_1, \ldots, X_s]/J)_n$ durch ein Polynom vom Grad $s - 2$ für große n gegebn ist. Daraus folgt, wegen $J \subset I$, dass die Funktion $n \mapsto \dim_k(k[X_1, \ldots, X_s]/I)_n = dim_k Gr_n R$ für große n durch einem Polynom vom Grad $\leq s - 2$ gegeben ist. Korrollar A.5 zeigt $d(R) \leq s - 1$. Also gilt $I = 0$ genau dann wenn $d(A) = s$. $\square$

p:reglocNTF **Proposition A.18.** *Sei R ein regulärer, lokaler Ring. Dann ist R nullteilerfrei.*

Beweis. Seien $a, b \in R$ und $A \neq 0, b \neq 0$. Dann gibt es wegen A.14 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $a \in \mathfrak{m}^p$, $a \notin \mathfrak{m}^{p+1}$ und $b \in \mathfrak{m}^q$, $b \notin \mathfrak{m}^{q+1}$. Dann ist $\overline{a} \in Gr_p R$ und $\overline{b} \in Gr_q R$ ungleich 0 und da GrR wegen Theorem A.17 nullteilerfrei ist, folgt $\overline{a}\overline{b} \neq 0$. d.h. $ab \neq 0$. $\square$

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ und für $x \in k^n$ sei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal erzeugt durch $(X_i - x_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$. Das Komplement von $\mathfrak{m}_x$ ist ein multiplikatives System, wir bezeichnen die entsprechende Lokalisierung mit R_x.

rop:Rxregloc **Proposition A.19.** *Die Ringe R_x für $x \in k^n$ sind n-dimensionale, reguläre, lokale Ringe.*

Beweis. Der Automorphismus $X_i \mapsto X_i - x_i$ von R induziert einen Isomorphismus $R_x \simeq R_0$. Sei $\hat{R} = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist $\hat{R}$ ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\hat{\mathfrak{m}}$ erzeugt durch $X_1, \ldots, X_s$. Es ist offensichtlich, dass der kanonische Morphismus $k[X_1, \ldots, X_n] \to Gr\hat{R}$ ein Isomorphismus ist.

Der natürliche Morphismus $R \to \hat{R}$ faktorisiert über R_0 und liefert die Inklusion $R_0 \hookrightarrow \hat{R}$. Dies induziert die Isomorphismen

$$k[X_1, \ldots, X_n] \simeq GrR \simeq GrR_0 \simeq Gr\hat{R} \simeq k[X_1, \ldots, X_n]$$

deren Verknüpfung die Identität ist. Die Aussage folgt jetzt aus Theorem A.17. $\square$

A.3 Dimension von Moduln über Polynomringen

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ wobei k ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Wir können R nach dem Totalgrad der Polynome filtrieren, d.h. $R_n = \{\sum c_I X^I \mid c_I \in k, |I| \leq n\}$. Es gilt $GrR \simeq R$ und R erfüllt die Bedingungen 1. - 7. aus Abschnitt 1.1. Da $R_0 = k$ können wir für λ die additive Funktion dim_k nehmen, d.h. wir können für einen endlich erzeugten R-Modul die Dimension $d(M)$ und Multiplizität $e(M)$ definieren. Aus Beispiel A.6 und Korollar A.5 wissen wir, dass $d(R) = n$ und $e(R) = 1$ gilt.

Für jeden endlich erzeugten R-Modul M haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

aus Proposition prop:exSeqDimMultnonLocal 1.10 folgt dann $d(M) \leq n$. Wir werden später eine geometrische Charakterisierung von $d(M)$ geben.

Sei $x \in k^n$ und sei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n]$ welches aus allen polynomen besteht, die in x verschwinden. Wie oben bezeichnen wir mit R_x die Lokalisierung von R bezüglich x. Wir haben in Proposition prop:Rxregloc A.19 gesehen, dass R_x ein regulärer, lokaler Ring ist, mit maximalen Ideal $\mathfrak{n}_x = (\mathfrak{m}_x)_x$. Sei M ein R-Modul, dann ist sein Lokalisierung M_x ein R_x-Modul. Wir definieren den **Träger** von M als $\mathrm{supp}(M) = \{x \in k^n \mid M_x \neq 0\}$.

em:suppexSeq

Lemma A.20. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt

$$\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(M') \cup \mathrm{supp}(M'')$$

Beweis. Da Lokalisierung exakt ist, erhalten wir für jedes $x \in k^n$ eine kurze exakte Sequenz von R_x-Moduln

$$0 \longrightarrow M'_x \longrightarrow M_x \longrightarrow M''_x \longrightarrow 0$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Für ein Ideal $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ sei $V(I) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für } x \in k^n\}$ die Verschwindungsmenge.

p:suppMisVI

Proposition A.21. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $I \subset R$ sein Annihilator. Dann gilt* $\mathrm{supp}(M) = V(I)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion über die Anzahl der Erzeuger von M. Wir nehmen zuerst an, dass M einen Erzeuger hat, d.h. $M = A/I$. Dann gilt $M_x = (R/I)_x = R_x/I_x$. Sei $x \in V(I)$. Dann ist $I \subset \mathfrak{m}_x$ und $I_x \subset \mathfrak{n}_x$, d.h. $I_x \neq R_x$. Daraus folgt $(R/I)_x \neq 0$ und $x \in \mathrm{supp}(M)$. Ist andererseits $x \notin V(I)$, dann existiert ein $f \in I$, s.d. $f(x) \neq 0$, d.h. $f \notin \mathfrak{m}_x$. Dann ist aber f im lokalen Ring R_x invertierbar und aus $f_x \in I_x$ folgt $I_x = R_x$. Also $(R/I)_x = 0$ und damit $x \notin \mathrm{supp}(R/I)$.

Sei jetzt M ein endlich erzeugter Modul mit Erzeugern $m_1, \ldots, m_p$. Sei M' der Untermodul von M der durch $m_1, \ldots, m_{p-1}$ erzeugt wird. Wir erhalten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

wobei M'' ein zyklischer Modul (mit Erzeuger m_p) ist. Aus Lemma lem:suppexSeq A.20 folgt $\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(M') \cup \mathrm{supp}(M'')$ und damit aus der Induktionsannahme $\mathrm{supp}(M) = V(I') \cup V(I'')$ wobei I' bzw, I'' die Annihilatoren von M' bzw. M'' sind.

