

Garbenkohomologie

Vorlesung im WS 2015/16

Thomas Reichelt

1 Homologische Algebra

1.1 Kategorien

Definition 1.1. Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus:

1. einer Klasse von Objekten $Ob(\mathcal{C})$
2. einer Menge von Morphismen $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für alle Paare (X, Y) aus $Ob(\mathcal{C})$
3. einer Kompositionsabbildung

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) \mapsto g \circ f$$

für jedes Tripel (X, Y, Z) aus $Ob(\mathcal{C})$.

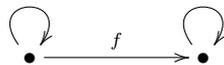
s.d.

1. die Komposition assoziativ ist
2. für jedes $X \in Ob(\mathcal{C})$ ein $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ existiert, s.d. $f \circ id_X = f$ und $id_X \circ g = g$ für alle $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus

- f heißt **Isomorphismus** falls ein $g : Y \rightarrow X$ existiert, s.d. $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$
- f ist ein **Monomorphismus** wenn für jedes Paar (g, g') aus $Hom_{\mathcal{C}}(W, X)$ gilt: $f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$.
- f ist ein **Epimorphismus** wenn für jedes Paar (h, h') aus $Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ gilt: $h \circ f = h' \circ f \Rightarrow h = h'$.

Bemerkung 1.2 (Mono + Epi $\not\Rightarrow$ Iso). Betrachte folgende Kategorie



Der Morphismus f ist ein Monomorphismus und Epimorphismus aber kein Isomorphismus.

Definition 1.3. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Kategorien. Ein kovarianter bzw. kontravarianter **Funktor** von \mathcal{C} nach \mathcal{C}' besteht aus:

1. einer Abbildung $F : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{C}')$
2. einer Abbildung $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ für jedes Paar (X, Y) aus $Ob(\mathcal{C})$, s.d. gilt:
 - (a) $F(id_X) = id_{F(X)}$
 - (b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ bzw. $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Definition 1.4. Seien F_1, F_2 zwei Funktoren von \mathcal{C} nach \mathcal{C}' . Eine **natürliche Transformation** θ von F_1 nach F_2 besteht aus:

$$\theta(X) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F_1(X), F_2(X)) \quad \text{für jedes } X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

s.d. für jedes $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\theta(X)} & F_2(X) \\ \downarrow F_1(f) & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\theta(Y)} & F_2(Y) \end{array}$$

Wir bezeichnen mit \mathfrak{Set} die Kategorie der Mengen und mit \mathcal{C}^\wedge bzw. \mathcal{C}^\vee die Kategorie der ko- bzw. kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Set}$.

Definition 1.5. Ein kontra- bzw. kovarianter Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{Set}$ heißt **darstellbar** falls ein $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existiert, s.d. F isomorph zu dem Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ bzw. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ ist.

Definition 1.6. Sei $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ein Funktor.

1. F heißt **voll treu** falls die Abbildung $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ für jedes Paar (X, Y) aus $\text{Ob}(\mathcal{C})$ bijektiv ist.
2. F heißt **Kategorienäquivalenz** falls F voll treu ist und für jedes $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ ein $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und ein Isomorphismus $X' \rightarrow F(X)$ existiert.

Wir bezeichnen mit $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$ den Funktor $X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$.

Lemma 1.7 (Yoneda-Lemma). Für jedes $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und $F \in \text{Ob}(\mathcal{C}^\wedge)$ gilt:

$$\phi : \text{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(h(X), F) \simeq F(X)$$

Insbesondere ist h voll treu.

Beweis. Sei $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(h(X), F)$ gegeben. Da θ eine natürliche Transformation ist, liefert $\theta(X)$ eine Abbildung $\theta(X) : h(X)(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \rightarrow F(X)$. Wir definieren $\phi(\theta) = \theta(X)(id_X)$. Sei andererseits $s \in F(X)$ gegeben. Wir definieren $\psi(s) = \phi^{-1}(s)$ als

$$\begin{array}{ccccc} h(X)(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{Set}}(F(X), F(Y)) & \longrightarrow & F(Y) \\ f & \mapsto & F(f) & \mapsto & F(f)(s) \end{array}$$

wobei die letzte Abbildung durch einsetzen von s gegeben ist. Wir müssen zeigen, dass ϕ und ψ invers zueinander sind:

$$\phi \circ \psi(s) = \phi(f \mapsto F(f)(s)) = F(id_X)(s) = s$$

und

$$(\psi \circ \phi(\theta))(Y)(f) = \psi(\theta(X)(id_X))(Y)(f) = F(f)(\theta(X)(id_X)) = \theta(Y) \circ h(f)(id_X) = \theta(Y)(f)$$

wobei das dritte Gleichheitszeichen aus diesem Diagramm folgt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(X, X) & \xrightarrow{\theta(X)} & F(X) \\ h(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Hom}(Y, X) & \xrightarrow{\theta(Y)} & F(Y) \end{array}$$

□

1.2 Abelsche Kategorien

Betrachte eine Kategorie \mathcal{C} mit einem Nullobjekt 0 , d.h. für jedes Objekt A gibt es genau einen Morphismus $A \rightarrow 0$ und genau einen Morphismus $0 \rightarrow A$.

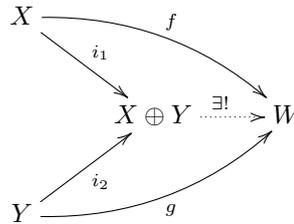
Ein Morphismus $A \rightarrow B$ ist ein Nullmorphismus, falls er über 0 faktorisiert:

$$A \rightarrow 0 \rightarrow B$$

Definition 1.8. Eine Kategorie \mathcal{C} ist *additiv* falls

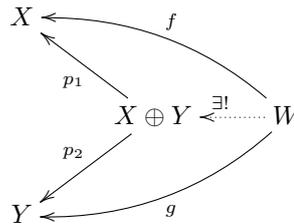
1. Für alle Paare von Objekten (X, Y) die Menge $\text{Hom}(X, Y)$ eine abelsche Gruppe ist, s.d. die Komposition von Morphismen bilinear ist.
2. Ein Nullobjekt $0_{\mathcal{C}}$ existiert.
3. Für alle Paare (X, Y) , die direkte Summe $X \oplus Y$ in \mathcal{C} existiert.

Bemerkung 1.9. 1. Die direkte Summe $X \oplus Y$ hat folgende universelle Eigenschaft:



d.h. für jedes Paar von Morphismen $X \xrightarrow{f} W$ und $Y \xrightarrow{g} W$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $X \oplus Y \xrightarrow{h} W$, s.d. $f = h \circ i_1$ und $g = h \circ i_2$.

2. Aus den Axiomen einer additiven Kategorie folgt das auch das Produkt $X \times Y$ von zwei Objekten existiert und isomorph zur direkten Summe ist. Wir haben folgendes Diagramm:



Es gilt $p_1 \circ i_1 = id_X$, $p_2 \circ i_2 = id_Y$, $p_2 \circ i_1 = 0$, $p_1 \circ i_2 = 0$ und $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_{X \oplus Y}$. Diese Relationen charakterisieren $X \oplus Y$ eindeutig.

Definition 1.10. Ein Funktor F zwischen zwei additiven Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} heißt **additiv** falls für jedes Paar (X, Y) von Objekten in \mathcal{C} die Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lemma 1.11. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein additiver Funktor und $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Dann gilt

$$F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$$

Beweis. Folgt aus $id_{F(X \oplus Y)} = F(i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) = F(i_1) \circ F(p_1) + F(i_2) \circ F(p_2)$. □

Ein **Kern** $\ker f$ eines Morphismus $f : A \rightarrow B$ ist ein Paar (K, i) wobei $i : K \rightarrow A$ ein Monomorphismus mit $f \circ i = 0$ ist und folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \swarrow & \uparrow g & \searrow & \\
 & & X & \xrightarrow{0} &
 \end{array}
 \tag{1.2.1}$$

d.h. jeder Morphismus $g : X \rightarrow A$ mit $f \circ g = 0$ faktorisiert über $i : K \rightarrow A$.

Ein **Kokern** $\text{Cok } f$ für f ist ein Paar (C, p) wobei $p : B \rightarrow C$ ein Epimorphismus ist mit $p \circ f = 0$ ist und folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & C \\
 & \searrow & \downarrow g & \swarrow & \\
 & & Y & \xrightarrow{0} &
 \end{array}$$

d.h. jeder Morphismus $h : B \rightarrow Y$, mit $h \circ f = 0$ faktorisiert über $p : B \rightarrow C$.

Wir nehmen jetzt an dass jeder Morphismus einen Kern und Kokern besitzt.

Das **Bild** $\text{Im } f$ ist der Kern des Kokerns $\text{Cok } f$.

Das **Kobild** $\text{Coim } f$ ist der Kokern des Kerns $\ker f$.

Jeder Morphismus f hat eine kanonische Faktorisierung:

$$A \longrightarrow \text{Coim } f \xrightarrow{f'} \text{Im } f \longrightarrow B
 \tag{1.2.2}$$

Definition 1.12. Eine Sequenz von Morphismen

$$\dots A^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} A^n \xrightarrow{f^n} A^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \dots$$

heißt **exakt** falls $\text{Im } f^{n-1} \simeq \ker f^n$.

Definition 1.13. Eine Kategorie \mathcal{C} ist abelsch, falls Sie additiv ist und falls

1. Jeder Morphismus einen Kern und Kokern hat
2. die kanonische Faktorisierung $\text{Coim } f \xrightarrow{f'} \text{Im } f$ ein Isomorphismus ist.