Es ist klar, dass $I' \cdot I'' \subset I$ gilt, andererseits annihiliert I sowohl M' als auch M'', also

$$I' \cdot I'' \subset I \subset I' \cap I''$$

bzw. $V(I') \cup V(I'') \subset V(I' \cap I'') \subset V(I) \subset V(I' \cdot I'')$. Ist $x \notin V(I') \cup V(I'')$, dann existiert ein $f \in I'$ und $g \in I''$, s.d. $f(x) \neq 0$ und $g(x) \neq 0$, also $(f \cdot g)(x) \neq 0$ bzw. $x \notin V(I' \cot I'')$. Dies zeigt $V(I' \cdot I'') \subset V(I') \cup V(I'')$, also $V(I) = V(I') \cup V(I'')$. □

Korollar A.22. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist sein Träger eine Zariski abgeschlossene Menge in k^n.*

`em:Mfiltprim` **Lemma A.23.** *Sei S ein noetherscher, kommutativer Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter S-Modul. Dann existiert eine Filtrierung $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ von S-Moduln, s.d. $M_i/M_{i-1} \simeq S/J_i$ für Primideal $J_i \subset S$ gilt.*

Beweis. Sei $x \in M$ und $Ann(x) = \{a \in S \mid ax = 0\}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die Familie von Idealen $Ann(x)$ für $x \in M$, $x \neq 0$. Da S noethersch ist hat $\mathcal{A}$ ein maximales Elemente. Sei $I = Ann(y)$ ein maximales Element von $\mathcal{A}$. Wir zeigen, dass I prim ist. Sei $a, b \in S$ mit $ab \in I$, d.h $aby = 0$.Nehme an $b \notin I$, also $by \neq 0$. Dann gilt $I \subset Ann(by)$ und $a \in Ann(by)$. Wegen der Maximalität von I, folgt $a \in Ann(by) = I$, also ist I prim. Setze $M_1 = S/I$. Durch iteratives Anwenden finden wir Ketten $0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k$. Sei jetzt $\mathcal{F}$ die Familie von Untermoduln N von M die solche Filtrierungen besitzen. Da R noethersch ist, enthält $\mathcal{F}$ ein maximales Element L. Nehme an $L \neq M$. Dann existiert eine kurze exakte Seqeunz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow 0$$

Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, dass L' einen Untermodul N' von der Form B/J' für ein Primideal J' hat. Dies wiederspricht aber der Maximalität von L, also $L = M$. ☐

`thm:deqdim` **Theorem A.24.** *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Es gilt*

1. $d(M) = \dim \operatorname{supp}(M)$
2. *Sei $x \in \operatorname{supp}(M)$, dann ist $d(M_x) = \dim_x(\operatorname{supp}(M))$*

Beweis. Betrachte die kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Falls die Aussage für M' und M'' gilt, dann folgt aus Proposition 1.10 und Lemma A.20

$$\begin{aligned} d(M) &= \max(d(M'), d(M'')) = \max(\dim \operatorname{supp}(M'), \dim \operatorname{supp}(M'')) \\ &= \dim(\operatorname{supp}(M') \cup \operatorname{supp}(M'')) = \dim \operatorname{supp}(M) \end{aligned}$$

Für $x \in \operatorname{supp}(M)$ erhalten wir die kurze exakte Sequenz $0 \to M'_x \to M_x \to M''_x \to 0$. Falls die Aussage für M'_x und M''_x gilt, dann folgt aus Lemma A.15 und Lemma A.20 analog zum ersten Fall $d(M_x) = \dim_x \operatorname{supp}(M)$.

Es reicht somit, unter Benutzung von Lemma A.23, den Fall $M = R/J$ zu zeigen, wobei J ein Primideal ist. Ist J maximal, dann gilt $M = R/J = k$, also *supp*$(M) = \{x\}$ für ein $x \in k^n$. Das zeigt, $d(M) = d(M_x) = \dim \operatorname{supp}(M) = \dim_x \operatorname{supp}(M) = 0$.

Sei jetzt J nicht maximal. Dann existiert ein Primideal $J_1 \supsetneq J$ und somit ein $f \in J_1$ mit $f \notin J$. Es gilt somit $J \subsetneq (f) + J \subset J_1$. Betrachte den Endomorphismus von $M = R/J$ der durch Multiplikation mit f gegeben ist. Sei $g + J$ im Kern der Abbildung, dann gilt $0 = f(g + J) = fg + J$ und famit $fg \in J$. Da J prim ist und $f \notin J$ folgt $g \in J$,also ist der Endomorphismus injektiv. Wir erhalten eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \longrightarrow M/fM \longrightarrow 0$$

Ins besondere gilt wegen Proposition 1.10 $d(M/fM) \leq d(M)$. Ist $d(M/fM) = d(M)$, dann würde $e(M) = e(M) + e(M/fM)$,also $e(M/fM) = 0$, gelten. Das ist aber nur möglich, falls $d(M/fM) = 0$ bzw. $d(M) = 0$ gilt. Daraus folgt aber, dass M ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum ist, was, wegen der Annahme J nicht maximal, unmöglich ist. Also gilt $d(M/fM) < d(M)$. Da R/J_1 ein Quotient von M/fM ist, folgt $d(R/J_1) < d(R/J)$.

Sei $x \in V(J_1)$, dann erhalten wir nach Lokalisierung die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_x \xrightarrow{f} M_x \longrightarrow M_x/fM_x \longrightarrow 0$$

von R_x-Moduln. Ähnlich wie oben zeigt man, dass $d(M_x/fM_x) < d(M_x)$ ist und somit $d((R/J_1)_x) < d((R/J)_x)$ gilt. Sei

$$Z_0 = \{x\} \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_{n-1} \subset Z_n = k^n$$

eine maximale Kette von nichtleeren, irreduziblen, abgeschlossenen Untermengen von k^n. Dann ist

$$I(Z_0) = \mathfrak{m}_x \supset I(Z_1) \supset \ldots \supset I(Z_{n-1}) \supset I(Z_n) = \{0\}$$

eine maximale Kette von Primidealen in R. Wegen den vorhergegangenen Argumenten haben wir folgende strikte Ungleichungen

$$0 \leq d(R/I(Z_0)) < d(R/I(z_1)) < \ldots < d(R/I(Z_n)) = d(R) = n$$

bzw. wegen Proposition A.19

$$0 \leq d((R/I(Z_0))_x) < d((R/I(z_1))_x) < \ldots < d((R/I(Z_n))_x) = d(R_x) = n$$

Daraus folgt aber

$$d((R/I(Z_j))_x) = d(R/I(Z_j)) = j = \dim Z_j$$

für $0 \leq j \leq n$. Da aber zu jeder irreduziblen, abgeschlossenen Menge Z eine maximale Kette konstruiert werden kann, die Z enthält, folgt $d((R/I(Z))_x) = d(R/I(Z)) = \dim Z$ für jede irreduzible, abgeschlossenen Menge $Z \subset k^n$. Dies zeigt, dass für jedes Primideal $J \subset R$ $d((R/J)_x) = d(R/J) = \dim V(J)$ gilt. Wegen Proposition A.21 folgt die Behauptung. □

Korollar A.25. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt*

$$d(M) = \sup_{x \in \mathrm{supp}(M)} d(M_x)\,.$$

lem:VIeqVGrI **Lemma A.26.** *Sei I ein Ideal in R. Dann gilt* $\dim V(I) = \dim V(GrI)$.

Beweis. Die kurze exkate Sequenz von filtrierten R-Moduln (wobei die Filtrierung von der Totalgrad Filtrierung von R induziert ist)

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

liefert die kurze exkate Sequenz

$$0 \longrightarrow GrI \longrightarrow R \longrightarrow Gr(R/I) \longrightarrow 0$$

von graduierten R-Moduln. Es gilt

$$\begin{aligned}\dim_k F_p(R/I) &= \sum_{q=0}^{p}(\dim_k F_q(R/I) - \dim_k F_{q-1}(R/I))\\ &= \sum_{q=0}^{p}\dim_k Gr_p(R/I) = \sum_{q=0}^{p}(\dim_k Gr_pR - \dim Gr_pI)\\ &= \dim_k F_pR - \dim_k F_pGrI = \dim_k F_p(R/GrI)\end{aligned}$$

also $d(R/I) = d(R/GrI)$. Aus Theorem A.24 folgt dann die Behauptung. □

A.4 Singuläre Träger

Sei R ein kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Wir bezeichnen mit $\mathrm{supp}(M)$ die Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ von R, s.d. $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ gilt. und mit $\mathrm{supp}_0(M) \subset \mathrm{supp}(M)$ die Menge der minimalen Primideale. Es gilt $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}(M)$ genau dann wenn $Ann_R(M) \subset \mathfrak{p}$. Es gilt

$$rad(Ann_R(M)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}(M)} \mathfrak{p}$$

Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}_0(M)$ bezeichnen wir die Länge des artinschen $R_\mathfrak{p}$-Moduls $M_\mathfrak{p}$ mit $\ell_\mathfrak{p}(M)$ (siehe [Eisenbud, Kapitel 2.4]). Wir definieren $\ell_\mathfrak{q}(M) = 0$ für ein Primideal $\mathfrak{q} \notin \mathrm{supp}(M)$. Für eine exakte Sequenz von endlich erzeugten R-Moduln erhalten wir

$$\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(L) \cup \mathrm{supp}(N)$$

Schließlich gilt für $\mathfrak{p} \in supp_0(M)$

$$\ell_\mathfrak{p}(M) = \ell_\mathfrak{p}(L) + \ell_\mathfrak{p}(N).$$

Sei jetzt (A, F) ein filtrierter Ring, s.d $gr^F A$ kommutativ und noethersch ist. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Für eine gute Filtrierung F betrachten wir $\mathrm{supp}(gr^F M)$ und für $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}_0(M)$ die Länge $\ell_\mathfrak{p}(gr^F M)$.

dfiltlength **Lemma A.27.** $\mathrm{supp}(Gr^F M)$ *und* $\ell_\mathfrak{p}(Gr^F M)$ *für* $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}_0(Gr^F M)$ *hängen nicht von der Wahl einer guten Filtrierung* F *ab.*

Beweis. Wir sagen, dass zwei gute Filtrierungen F und G benachbart sind, wenn sie die Bedingung

$$F_i M \subset G_i M \subset F_{i+1} M \qquad \forall\, i \in M$$

erfüllen. Wir zeigen die Behauptung zuerst in diesem Fall. Betrachte den natürlichen Homomorphismus $\varphi_i : F_i M / F_{i-1} M \to G_i M / G_{i-1} M$. Dann gilt $\ker \varphi_i \simeq G_{i-1} M / F_{i-1} M \simeq \mathrm{Coker}\, \varphi_{i-1}$. Das heißt für $\varphi : gr^F M \to gr^G$ gilt $\ker \varphi \simeq \mathrm{Coker}\, \varphi$. Betrachte die exakte Sequenz von endlich erzeugten $gr^F A$-Moduln

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow gr^F M \xrightarrow{\varphi} gr^G M \longrightarrow \mathrm{Coker}\, \varphi \longrightarrow 0$$

Daraus erhalten wir

$$\mathrm{supp}(gr^F M) = \mathrm{supp}(\ker \varphi) \cup \mathrm{supp}(\mathrm{Im}\, \varphi)$$
$$\mathrm{supp}(gr^G M) = \mathrm{supp}(\mathrm{Im}\, \varphi) \cup \mathrm{supp}(\mathrm{Coker}\, \varphi)$$