Lemma 1.14. Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie und $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Sei f ein Monomorphismus und Epimorphismus, dann ist f ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g : W \rightarrow X$ mit $f \circ g = 0$. Es gilt $f \circ g = 0_Y = f \circ 0$, d.h. g faktorisiert eindeutig über $0_{\mathcal{C}}$, also gilt $\ker f \simeq 0_{\mathcal{C}}$. Wegen der universellen Eigenschaft der Kokerns $p : X \rightarrow \text{Coim } f$ existiert $q : \text{Coim } f \rightarrow X$ mit $q \circ p = \text{id}_X$. Dann gilt $p \circ q \circ p = p$. Da p ein Epimorphismus ist, folgt $p \circ q = \text{Id}_{\text{Coim } f}$, also $X \simeq \text{Coim } f$. Über Dualität erhalten wir $Y \simeq \text{Im } f$. Also $X \simeq \text{Coim } f \simeq \text{Im } f \simeq Y$. \square

Definition 1.15. Seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' zwei abelsche Kategorien. Ein additiver, kovarianter Funktor F von \mathcal{C} nach \mathcal{C}' heißt links (bzw. rechts) exakt falls für jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \quad \text{bzw.} \quad X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

in \mathcal{C} , die Sequenz

$$0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \quad \text{bzw.} \quad F(X') \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow 0$$

exakt ist. Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ sowohl rechts als auch links exakt, dann heißt F exakt. Ein kontravarianter Funktor F heißt links exakt (bzw. rechts exakt bzw. exakt) falls er diese Eigenschaft als Funktor von \mathcal{C}° nach \mathcal{C}' hat.

Die Funktoren $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ bzw. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ sind beide links exakt.

Definition 1.16. Sei $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. X heißt injektiv bzw. projektiv falls der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ bzw. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ exakt ist.

Ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ist genau dann injektiv, falls alle Diagramme mit exakter Zeile:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & X & & \end{array}$$

sich kommutativ vervollständigen lassen.

Lemma 1.17. Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie und sei $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz und X injektiv. Es gilt:

1. Die Sequenz ist split-exakt, d.h. $Y \simeq X \oplus Z$.
2. Y ist injektiv genau dann wenn Z injektiv ist.

Beweis. 1. Da X injektiv ist, ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \xrightarrow{\circ g} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{\circ f} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \longrightarrow 0$$

d.h. $\exists k : Y \rightarrow X$ mit $k \circ f = \text{id}_X$. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \xrightarrow{\circ g} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y) \xrightarrow{\circ f} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Es gilt $(\text{id}_Y - f \circ k) \circ f = f - f = 0$, d.h. $\exists h : Z \rightarrow Y$ mit $h \circ g = \text{id}_Y - f \circ k$, also $\text{id}_Y = f \circ k + h \circ g$. Weiterhin gilt $g \circ h \circ g = g - g \circ f \circ k = g$. Da g ein Monomorphismus ist folgt $g \circ h = \text{id}_Z$. Also sind die beiden Abbildungen $s \oplus g$ und $f \oplus h$ invers zueinander und liefern den Isomorphismus $Y \simeq X \oplus Z$.

2. Sei Z injektiv. Da per Annahme auch X injektiv ist, ist es leicht zu sehen, daß auch $X \oplus Z$ injektiv ist und daher ist auch Y injektiv. Nehme an Y ist injektiv. Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{a} & B & & \\ & & \downarrow c & \searrow b & & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & & & & \swarrow h & & \end{array}$$

wobei $c := h \circ b$. Wir müssen eine Abbildung $e : B \rightarrow Z$ konstruieren mit $e \circ a = b$. Da Y injektiv ist, existiert eine Abbildung $d : B \rightarrow Y$ mit $d \circ a = c$. Wir definieren jetzt $e := g \circ d$ und berechnen $e \circ a = g \circ d \circ a = g \circ c = g \circ h \circ b = b$.

□

1.3 Kategorien von Komplexen

Definition 1.18. Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie.

1. Ein **Komplex** in \mathcal{C} ist eine Sequenz $X = (X^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von Objekten und Morphismen

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} X^{n+2} \longrightarrow \dots$$

mit $d^{n+1} \circ d^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

2. Ein **Morphismus von Komplexen** $f : X \rightarrow Y$ ist eine Sequenz $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von Morphismen $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ mit

$$f^{n+1} \circ d^n = d^n \circ f^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

Wir bezeichnen mit $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ die Kategorie der Komplexe in \mathcal{C} .

3. Ein Komplex X heißt *beschränkt* bzw. *nach unten beschränkt* bzw. *nach oben beschränkt* falls $X^n = 0$ für $|n| \gg 0$ bzw. $n \ll 0$ bzw. $n \gg 0$. Die volle Unterkategorie von $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ von beschränkten bzw. nach unten beschränkten bzw. nach oben beschränkten Komplexen bezeichnen wir mit $\mathbf{C}^b(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{C}^+(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{C}^-(\mathcal{C})$.

Wir identifizieren \mathcal{C} mit der vollen Unterkategorie von $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ die aus Komplexen X mit $X^n = 0$ für $n \neq 0$ besteht.

Definition 1.19. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und X aus $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Der Komplex $X[k]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} X^n[k] &:= X^{n+k} \\ d_{X[k]}^n &= (-1)^k d_X^{n+k} \end{aligned}$$

Für einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ definieren wir $f[k] : X[k] \rightarrow Y[k]$ durch

$$f[k]^n = f^{n+k}$$

Der Funktor $[k]$ heißt **Shift-Funktor** vom Grad k .

Für den Rest von Abschnitt 1.3 betrachten wir eine abelsche Kategorie \mathcal{C} .

Definition 1.20. Für einen Komplex X definieren wir für $n \in \mathbb{Z}$ die n -te Kohomologie als

$$H^n(X) = \ker d^n / \text{Im } d^{n-1}$$

Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Komplexen induziert einen Morphismus der Kohomologie

$$H^n(f) : H^n(X) \longrightarrow H^n(Y)$$

Proposition 1.21.

Lange exakte Kohomologiesequenz:

Betrachte folgende Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

s.d. für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow X^n \longrightarrow Y^n \longrightarrow Z^n \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann gibt es eine Abbildung

$$c^n : H^n(Z) \longrightarrow H^{n+1}(X)$$

s.d. wir folgende lange exakte Kohomologiesequenz bekommen

$$\dots \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(Z) \xrightarrow{c^n} H^{n+1}(X) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} H^{n+1}(Y) \longrightarrow \dots$$

Funktorialität:

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Komplexen deren Reihen exakt sind, dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^n(X) & \longrightarrow & H^n(Y) & \longrightarrow & H^n(Z) & \xrightarrow{c^n} & H^{n+1}(X) & \longrightarrow & H^{n+1}(Y) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H^n(U) & \longrightarrow & H^n(V) & \longrightarrow & H^n(W) & \xrightarrow{c^n} & H^{n+1}(U) & \longrightarrow & H^{n+1}(V) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Definition 1.22. Sei X aus $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Die **abgeschnittenen Komplexe** $\tau^{\leq n}(X)$, $\tau^{< n}(X)$ und $\tau^{\geq n}(X)$, $\tau^{> n}(X)$ sind durch

$$\begin{aligned} \tau^{\leq n}(X) &: \dots \rightarrow X^{n-2} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow \ker d_X^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ \tau^{< n}(X) &: \dots \rightarrow X^{n-2} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow \operatorname{Im} d_X^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ \tau^{\geq n}(X) &: \dots \rightarrow 0 \rightarrow \operatorname{Cok} d_X^{n-1} \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \dots \\ \tau^{> n}(X) &: \dots \rightarrow 0 \rightarrow \operatorname{Coim} d_X^{n-1} \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

definiert.

Es gilt

$$\begin{aligned} H^k(\tau^{\leq n}(X)) &= \begin{cases} H^k(X) & \text{für } k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & H^k(\tau^{< n}(X)) &= \begin{cases} H^k(X) & \text{für } k < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ H^k(\tau^{\geq n}(X)) &= \begin{cases} H^k(X) & \text{für } k \geq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & H^k(\tau^{> n}(X)) &= \begin{cases} H^k(X) & \text{für } k > n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Für X aus $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ haben wir exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \tau^{\leq n}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{> n}(X) \longrightarrow 0 \quad (1.3.1)$$

$$0 \longrightarrow \tau^{< n}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq n}(X) \longrightarrow 0 \quad (1.3.2)$$

Definition 1.23. Sei $X, Y \in \mathbf{C}(\mathcal{C})$. Wir erhalten einen Bi-Funktor: $\operatorname{Hom}^\bullet(\cdot, \cdot) : \mathbf{C}(\mathcal{C}) \times \mathbf{C}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{C}(Ab)$ durch

$$\operatorname{Hom}^k(X, Y) = \{(f^m)_{m \in \mathbb{Z}} \mid f^m : X^m \rightarrow Y^{m+k} \text{ ist ein Morphismus}\}$$

mit Differential $d^k : \operatorname{Hom}^k(X, Y) \rightarrow \operatorname{Hom}^{k+1}(X, Y)$ was folgendermaßen gegeben ist:

$$d^k(f^m) = d_Y^{k+m} \circ f^m + (-1)^{k+1} f^{m+1} \circ d_X^m$$

Es gilt $\operatorname{Hom}(X, Y) = \ker d^0$.

1.4 Homotopie-Kategorien

Definition 1.24. Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt **null-homotop** wenn es einen Morphismus $s : X \rightarrow Y[-1]$ gibt, s.d.

$$f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$$

Wir sagen f ist homotop zu g falls $f - g$ null-homotop ist.

Lemma 1.25. 1. Die Menge $Ht(X, Y)$ der null-homotopen Abbildungen ist eine Untergruppe von $Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$.

2. Sei $f \in Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(Y, Z)$ und f oder g null-homotop, dann ist $g \circ f$ null-homotop.