Aus dem Isomorphismus $\ker \varphi \simeq \mathrm{Coker}\, \varphi$ folgt dann $\mathrm{supp}(gr^F M) = \mathrm{supp}(gr^G M)$. Außerdem folgt für $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}_0(gr^F M) = \mathrm{supp}_0(gr^G M)$, dass

$$\ell_\mathfrak{p}(gr^F M) = \ell_\mathfrak{p}(\ker \varphi) + \ell_\mathfrak{p}(\mathrm{Im}\, \varphi) = \ell_\mathfrak{p}(\mathrm{Coker}\, \varphi) + \ell_\mathfrak{p}(\mathrm{Im}\, \varphi) = \ell_\mathfrak{p}(gr^G M)$$

Dies beweist die Aussage für benachbarte Filtrierungen. Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall, das heißt F und G sind jetzt zwei beliebige gute Filtrierungen von M. Für $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$F_i^{(k)} M = F_i M + G_{i+k} M$$

Wir wollen zeigen, dass die Filtrationen $F_i^{(k)} M$ für alle k gut sind. Es ist leicht zu sehen, dass $F_i^{(k)} M = 0$ für $i \ll 0$ gilt und auch , dass $F_\bullet^{(k)} M$ ausschöpfend ist. Da für alle $i \in \mathbb{Z}$ $F_i M$ und $G_i M$ endlich erzeugte $F_0 A$-Moduln sind, ist auch $F_i M + G_{i+k} M$ endlich erzeugt. Da beide Filtrationen gut sind existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, s.d. $F_n A \cdot F_m M = F_{n+m} M$ und $F_n A \cdot G_m M = G_{n+m} M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und alle $m \geq m_0$. Daraus folgt

$$F_n A \cdot F_m^{(k)} = F_n A \cdot (F_m M + G_{m+k} M) = F_{m+n} M + G_{m+k+n} M = F_{m+n}^{(k)} M$$

Für die Filtrationen $F^{(k)} M$ erfüllen folgende Eigenschaften

1. $F^{(k)} M = FM$ für $(k << 0)$
2. $F^{(k)} M = G[k] M$ für $k \gg 0$
3. $F^{(k)} M$ und $F^{(k+1)} M$ sind benachbart

hier bezeichnen wir mit $G[k]M$ die Filtration von GM, die durch einen Shift um den Grad k hervorgeht. Das zeigt die Behauptung im allgemeinen Fall.

Definition A.28. *Für einen endlich erzeugten A-Modul M definieren wir*

1. $SS(M) = \mathrm{supp}(gr^F M)$
2. $SS_0(M) = \mathrm{supp}_0(gr^F M)$
3. $m_\mathfrak{p}(M) = \ell_\mathfrak{p}(gr^F M)$ *für* $\mathfrak{p} \in SS_0(M)$ *oder* $\mathfrak{p} \notin SS(M)$.

Lemma A.29. *Sei*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln. Es gilt

$$SS(M) = SS(L) \cup SS(N),$$
$$m_\mathfrak{p}(M) = m_\mathfrak{p}(L) + m_\mathfrak{p}(N)$$

□

A.5 Glatte algebraische Varietäten

Sei X eine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenem Körper k der Charakteristik 0. Sei $\mathcal{O}_X$ die zugehörige Strukturgarbe. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X,x}$ den Halm von $\mathcal{O}_X$ bei x. Der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein noetherscher lokaler Ring mit maximalen ideal $\mathfrak{m}_x$, welches aus Funktionskeimen besteht die auf x verschwinden.

ertdimeqdim **Lemma A.30.** *Sei $x \in X$, dann gilt $d(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim_x X$.*

Beweis. Da die Behauptung lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass X eine abgeschlossene Teilmenge von k^n ist. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow O_X \longrightarrow 0$$

wobei I das Ideal ist, welches X definiert. Lokalisierung bei x liefert

$$0 \longrightarrow I_x \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n]_x \longrightarrow O_{X,x} \longrightarrow 0$$

Dies identifiziert $\mathcal{O}_{X,x} = O_{X,x}$ mit dem Quotienten $\mathcal{O}_{k^n,x}/I_x = k[x_1, \ldots, x_n]/I_x$. Ist $m_x \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ das zu $x \in k^n$ zugehörige maximale Ideal und $\mathfrak{m}_x$ das zugehörige maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$, dann bildet der Quotientenmorphismus die Lokalisierung $(m_x)_x$ surjektiv auf $\mathfrak{m}_x$ ab. Daraus folgt, dass die Filtrierung $(\mathfrak{m}_x^p; p \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ von $\mathcal{O}_{X,x}$ mit der Filtrierung $((m_x)_x^p \mathcal{O}_{X,x}; p \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$des $\mathcal{O}_{k^n,x}$-Moduls $\mathcal{O}_{X,x}$ übereinstimmt. Das heißt die Dimension $d(\mathcal{O}_{X,x})$ des lokalen Ringes $\mathcal{O}_{X,x}$ ist gleich der Dimension des Moduls $\mathcal{O}_{X,x}$ über $\mathcal{O}_{k^n,x}$. Es gilt also

$$d(\mathcal{O}_{X,x}) = dim_x(\mathrm{supp}(O_X)) = dim_x X$$

wobei das erste Gleichheitszeichen aus Theorem thm:deqdim A.24 folgt. □

Wir nennen den Vektorraum $T_x^*(X) := \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x)^2$ den **Kotangentialraum** von X am Punkt x. Sein Dualraum $T_x(X)$ heißt **Tangentialraum** von X am Punkt x.

Proposition A.31. *Sei $x \in X$. Der Tangentialraum, $T_x(X)$ ist endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim_k T_x(X) \geq \dim_x X$$

Beweis. Das folgt direkt aus Lemma A.30 und Korollar A.16. ☐

Sei $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, dann ist $f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$ und wir bezeichnen mit $df(x)$ das Bild in $T_x^*(X)$.

lem:dDerv **Lemma A.32.** *Die linerae Abbildung $d : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow T_x^*(X)$ erfüllt*

$$d(fg)(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$$

für jedes $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} d(fg)(x) &= fg - f(x)g(x) + \mathfrak{m}_x^2 = fg - f(x)g(x) - (f - f(x))(g - g(x)) + \mathfrak{m}_x^2 \\ &= g(x)(f - f(x)) + f(x)(g - g(x)) + \mathfrak{m}_x^2 = f(x)dg(x) + g(x)df(x) \end{aligned}$$

☐

Für $X = k^n$ zum Beispiel gilt

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(x) dx_i$$

für jeden Keim $f \in k[x_1, \ldots, x_n]_x$. Das heißt $(dx_1, \ldots, dx_n)$ bilden eine Basis von $T_x^*(k^n)$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} k^n &\longrightarrow T_x^*(X) \\ (\xi_1, \ldots, \xi_n) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von k^n auf $T_x(k^n)$.