Beweis. 1. Seien $f, g \in Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$ null-homotop bzgl. Morphismen s, t , dann gilt

$$\begin{aligned} f^n - g^n &= (s^{n+1} \circ d_X^n + d_X^{n-1} \circ s^n) - (t^{n+1} \circ d_X^n + d_X^{n-1} \circ t^n) \\ &= s^{n+1} \circ d_X^n - t^{n+1} \circ d_X^n + d_X^{n-1} \circ s^n - d_X^{n-1} \circ t^n \\ &= (s^{n+1} - t^{n+1}) \circ d_X^n + d_X^{n-1} \circ (s^n - t^n) \end{aligned}$$

2. Sei $f \in Ht(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(Y, Z)$, s.d

$$f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g^n \circ f^n &= g^n \circ s^{n+1} \circ d_X^n + g^n \circ d_Y^{n-1} \circ s^n \\ &= (g^n \circ s^{n+1}) \circ d_X^n + d_Z^{n-1} \circ (g^{n-1} \circ s^n) \end{aligned}$$

Die Abbildung $t \in Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Z)$ mit $t^n := g^{n-1} \circ s^n$ liefert die gewünschte Abbildung. Der andere Fall wird ähnlich gezeigt. □

Das Lemma erlaubt uns die Homotopie-Kategorie zu definieren.

Definition 1.26. Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie. Die Kategorie $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ ist durch

$$\begin{cases} Ob(\mathbf{K}(\mathcal{C})) := Ob(\mathbf{C}(\mathcal{C})) \\ [X, Y] := Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{C})}(X, Y) := Hom_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Y) / Ht(X, Y) \end{cases}$$

definiert. Die vollen Unterkategorien $\mathbf{K}^b(\mathcal{C})$, $\mathbf{K}^+(\mathcal{C})$ und $\mathbf{K}^-(\mathcal{C})$ werden ähnlich wie oben definiert.

Es ist leicht zu sehen, dass $Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{C})}(X; Y) = H^0(Hom^\bullet(X, Y))$ gilt.

Ist \mathcal{C} abelsch, dann ist ihre Homotopiekategorie $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ im allgemeinen nicht mehr abelsch.

Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie und $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ ein Morphismus in \mathcal{C} .

Definition 1.27. Der **Abbildungskegel** $M(f)$ von f wird folgendermaßen definiert:

$$\begin{cases} M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \\ d_{M(f)}^n = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Definiere die Morphismen $\alpha(f) : Y \rightarrow M(f)$ und $\beta(f) : M(f) \rightarrow X[1]$ durch:

$$\alpha(f)^n = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{pmatrix} \quad \beta(f)^n = (id_{X^{n+1}} \quad 0)$$

Lemma 1.28. Für jedes $f : X \rightarrow Y$ in $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ existiert $\phi : X[1] \rightarrow M(\alpha(f))$ s.d.

1. ϕ ein Isomorphismus in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ ist
2. folgendes Diagramm kommutiert in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\beta(f)} & X[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y[1] \\ id_Y \downarrow & & \downarrow id_{M(f)} & & \downarrow \phi & & \downarrow id_{Y[1]} \\ Y & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\alpha(\alpha(f))} & M(\alpha(f)) & \xrightarrow{\beta(\alpha(f))} & Y[1] \end{array}$$

Beweis. Es gilt:

$$M(\alpha(f)) = Y^{n+1} \oplus M(f)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$$

und

$$d_{M(\alpha(f))}^n = \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 \\ \alpha(f)^{n+1} & d_{M(f)}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

Definiere die Morphismen $\phi : X[1] \rightarrow M(\alpha(f))$ und $\psi : M(\alpha(f)) \rightarrow X[1]$ durch:

$$\phi^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi^n = (0, id_{X^{n+1}}, 0)$$

Wir müssen zeigen, dass ϕ und ψ Komplexabbildungen sind. Dies folgt aus

$$d_{M(\alpha(f))}^n \circ \phi^n = \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n(-f^{n+1}) \\ d_{X[1]}^n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f^{n+2} \\ id_{X^{n+2}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (d_{X[1]}^n) = \phi^{n+1} \circ d_{X[1]}^n$$

und

$$\psi^{n+1} \circ d_{M(\alpha(f))}^n = (0, id_{X^{n+1}}, 0) \cdot \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = (0, d_{X[1]}^n, 0) = d_{X[1]}^n \circ \psi^n$$

Es gilt:

$$\psi^n \circ \phi^n = (0, id_{X^{n+1}}, 0) \cdot \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = id_{X^{n+1}}$$

Wir zeigen, dass $\phi \circ \psi$ homotopie-äquivalent zur Identität ist. Definiere $s^n : M(\alpha(f))^n \rightarrow M(\alpha(f))^{n-1}$ durch:

$$s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& s^{n+1} \circ d_{M(\alpha(f))}^n + d_{M(\alpha(f))}^{n-1} \circ s^n \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{Y^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{X[1]}^{n-1} & 0 \\ id_{Y^n} & f^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & d_Y^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{Y[1]}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_{Y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_{Y^n} \end{pmatrix} \\
&= id_{M(\alpha(f))^n} - \begin{pmatrix} 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = id_{M(\alpha(f))^n} - \phi^n \circ \psi^n
\end{aligned}$$

Das zeigt die erste Aussage.

Das erste Rechteck ist trivialerweise kommutativ. Für das zweite Rechteck berechnen wir:

$$\psi^n \circ \alpha(\alpha(f)) = (0, id_{X^{n+1}}, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & id_{Y^n} \end{pmatrix} = \beta(f)$$

Daraus folgt

$$\phi^n \circ \beta(f)^n = \phi^n \circ \psi^n \circ \alpha(\alpha(f)) = \alpha(\alpha(f))$$

Für das dritte Rechteck gilt:

$$\beta(\alpha(f))^n \circ \phi^n = (id_{Y^{n+1}} \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = (-f^{n+1}) = -f^n[1]$$

□

Definition 1.29. 1. Ein **Dreieck** in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ ist eine Sequenz

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

Ein Morphismus von Dreiecken ist ein kommutatives Diagramm in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\
\downarrow \phi & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi[1] \\
X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1]
\end{array}$$

2. Ein Dreieck $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ heißt **ausgezeichnetes Dreieck** falls es für ein f in $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ zu einem Dreieck $X' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X'[1]$ isomorph ist.

Proposition 1.30. Die ausgezeichneten Dreiecke in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ erfüllen folgende Eigenschaften:

(TR 0) Ein Dreieck, welches isomorph zu einem ausgezeichneten Dreieck ist, ist ausgezeichnet.

(TR 1) Für X in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ ist $X \xrightarrow{id_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck.

(TR 2) Jeder Morphismus $f : X \rightarrow Y$ in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ ist Teil eines ausgezeichneten Dreiecks

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

(TR 3) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ ist genau dann ein ausgezeichnetes Dreieck wenn $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck ist.

(TR 4) Jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow \dots w & & \downarrow u[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Z'[1] \end{array}$$

in dem die Zeilen ausgezeichnete Dreiecke sind und das Rechteck kommutiert kann zu einem Morphismus von Dreiecken erweitert werden.

(Tr 5) (Oktaeder Axiom): Seien folgende ausgezeichnete Dreiecke gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y[1] \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

dann existiert ein ausgezeichnetes Dreieck

$$Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow Z'[1]$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow id_X & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow id_{X[1]} \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow id_Z & & \downarrow & & \downarrow f[1] \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id_{X'} & & \downarrow \\ Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Z'[1] \end{array}$$

Beweis. Die Eigenschaften (TR0) und (TR2) sind klar und (TR3) folgt aus Lemma 1.28. Der Abbildungskegel von $f : 0 \rightarrow X$ ist X , d.h. das Dreieck $0 \rightarrow X \xrightarrow{id_X} X \rightarrow 0[1]$ ist ausgezeichnet. Durch drehen des Dreiecks, d.h. durch anwenden von (TR3) folgt (TR1).

Für den Beweis von (TR4) können wir annehmen, dass die Dreiecke $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ und $X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[1]$ von der Gestalt $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$ bzw. $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\alpha(f')} M(f') \xrightarrow{\beta(f')} X'[1]$ sind. Wir konstruieren einen Morphismus $w : M(f) \rightarrow M(f')$ mit folgenden Eigenschaften:

$$w \circ \alpha(f) = \alpha(f') \circ v \quad \text{und} \quad u[1] \circ \beta(f) = \beta(f') \circ w$$

Per Annahme existiert ein $s^n : X^n \rightarrow Y'^{n-1}$ mit $v^n \circ f^n - f'^n \circ u^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_{Y'}^{n-1} \circ s^n$. Definiere $w^n : M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \rightarrow M(f')^n = X'^{n+1} \oplus Y'^n$ durch

$$w^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix}$$

Wir zeigen, dass w^n ein Morphismus von Komplexen ist:

$$\begin{aligned}
d_{M(f')}^n \circ w^n &= \begin{pmatrix} d_{X'[1]}^n & 0 \\ (f')^{n+1} & d_{Y'}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_{X'[1]}^n \circ u^{n+1} & 0 \\ (f')^{n+1} \circ u^{n+1} + d_{Y'}^n \circ s^{n+1} & d_{Y'}^n \circ v^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u^{n+2} \circ d_{X'[1]}^n & 0 \\ v^{n+1} \circ f^{n+1} - s^{n+2} \circ d_X^{n+1} & v^{n+1} \circ d_Y^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u^{n+2} & 0 \\ s^{n+2} & v^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \\
&= w^{n+1} \circ d_{M(f)}^n
\end{aligned}$$

Für w^n gilt

$$w^n \circ \alpha(f)^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y'^n} \end{pmatrix} (v^n) = \alpha(f') \circ v^n$$

und

$$u^{n+1} \circ \beta(f)^n = (u^{n+1}) \cdot (id_{X^{n+1}} \ 0) = (id_{X'^{n+1}} \ 0) \cdot \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix} = \beta(f') \circ w^n$$

Für den Beweis von (TR5) können wir annehmen, dass $Z' = M(f)$, $X' = M(g)$ und $Y' = M(g \circ f)$. Wir definieren Morphismen $u' : Z' \rightarrow Y'$ und $v : Y' \rightarrow X'$ durch:

$$\begin{aligned}
u^n : X^{n+1} \oplus Y^n &\longrightarrow X^{n+1} \oplus Z^n & u^n &= \begin{pmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & g^n \end{pmatrix} \\
v^n : X^{n+1} \oplus Z^n &\longrightarrow Y^{n+1} \oplus Z^n & v^n &= \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Kompatibilität mit dem Differential folgt aus

$$u^{n+1} \circ d_{Z'}^n = \begin{pmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 \\ 0 & g^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{X'[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{X'[1]}^n & 0 \\ 0 & g^{n+1} \circ d_Y^n \end{pmatrix} = d_{Y'}^n \circ u^n$$

und

$$\begin{aligned}
v^{n+1} \circ d_{Y'}^n &= \begin{pmatrix} f^{n+2} & 0 \\ 0 & id_{Z^{n+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{X'[1]}^n & 0 \\ g^{n+1} \circ f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n+2} \circ d_{X'[1]}^n & 0 \\ g^{n+1} \circ f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_{Y'[1]}^n & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} = d_{X'}^n \circ v^n
\end{aligned}$$

Wir definieren $w : X' \rightarrow Z'[1]$ als den Morphismus $X' \rightarrow Y[1] \rightarrow Z'[1]$. Einfache Rechnungen zeigen jetzt, dass das Diagramm in (TR5) kommutativ ist. Es bleibt zu zeigen, dass $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} Z'[1]$ ausgezeichnet ist. Dafür werden wir einen Isomorphismus $\phi : M(u) \rightarrow X'$ mit Inversem $\psi : X' \rightarrow M(u)$ konstruieren, so dass $\phi \circ \alpha(u) = v$ und $\beta(u) \circ \psi = w$. Es gilt:

$$M(u)^n = M(f)^{n+1} \oplus M(g \circ f)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

und $Z'^n = M(g)^n = Y^{n+1} \oplus Z^n$. Definiere ϕ und ψ durch:

$$\phi^n = \begin{pmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} \quad \psi^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix}$$

Wir müssen zeigen, dass ϕ und ψ Morphismen von Komplexen sind. Das Differential von $M(u)$ bzw. $X' = M(g)$ ist durch

$$d_{M(u)}^n = \begin{pmatrix} d_{M(f)[1]}^n & 0 \\ u^{n+1} & d_{M(g \circ f)}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{X[1]}^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$d_{M(g)}^n = \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} \circ d_{M(u)}^n &= \begin{pmatrix} 0 & id_{Y^{n+2}} & f^{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^{n+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_{X[1]}^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -d_Y^{n+1} & f^{n+2} \circ d_{X[1]}^n & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} \\ &= d_{M(g)}^n \circ \phi^n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi^{n+1} \circ d_{M(g)}^n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_{Z^{n+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{Y[1]}^n & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_{Y[1]}^n & 0 \\ 0 & 0 \\ g^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -d_{X[1]}^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_{X^{n+1}} \end{pmatrix} \\ &= d_{M(u)}^n \circ \psi^n \end{aligned}$$

Es gilt ebenso:

$$\phi^n \circ \alpha(u)^n = \begin{pmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} = v^n$$

und

$$\beta(u)^n \circ \psi^n = \begin{pmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & id_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} = w$$

wobei w die Komposition $X' \rightarrow Y[1] \rightarrow Z'[1]$ ist, d.h.

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y^{n+1}} \end{pmatrix} \cdot (id_{Y^{n+1}} \quad 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$\phi^n \circ \psi^n = \begin{pmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} = id_{X'}$$

Als letzten Schritt zeigen wir, dass $\psi \circ \phi \sim id_{M(u)}$. Dafür definieren wir

$$s^n : M(u)^n \rightarrow M(u)^{n-1}, \quad s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & s^{n+1} \circ d_{M(u)}^n + d_{M(u)}^{n-1} \circ s^n \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_{x[1]}^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+2} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+2}} & 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ 0 & g^{n+1} & g^{n+1} \circ f^{n+1} & d_Z^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_{X[1]}^n & 0 & 0 & 0 \\ -f^{n+1} & -d_Y^{n+1} & 0 & 0 \\ id_{X^{n+1}} & 0 & d_{X[1]}^{n-1} & 0 \\ 0 & g^n & g^n \circ f^n & d_Z^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 & d_{X[1]}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_{x[1]}^n & 0 \\ 0 & 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{x^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} id_{X^{n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & id_{Y^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix} = (id_{M(u)} - \psi \circ \phi)^n \end{aligned}$$

□

1.5 Triangulierte Kategorien

Der Begriff einer triangulierten Kategorie abstrahiert die Eigenschaften (TR0) – (TR5) von $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie mit einem Automorphismus $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Wir schreiben $[1]$ anstatt T und $[k]$ anstatt T^k (d.h. $X[1]$ für $T(X)$ usw.).

Ein Dreieck in \mathcal{C} ist eine Sequenz von Morphismen

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$$

Definition 1.31. 1. Eine **triangulierte Kategorie** \mathcal{C} ist eine additive Kategorie mit einem Automorphismus $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ und einer Familie von ausgezeichneten Dreiecken, die die Axiome (TR0) bis (TR5) erfüllen.

2. Seien (\mathcal{C}, T) und (\mathcal{C}', T') zwei triangulierte Kategorien. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ist ein **Funktor von triangulierten Kategorien** falls $F \circ T \simeq T' \circ F$ gilt und falls F ausgezeichnete Dreiecke auf ausgezeichnete Dreiecke abbildet.

Definition 1.32. Sei \mathcal{C} eine triangulierte und \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ heißt **kohomologischer Funktor**, falls für jedes ausgezeichnete Dreieck $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$ die Sequenz $F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z)$ exakt ist.

Für einen kohomologischen Funktor F definieren wir $F^k := F \circ T^k$. Man erhält dann für jedes ausgezeichnete Dreieck eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \rightarrow F^{k-1}(Z) \rightarrow F^k(X) \rightarrow F^k(Y) \rightarrow F^k(Z) \rightarrow F^{k+1}(X) \rightarrow \dots \quad (1.5.1)$$

- Proposition 1.33.** 1. Ist $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow T(X)$ ein ausgezeichnetes Dreieck, dann gilt $g \circ f = 0$.
2. Für alles $W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ sind $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \cdot)$ und $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, W)$ kohomologische Funktoren.

Beweis. 1. Wegen (TR1) ist $X \xrightarrow{id_X} X \rightarrow 0 \rightarrow T(X)$ ein ausgezeichnetes Dreieck. Wegen (TR4) gibt es einen Morphismus $\phi : 0 \rightarrow Z$ der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{id_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(X) \\ & & \downarrow f & & \downarrow \phi & & \\ id_X \downarrow & & & & & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

Daraus folgt aber $g \circ f = \phi \circ 0 = 0$.

2. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} z \rightarrow T(X)$ ein ausgezeichnetes Dreieck. Um zu zeigen, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \cdot)$ ein kohomologischer Funktor ist, reicht es zu zeigen, dass wir für jedes $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ mit $g \circ \phi = 0$ ein $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ mit $\phi = f \circ \psi$ finden können. Betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{id_X} & W & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(W) \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \\ \psi \downarrow & & & & & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

Aus (TR1), (TR3) und (TR4) folgt, dass ein ψ existiert, s.d. das Diagramm kommutiert. Der Beweis für $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, W)$ ist ähnlich. □

Korollar 1.34. Sei

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ \phi \downarrow & & \psi \downarrow & & \theta \downarrow & & \downarrow T(\phi) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

ein Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken. Wenn ϕ und ψ Isomorphismen sind, dann ist auch θ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir wenden für ein beliebiges $W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ den Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \cdot)$ auf das obige Diagramm an. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm in \mathbf{Ab} deren Zeilen exakt sind. Weil sowohl $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \phi)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \psi)$ als auch $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, T(\phi))$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, T(\psi))$ Isomorphismen sind folgt aus dem 5-er Lemma, dass $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \theta)$ ein Isomorphismus ist. Aus Yoneda's Lemma folgt dann, dass θ selbst ein Isomorphismus ist. □

Proposition 1.35. Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie. Dann ist der Funktor $H^0(\cdot) : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ ein kohomologischer Funktor.

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Es reicht zu zeigen, dass die Sequenz

$$H^0(Y) \rightarrow H^0(M(f)) \rightarrow H^0(X[1])$$

exakt ist. Da aber $0 \rightarrow Y \rightarrow M(f) \rightarrow X[1] \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ ist, folgt die Behauptung aus Proposition 1.21. □

Definition 1.36. Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie und $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Dann ist f ein **Quasi-Isomorphismus** (qis) falls $H^n(f)$ für alle n ein Isomorphismus ist.

Das bedeutet f ist ein qis genau dann wenn $H^n(M(f)) = 0$ für alle n .

1.6 Lokalisierte Kategorien

Sei \mathcal{C} eine Kategorie und S eine Familie von Morphismen von \mathcal{C} .

Definition 1.37. S ist ein **multiplikatives System** wenn folgende Eigenschaften gelten:

(S 1) $id_X \in S$, für jedes $X \in Ob(S)$.

(S 2) Für jedes Paar (f, g) in S gilt $g \circ f \in S$, falls $g \circ f$ existiert

(S 3) Jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow g & \\ W & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ & \uparrow g & \\ W & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

mit $g \in S$ kann zu einem Diagramm folgender Art ergänzt werden:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ W & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & Z \\ \uparrow h & & \uparrow g \\ W & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

wobei $h \in S$.