Seien jetzt X und Y zwei algebraische Varietäten über k und $\phi : X \to Y$ ein Morphismus. Dies induziert für jedes $x \in X$ einen Morphismus $\phi_x : \mathcal{O}_{Y,\phi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ welcher durch $\phi_x(f) = f \circ \phi$ gegeben ist. Es gilt $\phi(\mathfrak{m}_{\phi(x)}) \subset \mathfrak{m}_x$ und $\phi(\mathfrak{m}_{\phi(x)}^2) \subset \mathfrak{m}_x^2$. Wir erhalten somit eine lineare Abbildung $T_x^*(\phi) : T_{\phi(x)}^*(Y) \to T_x^*(X)$. Ist $f \in \mathcal{O}_{Y,\phi(x)}$ dann gilt

$$T_x^*(\phi)(df(\phi(x))) = d(f \circ \phi)(x) \tag{A.5.1}$$ eq:CoTangmap

Die duale Abbildung $T_x(\phi) : T_x(X) \to T_{\phi(x)}(X)$ von $T_x^*(\phi)$ heißt die Tangentialabbildungen von ϕ am Punkt x. Ist $\xi \in T_x(X)$ und $f \in \mathcal{O}_{Y,\phi(x)}$, dann gilt

$$(T_x(\phi)(\xi))(df(\phi(x))) = \xi(T_x^*(\phi)(df(\phi(x)))) = \xi(d(f \circ \phi)(x)$$

:propTangmap **Lemma A.33.**

1. *Seien X, Y und Z algebraische Varietäten und $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to Z$ Morphismen. Für $x \in X$ gilt*

$$T_x(\beta \circ \alpha) = T_{\alpha(x)}(\beta) \circ T_x(\alpha).$$

2. *Sei Y eine Untervarietät von X und $j : Y \to X$ die kanonische Einbettung. Dann ist $T_y(j) : T_y(Y) \to T_y(X)$ für jedes $y \in Y$ eine Injektion.*

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition. Für die zweite Aussage können wir oBdA, dass Y abgeschlossen in X und X affin ist. Sei $I(Y) \subset O_X$ das definierende Ideal von Y. Dann ist $\mathcal{O}_{Y_x}$ die Lokaliserung von $O_X/I(Y)$ am Punkt y. Da lokalisieren exakt ist, ist $\mathcal{O}_{Y,y}$ ein Quotient von $\mathcal{O}_{X,y}$. Das zeigt, dass die lineare Abbildung $T_y^*(j) : T_y^*(X) \to T_y^*(Y)$ surjektiv ist, die duale Abbildung $T_y(j)$ ist also injektiv. ☐

Sei X eine Untervarietät von k^n. Aus dem obigen Lemma sehen wir, dass $T_x(j)$ den Tangentialraum $T_x(X)$ mit einem Untervektorruam von $T_x k^n \simeq k^n$ identifiziert. Da folgende Lemma gibt eine Charakterisierung dieses Unterraumes.

Lemma A.34. *Für jedes $x \in X$ gilt*

$$T_x(X) = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} \xi_i (\partial_i P)(x) = 0 \ \ \forall P \in I\} \tag{A.5.2}$$

Beweis. Aus dem Beweis von Lemma A.33 2. folgt, dass $T_x(X)$ orthogonal zum Kern von $T_x^*(j) : k^n \to T_x^*(X)$ ist. Andererseits folgt aus (A.5.1), dass $\ker T_x^*(j) = \operatorname{span}\{df(x) \mid f \in I_x\}$ gilt. Jeder Keim $f \in I_x$ ist der Keim einer rationalen Funktion P/Q mit $Q(x) \neq 0$ und $P \in I$. Wegen Lemma A.32 gilt $df(x) = \frac{1}{Q(x)} dP(x)$, also $\operatorname{span}\{df(x) \mid f \in I_x\} = \operatorname{span}\{dP(x) \mid P \in I\}$. □

Proposition A.35. *Die Funktion $x \mapsto \dim_k T_x(X)$ auf einer algebraischen Varietät X ist ober-halbstetig*[9].

Beweis. Da die Aussage lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass X eine abgeschlossene Untervarietät von k^n ist. Sei $\dim T_x(X) = p$. Wegen (A.5.2) existieren Polynome $P_1, \dots, P_{n-p} \in I$, s.d. die Matrix $[(\partial_i P_j)(x)]$ Rang $n - p$ hat. Das bedeutet aber, dass der Rang in einer Umgebung U von X auch gleich $n - p$ ist. Insbesondere gilt dann $\dim_k T_y(X) \leq p$ für $y \in U \cap X$. □

Wir sagen, dass ein Punkt $x \in X$ glatt ist, falls $\dim_k T_x(X) = \dim_x X$ gilt. Wir benutzen folgendes Theorem ohne Beweis.

Theorem A.36. *Sei X eine algebraische Varietät über k. Dann gilt:*

1. *Die Menge aller glatten Punkte von X ist offen und dicht in X.*
2. *Ein glatter Punkt $x \in X$ ist in einer eindeutig bestimmten irreduziblen Komponente von X enthalten.*

Eine algebraische Varietät heißt glatt, falls alle Punkte glatt sind.

Korollar A.37. *Sei X eine glatte algebraische Varietät. Dann sind die irreduziblen Komponenten die Zusammenhangskomponenten.*

Daraus folgt, dass die Funktion $x \mapsto dim_x X$ auf einer glatten Varietät lokal konstant ist.