(S 4) Wenn $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, dann sind folgende beiden Eigenschaften äquivalent

(a) $\exists t : Y \rightarrow Y', t \in S$ s.d. $t \circ f = t \circ g$

(b) $\exists s : X' \rightarrow X, s \in S$, s.d. $f \circ s = g \circ s$

Definition 1.38. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und S ein multiplikatives System. Die **Lokalisierung** \mathcal{C}_S von \mathcal{C} nach S ist definiert als:

$$Ob(\mathcal{C}_S) = Ob(\mathcal{C})$$

für jedes Paar (X, Y) in $Ob(\mathcal{C})$

$$Hom_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \{(X, s, f) \mid X' \in Ob(\mathcal{C}), s : X' \rightarrow X, f : X' \rightarrow Y, s \in S\} / \mathcal{R}$$

wobei \mathcal{R} die folgende Äquivalenzrelation ist:

$$(X', s, f) \mathcal{R} (X'', t, g)$$

gilt genau dann wenn ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & s \swarrow & \uparrow & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{k} & Z' & \xrightarrow{} & Y \\ & \nwarrow t & \downarrow & \nearrow g & \\ & & X'' & & \end{array}$$

mit $k \in S$ existiert. Die Komposition von $(X, s, f) \in Hom_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ und $(Y', t, g) \in Hom_{\mathcal{C}_S}(Y, Z)$ ist wie folgt definiert. Benutze (S3) um folgendes Diagramm zu konstruieren:

$$\begin{array}{ccccc} & & X'' & & \\ & t' \swarrow & & \searrow h & \\ & X' & & Y' & \\ s \swarrow & & & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y & & Z \end{array} \quad (1.6.1)$$

mit $t' \in S$ und setze

$$(Y', t, g) \circ (X', s, f) = (X'', s \circ t', g \circ h)$$

Beweis. Wir müssen zuerst zeigen, dass \mathcal{R} eine Äquivalenzrelation ist. Die Reflexivität und Symmetrie ist klar. Es bleibt die Transitivität zu zeigen. Sei $(X', s, f) \mathcal{R} (X'', t, g)$ und $(X'', t, g) \mathcal{R} (X''', u, h)$. Dies liefert die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & X' & \\
 s \swarrow & \uparrow & \searrow f \\
 X & Z' & Y \\
 k \swarrow & \downarrow i & \searrow g \\
 & X'' &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & X'' & \\
 t \swarrow & \uparrow j & \searrow g \\
 X & Z'' & Y \\
 l \swarrow & \downarrow & \searrow h \\
 & X''' &
 \end{array}
 \tag{1.6.2}$$

Betrachte folgendes Diagramm, wobei die gepunkteten Morphismen a und b mit Hilfe von (S3), angewendet auf die Morphismen l und k , konstruiert werden:

$$\begin{array}{ccccc}
 Z''' & \xrightarrow{\dots a} & Z'' & \longrightarrow & X''' \\
 \downarrow b & & \downarrow j & \searrow l & \downarrow u \\
 Z' & \xrightarrow{i} & X'' & \xrightarrow{t} & X \\
 \downarrow & \searrow k & & & \\
 X' & \xrightarrow{s} & & & X
 \end{array}
 \quad \text{und}$$

Es gilt

$$t \circ j \circ a = l \circ a = k \circ b = t \circ i \circ b$$

Wegen (S 4) existiert ein $\tilde{s} : Z''' \rightarrow Z''$ mit $j \circ a \circ \tilde{s} = i \circ b \circ \tilde{s}$. Setze $\tilde{a} := a \circ \tilde{s}$ und $\tilde{b} := b \circ \tilde{s}$. Wir erhalten das folgende *kommutative* Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 Z''' & \xrightarrow{\tilde{a}} & Z'' & \longrightarrow & X''' \\
 \downarrow \tilde{b} & & \downarrow j & \searrow l & \downarrow u \\
 Z' & \xrightarrow{i} & X'' & \xrightarrow{t} & X \\
 \downarrow & \searrow k & & & \\
 X' & \xrightarrow{s} & & & X
 \end{array}
 \tag{1.6.3}$$

Andererseits haben wir das kommutative Diagramm welches aus den rechten Hälften der Diagramme (1.6.2) gebildet wird:

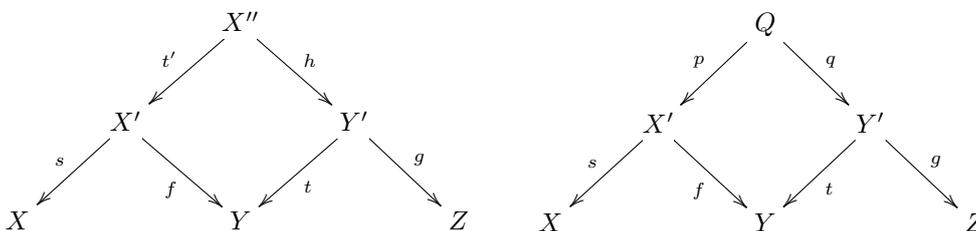
$$\begin{array}{ccccc}
 Z''' & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & X''' \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow g & \downarrow h \\
 Z' & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{g} & Y \\
 \downarrow & \searrow f & & & \\
 X' & \longrightarrow & & & Y
 \end{array}
 \tag{1.6.4}$$

Die beiden Diagramme (1.6.3) und (1.6.4) liefern das kommutative Diagramm

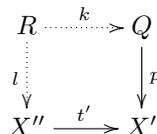


was $(X', s, f)\mathcal{R}(X''', u, h)$ zeigt.

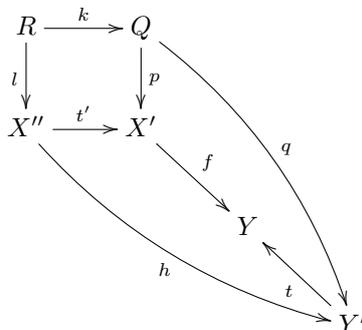
Wir zeigen exemplarisch, dass die Verknüpfung unabhängig davon ist, wie man das Quadrat in (1.6.1) ergänzt. Gegeben seien also zwei Diagramme



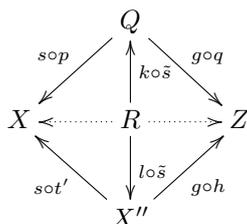
Wegen (S3) können wir folgendes Diagramm ausfüllen



Wir erhalten



Wir haben $t \circ q \circ k = f \circ p \circ k = f \circ t' \circ l = t \circ h \circ l$. Wegen (S4) gibt es dann ein $\tilde{s} : \tilde{R} \rightarrow R$ mit $q \circ k \circ \tilde{s} = h \circ l \circ \tilde{s}$. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm



Das zeigt, dass $(X'', s \circ t', g \circ h)\mathcal{R}(Q, s \circ p, g \circ q)$. □

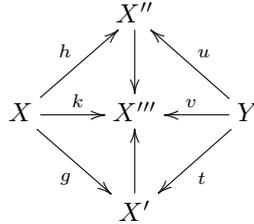
Bemerkung 1.39. Die Morphismen in \mathcal{C}_S können auch durch

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \{(X', g, t) \mid X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}), t : Y \rightarrow X', g : X \rightarrow X', t \in S\} / \mathcal{R}'$$

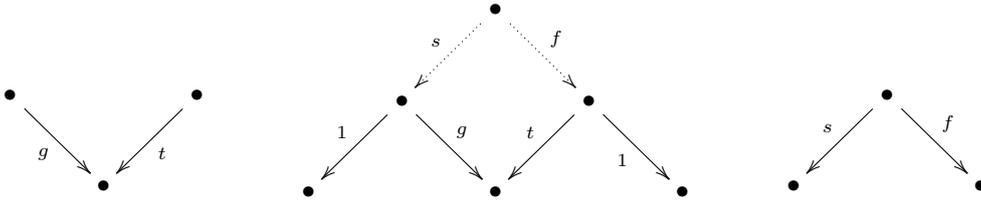
definiert werden, wobei \mathcal{R}' die folgende Äquivalenzrelation ist:

$$(X', g, t) \mathcal{R}' (X'', h, u)$$

gilt genau dann wenn ein kommutatives Diagramm



mit $v \in S$ existiert. Dies folgt aus:



Wir bezeichnen mit \mathcal{Q} den Funktor

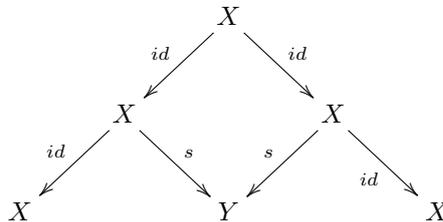
$$\mathcal{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$$

der durch $\mathcal{Q}(X) = X$ für $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und $\mathcal{Q}(f) = (X, id_X, f)$ für $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ definiert ist.

Lemma 1.40. 1. Für $s \in S$ ist $\mathcal{Q}(s)$ ein Isomorphismus in \mathcal{C}_S .

2. Sei \mathcal{C}' eine Kategorie und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ein Funktor, s.d. für alle $s \in S$ der Morphismus $F(s)$ ein Isomorphismus ist. Dann faktorisiert F eindeutig über \mathcal{Q} .

Beweis. 1. Aus dem Diagramm



folgt $(X, s, id) \circ \mathcal{Q}(s) = (X, s, id) \circ (X, id, s) = (X, id, id) = id_{\mathcal{C}_S}$. Die andere Richtung folgt ähnlich.

2. Wir müssen einen Funktor $F' : \mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{C}'$ definieren, s.d. $F' \circ \mathcal{Q} = F$. Da $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$ definieren wir $F'(\mathcal{Q}(X)) := F(X)$. Sei jetzt (X', s, f) ein Morphismus in \mathcal{C}_S . Dann ist $w = F(s)$ ein Isomorphismus und wir definieren $F'((X', s, f)) = (F(X) \xrightarrow{w^{-1}} F(X') \xrightarrow{F(f)} F(Y))$. Mit dieser Definition gilt offensichtlich $F' \circ \mathcal{Q} = F$.

□

Wenn $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus ist schreiben wir auch (s, f) für diesen Morphismus. Es gilt dann folgende Kürzungsregel.

Lemma 1.41 (Kürzungsregel). *Sei \mathcal{C} triangulierte Kategorie und S ein multiplikatives System. Sei $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$, $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ und $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X'', X')$ mit $s, c \in S$. Dann gilt*

$$(s, f) = (s \circ c, f \circ c)$$

Beweis. Die Aussage folgt aus diesem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X'' & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 & s \circ c & id & f \circ c & \\
 X & \xleftarrow{s \circ c} & X'' & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & s & c & f & \\
 & & X' & &
 \end{array}$$

□

Proposition 1.42. *Sei \mathcal{C} eine Kategorie und \mathcal{C}' eine volle Unterkategorie. Sei S ein multiplikatives System in \mathcal{C} und S' die Familie von Morphismen in \mathcal{C}' die zu S gehören. Nehme an S' ist ein multiplikatives System in \mathcal{C}' und sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Sei $s : X' \rightarrow X$ ein Morphismus in S mit $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, dann existiert ein $g : W \rightarrow X'$ mit $W \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ und $s \circ g \in S$.*
2. *dieselbe Aussage wie 1. mit umgedrehten Pfeilen.*

Dann ist \mathcal{C}'_S , eine volle Unterkategorie von \mathcal{C}_S .

Beweis. \mathcal{C}'_S ist eine Unterkategorie von \mathcal{C}_S , da $\text{Ob}(\mathcal{C}'_S) = \text{Ob}(\mathcal{C}') \subset \text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$ und ein Morphismus in \mathcal{C}'_S , geben durch $X \leftarrow X' \rightarrow Y$ mit $X, X', Y \in \mathcal{C}'$ automatisch auch ein Morphismus in \mathcal{C}_S ist. Wir zeigen, dass \mathcal{C}'_S , eine volle Unterkategorie ist. Sei $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in \mathcal{C}_S mit $X, Y \in \mathcal{C}'$. Nach Annahme finden wir ein $g : W \rightarrow X'$ mit $W \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ und $s \circ g \in S$. Es gilt $(X', s, f) = (W, s \circ g, s \circ f)$ nach der Kürzungsregel. Dies zeigt die Behauptung. □

Definition 1.43. *Sei \mathcal{C} eine triangulierte Kategorie und \mathcal{N} eine Unterfamilie von $\text{Ob}(\mathcal{C})$. Dann ist \mathcal{N} ein **Null-System** wenn es folgende Eigenschaften erfüllt:*

- (N 1) $0 \in \mathcal{N}$
- (N 2) $X \in \mathcal{N}$ genau dann wenn $X[1] \in \mathcal{N}$
- (N 3) Wenn $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck ist und $X, Y \in \mathcal{N}$ dann ist $Z \in \mathcal{N}$.

Wir definieren:

$$S(\mathcal{N}) := \{f : X \rightarrow Y \mid \exists \text{ ausgezeichnetes Dreieck } X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] \text{ mit } Z \in \mathcal{N}\}$$

Proposition 1.44. *Sei \mathcal{N} ein Null-system, dann ist $S(\mathcal{N})$ ein multiplikatives System.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $S(\mathcal{N})$ die Eigenschaften (S1) – (S4) erfüllt.

(S1) Die Eigenschaft (S1) folgt aus (N1) und (TR1)

(S2) Seien $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z' \rightarrow X[1]$ und $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow X' \rightarrow Y[1]$ zwei ausgezeichnete Dreiecke mit $X', Z' \in \mathcal{N}$. Wegen (TR2) gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck $X \xrightarrow{g \circ f} Z \rightarrow Y' \rightarrow X[1]$ und wegen (TR5) ein ausgezeichnetes Dreieck $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow Z'[1]$. Wegen (N2), (N3) und (TR3) gilt $Y' \in \mathcal{N}$, also ist $g \circ f \in S(\mathcal{N})$.

(S3) Wir müssen folgendes Diagramm vervollständigen:

$$\begin{array}{ccc} X & \cdots & Z \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ W & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

wobei $g, h \in S(\mathcal{N})$. Betrachte dafür die ausgezeichneten Dreiecke $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k} X' \rightarrow Z[1]$ mit $X' \in \mathcal{N}$ und $W \rightarrow X \xrightarrow{k \circ f} X' \rightarrow W[1]$. Wegen (TR4) und (TR3) gibt es einen Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{h} & W & \xrightarrow{k \circ f} & X' & \longrightarrow & W[1] \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow id_{X'} & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{k} & X' & \longrightarrow & Z[1] \end{array}$$

Da $X' \in \mathcal{N}$ folgt, dass $h \in S(\mathcal{N})$. Die zweite Aussage folgt ähnlich.

(S4) Sei $f : X \rightarrow Y$ und $t : Y \rightarrow Y'$ mit $t \in S(\mathcal{N})$ und $t \circ f = 0$ gegeben. Wir zeigen die Existenz eines $s : X' \rightarrow X$, $s \in S(\mathcal{N})$ s.d. $f \circ s = 0$ gilt. Sei $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{t} Y' \rightarrow Z[1]$ ein ausgezeichnetes Dreieck mit $Z \in \mathcal{N}$. Wegen (TR1), (TR3) und (TR4) erhalten wir einen Morphismus $h : X \rightarrow Z$ mit $f = g \circ h$ aus dem folgenden Morphismus von Dreiecken:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{id_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow h & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{t} & Y' & \longrightarrow & Z[1] \end{array}$$

Der Morphismus h liefert ein ausgezeichnetes Dreieck $X' \xrightarrow{s} X \xrightarrow{h} Z \rightarrow X'[1]$. Es gilt $0 = g \circ h \circ s = f \circ id_X \circ s = f \circ s$ und wegen $Z \in \mathcal{N}$ gilt $s \in S(\mathcal{N})$. Die zweite Bedingung folgt ähnlich. □

Wenn \mathcal{C} eine triangulierte Kategorie und \mathcal{N} ein Null-System ist, dann schreiben wir auch \mathcal{C}/\mathcal{N} anstatt $\mathcal{C}_{S(\mathcal{N})}$.

Proposition 1.45. *Sei \mathcal{C} eine triangulierte Kategorie und \mathcal{N} ein Null-System*

1. \mathcal{C}/\mathcal{N} ist eine triangulierte Kategorie, mit ausgezeichneten Dreiecken, die isomorph zu Bildern von ausgezeichneten Dreiecken von \mathcal{C} sind. Insbesondere ist der Funktor

$$Q_{\mathcal{N}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{N}$$

trianguliert.

2. Es gilt $Q_{\mathcal{N}}(X) \simeq 0$ für $X \in \mathcal{N}$.
3. Jeder Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ von triangulierten Kategorien, mit $F(X) \simeq 0$ für $X \in \mathcal{N}$, faktorisiert eindeutig über $Q_{\mathcal{N}}$.

Beweis. 1. Die Eigenschaften (TR0), (TR1) und (TR3) sind klar. Wir beweisen (TR2). Sei $X \xrightarrow{(s,f)} Y$ ein Morphismus. Zu dem Morphismus $X' \xrightarrow{f} Y$ erhalten wir ein ausgezeichnetes Dreieck in \mathcal{C} :

$$X' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z' \xrightarrow{h} X'[1] \quad (1.6.6)$$

Betrachte folgendes Diagramm in \mathcal{C}/\mathcal{N} :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{(s,f)} & Y & \xrightarrow{(1,g)} & Z' & \xrightarrow{-(1,s \circ h)} & X[1] \\ \downarrow (s,1) & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow -(s,1) \\ X' & \xrightarrow{(1,f)} & Y & \xrightarrow{(1,g)} & Z' & \xrightarrow{(1,h)} & X'[1] \end{array}$$

Die untere Sequenz ist das Bild der Sequenz (1.6.6) in \mathcal{C}/\mathcal{N} und daher ein ausgezeichnetes Dreieck. Wegen dem Kürzungslemma ist das Diagramm ein (Iso-)Morphismus von Dreiecken und daher ist auch die obere Sequenz ein ausgezeichnetes Dreieck.

Wir beweisen (TR4). Betrachte folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f[1] \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A[1] \end{array}$$

wobe die Zeilen ausgezeichnete Dreiecke in \mathcal{C}/\mathcal{N} sind. Wir müssen einen Morphismus $h : Z \rightarrow C$ konstruieren s.d. obiges Diagramm ein Morphismus von Dreiecken ist. Wir können die Zeilen mit ausgezeichneten Dreiecken ersetzen, die Bilder von ausgezeichneten Dreiecken in \mathcal{C} sind. Die Behauptung folgt dann aus der entsprechenden Eigenschaft der triangulierten Kategorie \mathcal{C} .

Der Beweis von (TR5) wird weggelassen.

2. Sei $X \in \mathcal{N}$. Betrachte das Dreieck $X \rightarrow 0 \rightarrow X[1] \xrightarrow{id[1]} X[1] \in \mathcal{C}$. Da $X \in \mathcal{N}$ folgt, dass der Morphismus $X \rightarrow 0$ in $S(\mathcal{N})$ liegt, d.h. $Q(X) \rightarrow 0$ ist ein Isomorphismus.
3. Die Aussage folgt direkt aus Lemma 1.40 und der Definition von \mathcal{N} .

□

1.7 Derivierte Kategorien

Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie. Wir wenden jetzt die Konstruktion aus Abschnitt 1.5 auf die triangulierte Kategorie $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ und das Null-system

$$\mathcal{N} = \{X \in \text{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{C})) \mid H^n(X) = 0 \text{ für alle } n\} \quad (1.7.1)$$

an, d.h. $S(\mathcal{N})$ besteht aus den Quasi-Isomorphismen von $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

Definition 1.46. Wir setzen $\mathbf{D}(\mathcal{C}) = \mathbf{K}(\mathcal{C})/\mathcal{N}$ und nennen $\mathbf{D}(\mathcal{C})$ die *derivierte Kategorie* von \mathcal{C} .

In gleicher Weise können wir für die Kategorien $\mathbf{K}^b(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{K}^+(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{K}^-(\mathcal{C})$ die derivierten Kategorien $\mathbf{D}^b(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{D}^-(\mathcal{C})$ definieren. Wegen Proposition Lemma 1.40 faktorisiert der Funktor $H^n(\cdot) : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ über $\mathbf{D}(\mathcal{C})$.

Bemerkung 1.47. 1. $\mathbf{D}^b(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{D}^-(\mathcal{C})$ sind zu den vollen Unterkategorien von $\mathbf{D}(\mathcal{C})$ äquivalent, die aus Objekten mit $H^n(X) = 0$ für $|n| \gg 0$ bzw. $n \ll 0$ bzw. $n \gg 0$ bestehen.

2. Das Bild des Funktors $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{C})$ ist äquivalent zur vollen Unterkategorie von $\mathbf{D}(\mathcal{C})$ die aus Objekten mit $H^n(X) = 0$ für $n \neq 0$ besteht.