Theorem A.38. *Sei X eine algebraische Varietät und $x \in X$ ein glatter Punkt, s.d. $\dim_x X = n$ gilt. Dann existiert eine offene affine Umgebung U von x, Funktionen $f_1, \dots, f_n \in O_U$ und Vektorfelder $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{T}(U)$ (siehe Abschnitt 2.1), s.d.*

$$D_i(f_j) = \delta_{ij} \qquad \text{für} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Beweis. Das die Aussage lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass X eine glatte, irreduzible affine Varietät ist, die in einen k^m als abgeschlossene Menge eingebettet ist. Sei I das Ideal aller Polynome in $A = k[x_1, \dots, x_n]$, die auf X verschwinden. Das $\dim_k T_x(X) = \dim_x X = n$ können wir wegen (A.5.2) Poynome $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_m \in I$ finden, s.d. die Matrix $[(\partial_i P_j)(x)]$ Rang $n - m$ hat. Damit ist der Rang aber auch in einer Umgebung V von X gleich $m - n$ und es gilt außerdem

$$T_x(X))\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in k^m \mid \sum_{i=1}^{m} \xi_i (\partial_i P_j)(x) = 0, n + 1 \leq j \leq m\}\,.$$

[9]Eine Funktion f heißt in x_0 oberhalbstetig, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 existiert, s.d. $f(y) < f(x_0) + \epsilon$ für alle $y \in U$ gilt

Sei J das Ideal in A welches von $P_{n+1}, \dots, P_m$ erzeugt wird. Wir wollen zuerst $J_x = I_x$ zeigen. Aus der Definition von J folgt unmittelbar $J \subset I$. Sei Y die Menge aller Nullstellen von J in k^m. Es gilt

$$\dim_x Y \geq \dim X = \dim_k T_x(X) = \dim_k T_x(Y) \geq \dim_x Y$$

Daraus folgt $\dim X = \dim_x Y$. Daher ist X eine irreduzible Komponente von Y. Andererseits gilt $\dim_x Y = \dim_k T_x(Y)$ und daher ist x ein glatter Punkt von Y und liegt in einer eindeutig bestimmten irreduziblen Komponente. von Y. Daraus folgt, dass es eine Umgebung $V' \subset V$ von x gibt, die keine andere irreduzible Komponente von Y schneidet.. Daraus folgt, dass $r(J)_x = I_x$ gilt. Betrachte den lokalen Ring $(A/J)_x$. Sein maximales Ideal ist $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{m}_x/J_x$ und es gilt $\mathfrak{n}_x^p = \mathfrak{m}_x^p/J_x$ für alle $p \in \mathbb{Z}_{geq1}$. Daher ist die Dimension des lokalen Ringes $(A/J)_x$ gleich der Dimension als A_x-Modul. Aus Theorem thm:degdim A.24 folgern wir

$$d((A/J)_x) = \dim_x(V(J)) = dim_x Y = \dim X = n$$

Andererseits haben wir eine exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorräumen

$$0 \longrightarrow (J_x + \mathfrak{m}_x^2)/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow \mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2 \longrightarrow 0$$

wobei $(J_x + \mathfrak{m}_x^2)/\mathfrak{m}_x^2 = \{df(x) \mid f \in J_x\}$ durch $dP_i(x)$ mit $i = n+1, \dots, m$ aufgespannt wird. Da $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ gilt, folgt $\dim_k(\mathfrak{n}_x/\mathfrak{n}_x^2) = n$ und damit ist $(A/J)_x$ ein regulärer, lokaler Ring. Wegen Proposition prop:reglocNTF A.18 ist $(A/J)_x$ nullteilerfrei und daher ist J_x prim. Daraus folgt $I_x = J_x$.

Dies zeigt, dass der Träger des A-Moduls I/J nicht x enthält. Insbesondere existiert ein $g \in A$, s.d. die offene Menge $V'' := V' \cap \{g \neq 0\}$ zu $\mathrm{supp}(I/J)$ disjunkt ist. Das bedeutet $(I/J)_g = 0$ und damit $I_g = J_g$.

Wir können Polynome $P_1, P_2, \dots, P_n \in A$ finden, s.d. die Matrix $[\partial_i P_j)(x)]$ für $i, j = 1, \dots, m$ invertierbar ist. Indem wir g möglicherweise abändern, können wir annhemen, dass die Matrix auf ganz V'' invertierbar ist. Wir bezeichnen mit Q ihre Inverse. Die MAtrixkoeffizienten von Q sind dann in A_g, d.h. auf V'' können wir die Differentialoperatoren $\delta_i = \sum_{j=1}^m Q_{ij}\partial_j$ für $i = 1, \dots, n$ definieren. Per Konstruktion erfüllen sie:

$$\delta_i P_j = \sum_{k=1}^m Q_{ik}\partial_k P_j = \delta_{ij}$$

für $j = 1, \dots, m$. Da jedes $f \in J_g$ durch $f = \sum_{j=n+1}^m h_j P_j$ mit $h_j \in A_g$ dargestellt werden kan, folgt für $i = 1, \dots, n$

$$\delta_i(f) = \delta_i(\sum_{j=n+1}^m h_j P_j) = \sum_{j=n+1}^m (\delta_i(h_j)P_j + h_j\delta_i(P_j)) = \sum_{j=n+1}^m \delta_i(h_j)P_j \in J_g$$

Das heißt $J_g = I_g$ ist invariant unter der Wirkung von δ_i für $i = 1, \dots, n$. Das zeigt aber, dass die δ_i mit $i = 1, \dots, n$ lokale Vektorfelder auf $U = X \cap V''$ induzieren, die wir mit D_i bezeichnen. Bezeichnen wir außerdem die Restriktionen der P_i für $i = 1, \dots, n$ auf Uit f_i dann gilt

$$D_i(f_j) = \delta_i(P_j) = \delta_{ij}$$

□

Wir nennen $(f_1, f_2, \dots, f_n; D_1, D_2, \dots, D_n)$ ein **Koordinatensystem** auf $U \subset X$.

lem:basisTX **Lemma A.39.** *Sei X eine algebraische Varietät und $x \in X$ ein glatter Punkt mit $\dim_x X = n$. Dann existiert eine offene affine Umgebung U von x und ein Koordinatensystem $(f_1, \dots, f_n; D_1, \dots, D_n)$ auf $U \subset X$, s.d. $D_1, \dots, D_n$ eine Basis von $\mathcal{T}_X(U)$ als freier $\mathcal{O}_X(U)$-Modul bilden. Außerdem gilt*

$$[D_i, D_j] = 0$$

für $i, j = 1, \dots, n$.