Proposition 1.48. Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie und $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Sei $M(f)$ der Abbildungskegel von f und sei $\phi^n : M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \rightarrow Z^n$ der Morphismus $(0, g^n)$. Dann ist $\{\phi^n\}_n : M(f) \rightarrow Z$ ein Quasi-Isomorphismus.

Beweis. Es ist klar, dass ϕ ein Morphismus von Komplexen ist. Außerdem haben wir eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow M(id_X) \rightarrow M(f) \rightarrow Z \rightarrow 0 \quad (1.7.2)$$

($0 \rightarrow X^{n+1} \oplus X^n \rightarrow X^{n+1} \oplus Y^n \rightarrow Z^n$ direkte Summen von zwei exakten Sequenzen). Wegen der langen exakten Kohomologie Sequenz von (1.7.2) reicht es zu zeigen, dass $H^n(M(id_X)) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Das ist aber klar, da $M(id_X)$ gleich null in $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ ist. \square

Proposition 1.49. Sei \mathcal{I} eine volle, additive Unterkategorie von \mathcal{C} , s.d. gilt:

$$\text{für jedes } X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \text{ gibt es ein } X' \in \text{Ob}(\mathcal{I}) \text{ und eine exakte Sequenz } 0 \rightarrow X \rightarrow X'. \quad (1.7.3)$$

Dann gilt:

1. für jedes $Y \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$ existiert ein $I \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$ und ein Quasi-Isomorphismus $f : Y \rightarrow I$.
2. Sei \mathcal{N} ein Nullsystem wie in (1.7.1) und sei $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$. Dann ist der kanonische Funktor

$$\mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}' \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C})$$

eine Kategorienäquivalenz.

Bevor wir den Beweis geben, brauchen wir folgende Notation:

Definition 1.50. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Ein kommutatives Diagramm in \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

heißt **ko-kartesisch**, wenn für jedes Paar von Morphismen $p : B \rightarrow X$ und $q : C \rightarrow X$ mit $p \circ f = q \circ h$ ein eindeutiger Morphismus $r : D \rightarrow X$ mit $r \circ k = p$ und $r \circ g = q$ existiert:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array} \begin{array}{l} \searrow p \\ \downarrow \\ \exists! r \\ \downarrow \\ \searrow q \end{array} X$$

Das kommutative Diagramm mit den dualen Eigenschaften heißt **kartesisch**.

Bemerkung 1.51. Ist \mathcal{C} eine abelsche Kategorie, dann kann jedes Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \\ & & C \end{array}$$

zu einem ko-kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{g} & \frac{B \oplus C}{\text{Im}(f-g)} \end{array}$$

ergänzt werden.

Lemma 1.52. Betrachte ein ko-kartesisches Diagramm wie oben, dann gilt:

1. $\text{Cok } h \simeq \text{Cok } h$ und $\text{Cok } f \simeq \text{Cok } g$
2. Die Morphismen $\ker h \rightarrow \ker k$ und $\ker f \rightarrow \ker g$ sind Epimorphismen.

Beweis. Der Beweis der ersten Aussage ist eine Übungsaufgabe. Wir beweisen die zweite Aussage. Die Annahme, dass das Diagramm ko-kartesisch ist, ist äquivalent zur der Aussage, dass folgende Sequenz exakt ist:

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ -f \end{pmatrix}} C \oplus B \xrightarrow{(g,k)} D \rightarrow 0$$

Sei \tilde{A} das Ko-Bild von $\begin{pmatrix} h \\ -f \end{pmatrix}$. Dies liefert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{A} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tilde{h} \\ -\tilde{f} \end{pmatrix}} C \oplus B \xrightarrow{(g,k)} D \rightarrow 0$$

und zeigt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\ \tilde{h} \downarrow & & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

kartesisch ist. Die duale Aussage von 1. liefert dann Isomorphismen $\ker \tilde{h} \simeq \ker k$ und $\ker \tilde{f} \simeq \ker g$. Da $\ker h \rightarrow \ker \tilde{h}$ und $\ker f \rightarrow \ker \tilde{f}$ Epimorphismen sind, folgt die Aussage. \square

Beweis von Proposition 1.49. Sei $Y \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$. Wir konstruieren per Induktion einen Komplex

$$I_{\leq p} : \dots \rightarrow I^{p-1} \rightarrow I^p \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

und einen Morphismus von Komplexen $Y \rightarrow I_{\leq p}$, s.d.

1. alle I^k Objekte in \mathcal{I} sind,
2. $H^k(Y) \simeq H^k(I_{\leq p})$ für $k < p$ gilt
3. $H^p(Y) \rightarrow \text{Cok}(d_{I_{\leq p}}^{p-1})$ ist ein Monomorphismus.

Da $Y \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$ ist, reicht es für $p \ll 0$ $I_{\leq p} = 0$ zu setzen. Nehme an, wir haben $I_{\leq p}$ konstruiert. Wir konstruieren die zwei ko-kartesischen Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cok } d_Y^{p-1} & \longrightarrow & \ker d_Y^{p+1} & \hookrightarrow & Y^{p+1} \\ \downarrow & & \vdots & & \vdots \\ \text{Cok } d_{I_{\leq p}}^{p-1} & \longrightarrow & Z^{p+1} & \longrightarrow & Z'^{p+1} \end{array} \quad (1.7.4)$$

Beachte, dass $Z^{p+1} \rightarrow Z'^{p+1}$ wegen Lemma 1.52 2. ein Monomorphismus ist.

Aufgrund der Voraussetzung (1.7.3) existiert ein Monomorphismus $Z'^{p+1} \hookrightarrow I^{p+1}$. Wir definieren $d_{I_{\leq p+1}}^p : I^p \rightarrow I^{p+1}$ durch den zusammengesetzten Morphismus

$$I^p \longrightarrow \text{Cok } d_{I_{\leq p}}^{p-1} \longrightarrow Z^{p+1} \longrightarrow Z'^{p+1} \longrightarrow I^{p+1}$$

Indem wir $d_{I_{\leq p+1}}^k := d_{I_{\leq p}}^k$ für $k < p$ definieren, erhalten wir den Komplex $I_{\leq p+1}$

(Übung: Warum gilt $d_{I_{\leq p+1}}^p \circ d_{I_{\leq p+1}}^{p-1} = 0$?). Aus Diagramm (1.7.4) erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Y^p & \longrightarrow & \text{Cok } d_Y^{p-1} & \longrightarrow & Y^{p+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I^p & \longrightarrow & \text{Cok } d_{I_{\leq p}}^{p-1} & \longrightarrow & I^{p+1} \end{array}$$

welches einen Morphismus $Y \rightarrow I_{\leq p+1}$ liefert.

Wir müssen jetzt im Induktionsschritt die Eigenschaften 1., 2. und 3. zeigen. Dafür betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(Y) & \hookrightarrow & \text{Cok } d_Y^{p-1} & \xrightarrow{f} & \ker d_Y^{p+1} & \longrightarrow & Y^{p+1} \\ \downarrow k & \searrow l & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^p(I_{\leq p}) & \hookrightarrow & \text{Cok } d_{I_{\leq p}}^{p-1} & \xrightarrow{g} & Z^{p+1} & \hookrightarrow & Z'^{p+1} \hookrightarrow I^{p+1} \end{array}$$

wobei der Morphismus l den Morphismus k induziert. Der Morphismus l ist wegen der Induktionsvoraussetzung 3. ein Monomorphismus. Daher ist k ebenfalls ein Monomorphismus. Es gilt

$$\ker f \simeq H^p(Y) \quad \text{und} \quad \ker g \simeq H^p(I_{\leq p})$$

Wegen Lemma 1.52 2. ist k dann auch ein Epimorphismus.

Weiterhin gilt

$$H^{p+1}(X) \simeq \text{Cok}(Y^p \rightarrow \ker d_Y^{p+1}) \simeq \text{Cok}(\text{Cok } d_Y^{p-1} \rightarrow \ker d_Y^p) \simeq \text{Cok}(\text{Cok } d_{I_{\leq p}}^{p-1} \rightarrow Z^{p+1})$$

wobei der letzte Isomorphismus aus Lemma 1.52 1. folgt.

Da die Morphismen $Z^{p+1} \hookrightarrow Z'^{p+1}$ und $Z'^{p+1} \rightarrow I^{p+1}$ Monomorphismen sind, induzieren diese die Monomorphismen

$$\text{Cok}(\text{Cok } d_{I_{\leq p}}^{p-1} \rightarrow Z^{p+1}) \hookrightarrow \text{Cok}(\text{Cok } d_{I_{\leq p}}^{p-1} \rightarrow Z'^{p+1}) \hookrightarrow \text{Cok}(\text{Cok } d_I^{p-1} \rightarrow I^{p+1})$$

Wegen $\text{Cok}(\text{Cok } d_I^{p-1} \rightarrow I^{p+1}) = \text{Cok}(d_I^p)$ erhalten wir den Monomorphismus $H^{p+1}(X) \hookrightarrow \text{Cok}(d_I^p)$ und haben somit den Induktionsschritt gezeigt.

Um die zweite Aussage zu zeigen verwenden wir Proposition 1.42 2. Sei als $Y \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{S}))$ und $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{E}))$ sowie ein Quasi-Isomorphismus $Y \rightarrow X$ gegeben. Wir finden wegen dem ersten Teil einen Quasi-Isomorphismus $Y \rightarrow W$ mit $W \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{S}))$. Da die zusammengesetzte Abbildung wieder ein Quasi-Isomorphismus ist, ist die zweite Bedingung in Proposition 1.42 erfüllt und zeigt, dass der Funktor $\mathbf{K}^+(\mathcal{S})/\mathcal{N}' \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \mathbf{K}^+(\mathcal{E})/\mathcal{N}$ voll treu ist. Da quasi-isomorphe Objekt in $\mathbf{K}^+(\mathcal{E})$ in $\mathbf{D}^+(\mathcal{E})$ isomorph sind, folgt die Aussage. \square

Definition 1.53. Die Kategorie \mathcal{C} hat **genügend viele injektive Objekte** wenn für jedes $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ein injektives Objekt X' und ein Monomorphismus $X \rightarrow X'$ existiert.