Beweis. Da jeder glatte Punkt von X in einer eindeutig bestimmten irreduziblen Komponente liegt, können wir annehmen, dass die Umgebung U aus Theorem A.38 irreduzibel ist. Dann gilt $\dim U = n$. Sei $\mathcal{R}(U)$ der Körper der rationalen Funktionen auf U. Da U n-dimensional ist, ist der Transzendenz-Grad von $\mathcal{R}(U)$ über k gleich n. Sei $(f_1, \dots, f_n; D_1, \dots, D_n)$ ein Koordinatensystem auf U. Wir wollen zeigen, dass die $f_1, \dots, f_n$ algebraisch unabhängig über k sind. Wenn nicht, finden wir ein Polynom $0 \neq P \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit minimalen Grad, s.d. $P(f_1, \dots, f_n) = 0$ gilt. Das bedeutet aber

$$0 = D_i(P(f_1, \dots, f_n)) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j P)(f_1, \dots, f_n) D_i(f_j) = (\partial_i P)(f_1, \dots, f_n)$$

Aufgrund der Minimalität von P, muss $\partial_i P = 0$ für $i = 1, \dots, n$ gelten. Da k Charakteristik 0 hat, folgt,m dass P ein konstantes Polynom ist, was nicht möglich ist.

Sei K der Unterkörper von $\mathcal{R}(U)$ der von $f_1, \dots, f_n$ erzeugt wird. Dann ist der Transzendenzgrad von K über k gleich n und $\mathcal{R}(U)$ ist eine algebraische Erweiterung von K.

Da ein Vektorfeld auf U eine Derivation von O_U ist, erweitert sie sich zu einer Derivation von $\mathcal{R}(U)$. Andererseits ist $\mathcal{R}(U)$ eine algebraische Erweiterung von K. Durch differenzieren sieht man, dass eine Derivation auf $\mathcal{R}(U)$ eindeutig durch ihre Einschränkung auf K gegeben ist. Daraus folgt aber, dass ein Vektorfeld auf U vollständig durch die Einschränkung auf den Unterring von O_U bestimmt ist, der durch $f_1, \dots, f_n$ erzeugt wird.

Sei jetzt $T \in \mathcal{T}_X(U)$ und setze $g_i := T(f_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Es gilt

$$(T - \sum_{i=1}^{n} g_i D_i)(f_j) = T(f_j) - \sum_{i=1}^{n} g_i D_i(f_j) = 0$$

Aus obiger Diskussion folgt daher $T = \sum_{i=1}^n g_i D_i$, d.h $D_1, \dots, D_n$ erzeugen $\mathcal{T}_X(U)$. Gilt andererseits $\sum_{i=1}^n h_i D_i = 0$ für gewisse $h_i \in O_U$, dann folgt

$$0 = (\sum_{i=1}^{n} h_i D_i)(f_j) = h_j$$

für $j = 1, \dots, n$. Das heißt der $\mathcal{O}_X(U)$-Modul $\mathcal{T}_X(U)$ ist frei mit Basis $(D_1, \dots, D_n)$. Schließlich gilt für $i, j, k = 1, \dots, n$

$$[D_i, D_j](f_k) = D_i(D_j(f_k)) - D_j(D_i(f_k)) = 0$$

was $[D_i, D_j] = 0$ zeigt. □

Sei $x \in X$ und $T \in \mathcal{T}_{X,x}$. Dann induziert T eine Derivation des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$. Da T eine Derivation ist, folgt aus $f \in \mathfrak{m}_x^2$, dass $T(f) \in \mathfrak{m}_x$. Für $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ gilt $T(f)(x) = T(f - f(x))(x)$ und daher hängt das Ergebnis nur von $df(x) \in T_x^*(X)$ ab. Die Abbildung $f \longrightarrow T(f)(x)$ faktorisert daher über $T_x^*(X)$ und definert eine Tangentialvector $T(x) \in T_x(X)$, der $T(x)(df(x)) = T(f)(x)$ für $f \in \mathcal{O}_x$ erfüllt. Das heißt, dass wir eine lineare abbildung $\mathcal{T}_{X,x} \to T_x(X)$ konstruiert haben, welche eine lineare Abbildung von der geometrischen Faser $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x}$ auf $T_x(X)$ induziert.

Proposition A.40. *Sei x ein glatter Punkt einer algebraischen Varietät X. Dann ist die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x} \to T_x(X)$ ein Isomorphismus.*

Proof. Sei $n = \dim_x X$. Wegen Lemma A.39 wissen wir, dass $\mathcal{T}_{X,x}$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist. Insbesondere existieren $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ und $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{T}_{X,x}$, s.d. $D_i(f_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j, \leq n$ gilt, s.d. $(D_1, \dots, D_n)$ eine Basis des freien $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls $\mathcal{T}_{X,x}$ ist. Die Bilder von $D_1, \dots, D_n$ in $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{T}_{X,x}$ sind eine k-Vektorraum Basis. Andererseits erfüllen die $D_i(X)$ die Gleichung $D_i(x)(df_j(x)) = \delta_{ij}$, sie sind also linear unabhängig. Da der Tangentialraum $T_x(X)$ n-dimensional ist, folgt dass $(D_i(X), 1 \leq i \leq n)$ eine Basis von $T_x(X)$ ist. Daher ist die Abbildung bijektiv. □

lem:basisTX prop:fiberTX

Lemma A.39 und Proposition A.40 liefern folgendes Resultat.

thm:freeTX **Theorem A.41.** *Sei X eine glatte algebraische Varietät. Die Tangentialgarbe $\mathcal{T}_X$ ist ein lokal-freier $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang. Für jedes $x \in X$ ist die geometrische Faser von $\mathcal{T}_X$ kanonisch isomorph zu $T_x(X)$.*

Sei X eine glatte algebraische Varietät und $T(X) = \{(x, \xi) ßmid \xi \in T_x(X), x \in X\}$. Wir zeigen, dass $T(X)$ in natürlicher Weise eine algebraische varietät ist. Wir nehmen zuerst an, dass $\mathcal{T}_X$ ein freier $\mathcal{O}_X$-Modul ist. Sei $T_1, \dots, T_n)$ eine Basis von $\mathcal{T}_X$- Wir definieren eine Bijektion ϕ von $X \times k^n$ auf $T(X)$ durch

$$\phi(x, \xi_1, \dots, \xi_n) = (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i T_i(x))$$

Wir definieren die Struktur einer algebraischen varietät auf $T(X)$ indem wir fordern, dass $\phi : X \times k^n \longrightarrow T(X)$ ein Isomorphismus ist. Sei $(T_1' \dots, T_n')$ eine andere Basis des freien $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{T}_X$ und $\phi' : X \times k^n \to T(X)$ die entsprechende Abbildung. Dann existiert eine invertierbare Matrix Q mit Einträgen in O_X, s.d. $T_i' = \sum_{j=1}^{n} Q_{ji} T_j$. Es gilt also

$$\begin{aligned}\phi'(x, \xi_1, \dots, \xi_n) &= (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i T_i'(x)) \\ &= (x, \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i Q_{ji}(x) T_j(x)) = \phi(x, Q(x)(\xi_1, \dots, \xi_n))\end{aligned}$$

das heißt ϕ' ist ein Isomorphismus genau dann, wenn ϕ ein Isomorphismus ist. Daher ist die Wahl der algebraischen Struktur von X unabhängig von der Wahl der Basis von $\mathcal{T}_X$.

thm:freeTX

Sei jetzt X eine beliebige glatte, algebraische Varietät. Wegen Theorem A.41 existiert eine offene Überdeckung $(U_1, \dots, U_s)$ von X, s.d. $\mathcal{T}_X \mid U_i = \mathcal{T}_{U_i}$ freie $\mathcal{O}_{U_i}$-Moduln sind. Es ist klar, dass $T(X)$ die Vereinigung der $T(U_i)$ für $1 \leq i \leq s$ sind und jedes $T(U_i)$ eine algebraische Struktur trägt. Da diese Struktur unabhängig von der Wahl der Basis ist, sind die algebraischen Strukturen, die von $T(U_i)$ und $T(U_j)$ auf $T(U_i) \cap T(U_j)$ induziert werden, dann sind beide gleich. Dies definiert eine algebraische Struktur auf $T(X)$. Wir nennen $T(X)$ das Tangentialbündel von X. Wir haben Abbildungen $i : X \to T(X)$ mit $i(x) = (x, 0)$ und $p : T(X) \to X$ mit $p(x, \xi) = x$. Diese Abbildunegn sind Morphismen von algebraischen Varietäten. WIr erhalten folgendes Resultat.

Proposition A.42. *Sei X eine glatte algebraische Varietät. Dann gilt*

1. *Das Tangentialbündel $T(X)$ ist eine glatte, algebraische Varietät mit*

$$\dim_{(x,\xi)} T(X) = 2 \dim_x X$$

2. *die Faserung $p : T(X) \to X$ ist lokal-trivial.*

Ist X eine glatte Varietät, dann können wir folgenden $\mathcal{O}_X$-Modul definieren

$$\mathcal{T}_X^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X)$$

Da $\mathcal{T}_X$ lokal-frei von endlichem Rang ist, dann gilt dies auch für $\mathcal{T}_X^*$. Das zeigt, dass die geometrische Faser über $x \in X$ kanonisch isomorph zum Kotangentialraum $T_x^*(X)$ ist. Sei $U ßsubset X$ offen und $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Dann definiert dies ein Element in $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X)(U) = Hom_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{T}_X(U), \mathcal{O}_X(U))$ durch die Abbildung $T \mapsto T(f)$, die wir als df (Differential von f) bezeichnen. Es gilt

$$df(T)(x) = T(f)(x) = T(x)(df(x))$$

für jedes $x \in U$. Daher können wir $df(x)$ als Element der geometrischen Faser $T_x^*(X)$ von $\mathcal{T}_X^*$ auffassen. Sei $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$ ein Koordinatensystem auf einer affinen, offenen Teilmenge $U \subset X$, Dann ist $D_1, \ldots, D_n)$ eine Basis von $\mathcal{T}_X(U)$ und $df_1, \ldots, df_n$ ist die duale Basis in $\mathcal{T}_X^*(U)$.

Wie im Fall des Tangentialbündels, definieren wir auf $T^*(X) = \{(x, \omega) \mid \omega \in T_x^*(X), x \in X\}$ eine algebraische Struktur, indem wir für eine affine, offene Teilmenge $U \subset X$ mit Koordinatensystem $(f_1, \ldots, f_n, D_1, \ldots, D_n)$, s.d. $d(f_1, \ldots, df_n)$ eine Basis von $\mathcal{T}_X^*(U)$ liefern, einen Isomorphismus $U \times k^n \to T^*(U) \subset T^*(X)$ definieren, der durch

$$\phi^*(x, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i df_i(x))$$

definiert ist. Diese Varietät heißt Kotangentialbündel von X. Wir erhalten natürliche Abbildungen $\iota : X \to T^*(X)$ mit $\iota(x) = (x, 0)$ und $p : T^*(X) \to X$ mit $\pi(x, \omega) = x$. Diese abbildungen sind Morphismen von algebraischen Varietäten.

Proposition A.43. *Sei X eine glatte, algebraische Varietät. Dann gilt:*

1. *Das Kotangentialbündel $T^*(X)$ ist eine glatte, algebraische Varietät mit*

$$\dim_{(x,\omega)} T^*(X) = 2 \dim_x X$$

2. *Die Faserung $\pi : T^*(X) \to X$ ist lokal-trivial.*