Proposition 1.54. Nehme an \mathcal{C} hat genügend viele injektive Objekte und sei \mathcal{I} die volle Unterkategorie der injektiven Objekte. Dann ist

$$\mathbf{K}^+(\mathcal{I}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C})$$

eine Kategorienäquivalenz.

Beweis. Wegen Proposition 1.49 reicht es $\mathcal{N} \cap \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I})) = 0$ zu zeigen, d.h. jedes $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}^+(\mathcal{I}))$, mit $H^n(X) = 0$ für alle n , ist homotop zu 0. Sei $Z^n = \ker d_X^n$. Wir haben die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z^n \xrightarrow{f^n} X^n \xrightarrow{g^n} Z^{n+1} \longrightarrow 0 \quad (1.7.5)$$

Es folgt aus Lemma 1.17 2. und der Tatsache, dass $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}^+(\mathcal{I}))$, dass alle Z^n injektiv sind. Aus Lemma 1.17 1. folgt dann, dass die Sequenzen (1.7.5) split-exakt sind. Wir haben Abbildungen $k^n : X^n \rightarrow Z^n$ und $h^n : Z^{n+1} \rightarrow X^n$ mit $k^n \circ f^n = \text{id}_{Z^n}$, $g^n \circ h^n = \text{id}_{Z^{n+1}}$ und $\text{id}_{X^n} = f^n \circ k^n + h^n \circ g^n$. Weiterhin gilt $d_X^n = f^{n+1} \circ g^n$. Wir definieren $s^n = h^{n-1} \circ k^n$. Es gilt

$$d_X^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n = f^n \circ g^{n-1} \circ h^{n-1} \circ k^n + h^n \circ k^{n+1} \circ f^{n+1} \circ g^n = f^n \circ k^n + h^n \circ g^n = \text{id}_{X^n},$$

d.h. X ist null-homotop. □

1.8 Derivierte Funktoren

Seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' zwei abelsche Kategorien und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ein additiver links-exakter Funktor. Wir bezeichnen mit Q den natürlichen Funktor $\mathbf{K}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ bzw. $\mathbf{K}^+(\mathcal{C}') \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$.

Definition 1.55. Der **derivierte Funktor** von F ist ein Paar (RF, ξ_F) wobei $RF : \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$ ein triangulierter Funktor und $\xi_F : Q \circ K^+(F) \rightarrow RF \circ Q$ eine natürliche Transformation ist, die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden triangulierten Funktor $G : \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$ und jede natürliche Transformation $\xi : Q \circ K^+(F) \rightarrow G \circ Q$ existiert genau eine natürliche Transformation $\eta : RF \rightarrow G$, s.d folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Q \circ K^+(F) & \\ \xi_F \swarrow & & \searrow \xi \\ RF \circ Q & \xrightarrow{\eta \circ Q} & G \circ Q \end{array} \quad (1.8.1)$$

kommutiert.

Aus der universellen Eigenschaft folgt, dass der derivierte Funktor bis auf Isomorphie eindeutig ist, wenn er existiert.

Es stellt sich also die Frage nach der Existenz solcher abgeleiteten Funktoren.

Definition 1.56. Eine volle additive Unterkategorie \mathcal{I} von \mathcal{C} heißt **F -injektive Unterkategorie**, falls folgendes gilt:

1. Bedingung 1.7.3 ist erfüllt, d.h. für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existiert ein Monomorphismus $X \rightarrow X'$ mit $X' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$
2. wenn $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in \mathcal{C} ist und $X', X \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ gilt, dann ist auch $X'' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$.
3. wenn $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in \mathcal{C} ist und $X', X, X'' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ gilt, dann ist $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$ exakt.

Theorem 1.57. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ein links exakter Funktor und $\mathcal{I} \subset \mathcal{C}$ eine F -injektive Unterkategorie. Dann existiert (RF, ξ_F) .

Da F auf \mathcal{I} exakt ist, bildet $\mathbf{K}^+(F)$ Objekte in $\mathbf{K}^+(\mathcal{I})$ die quasi-isomorph zu 0 sind in Objekte in $\mathbf{K}^+(\mathcal{C}')$ ab, die ebenfalls quasi-isomorph zu 0 sind. Das heißt, dass der zusammengesetzte Funktor

$$\mathbf{K}^+(\mathcal{I}) \xrightarrow{\mathbf{K}^+(F)} \mathbf{K}^+(\mathcal{C}') \xrightarrow{Q} \mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$$

über $\mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}$ faktorisiert:

$$\bar{F} : \mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}' \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$$

Sei $Q' : \mathbf{K}^+(\mathcal{I}) \rightarrow \mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}'$ der Lokalisierungsfunktor. Aus der universellen Eigenschaft der Lokalisierung folgt direkt, dass

$$\bar{F} \circ Q' = Q \circ K^+(F).$$

und damit auch, dass \bar{F} ein triangulierter Funktor ist.

Wir bezeichnen mit

$$\Psi : \mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}' \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) = \mathbf{K}^+(\mathcal{C})/\mathcal{N}$$

die natürliche Einbettung. Der Funktor Ψ ist wegen Proposition 1.49 eine Kategorienäquivalenz. Sei

$$\Phi : \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}'$$

ein quasi-inverser Funktor. Wir haben folgende natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} \alpha : Id_{\mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}'} &\longrightarrow \Phi \circ \Psi \\ \beta : Id_{\mathbf{D}^+(\mathcal{C})} &\longrightarrow \Psi \circ \Phi \end{aligned}$$

Wir definieren RF als

$$RF = \bar{F} \circ \Phi : \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$$

Um das Theorem zu beweisen müssen wir folgendes tun:

1. zeigen, dass RF ein triangulierter Funktor ist
2. eine natürliche Transformation $\xi_F : Q \circ K^+(F) \rightarrow RF \circ Q$ konstruieren
3. die universelle Eigenschaft zeigen

Wir zeigen 1.:

Wir wissen bereits, dass \bar{F} ein triangulierter Funktor ist. Es bleibt zu zeigen, dass Φ trianguliert ist. Aus dem Beweis von Proposition 1.49 folgt, dass Φ mit dem Automorphismus T einer triangulierten Kategorie kommutiert. Um die erste Aussage zu beweisen, reicht es also zu zeigen, dass Φ ausgezeichnete Dreiecke auf ausgezeichnete Dreiecke abbildet.

Sei also $\Delta = (X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1])$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$. Wir können obdA annehmen, dass $X, Y, Z \in \mathbf{K}^+(\mathcal{I})$. Es bleibt zu zeigen, dass Δ isomorph zu einem ausgezeichneten Dreieck aus $\mathbf{K}^+(\mathcal{I})$ ist. Da $\Psi : \mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}' \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ eine Kategorienäquivalenz ist, kommt der Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von einem Morphismus aus $\mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}'$, kann also folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ q \swarrow & & \searrow r \\ X & & Y \end{array}$$

mit $T \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{S}))$ und $q \in \mathcal{N}'$. Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{r} & Y & \longrightarrow & M(r) & \longrightarrow & T[1] \\ \downarrow q & & \downarrow id & & \downarrow v & & \downarrow q[1] \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

Beide Dreiecke sind ausgezeichnete Dreiecke in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$. Da das linke Quadrat kommutiert, existiert ein Morphismus $v : M(r) \rightarrow Z$. Da q und id in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ Isomorphismen sind, sind beide Dreiecke isomorph. Das Bild des oberen Dreiecks ist aber per Definition ausgezeichnet in $\mathbf{K}^+(\mathcal{S})/\mathcal{N}'$, d.h. Φ bildet ausgezeichnete Dreiecke auf ausgezeichnete Dreiecke ab.

Wir zeigen 2. :

Sei $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C})) = \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$ und $Y = \Phi \circ Q(X) \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{S})/\mathcal{N}') = \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{S}))$. Die natürliche Transformation β liefert für $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$ einen Isomorphismus

$$\beta(X) : X \longrightarrow \Psi \circ \Phi(X) = \Phi(X) = Y$$

in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$, der durch das Diagramm

$$X \xrightarrow{s} Z \xleftarrow{t} Y \quad (1.8.2)$$

in $\mathbf{K}^+(\mathcal{C})$ mit $s, t \in \mathcal{N}$ dargestellt werden kann (hier geht Bemerkung 1.39 ein). Wegen Proposition 1.49 1. können wir obDA $Z \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{S}))$ annehmen. Wir wenden den Funktor $K^+(F)$ an und erhalten

$$K^+(F)(X) \xrightarrow{K^+(F)(s)} K^+(F)(Z) \xleftarrow{K^+(F)(t)} K^+(F)(Y)$$

in $\mathbf{K}^+(\mathcal{C}')$. Wegen der Bedingung 3. in Definition 1.56 ist $K^+(F)(t)$ ein Quasi-Isomorphismus (beachte $K^+(F)(s)$ ist im allgemeinen kein Quasiisomorphismus). Wir erhalten also folgenden Morphismus in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$:

$$\xi_F(X) : Q \circ K^+(F)(X) \longrightarrow Q \circ K^+(F)(Y) = \bar{F} \circ Q'(Y) = \bar{F} \circ \Phi \circ Q(X) = RF \circ Q(X) \quad (1.8.3)$$

Wir müssen zeigen, dass $\xi_F(X)$ nicht von der Wahl des Diagramms (1.8.2) abhängt. Zwei äquivalente Diagramme geben das folgende kommutative Diagramm (siehe Bemerkung 1.39):

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_1 & & \\ & s_1 \nearrow & \downarrow & \nwarrow t_1 & \\ X & \xrightarrow{s} & Z & \xleftarrow{t} & Y \\ & s_2 \searrow & \uparrow & \swarrow t_2 & \\ & & Z_2 & & \end{array}$$

Da das Diagramm kommutiert, sind die Morphismen $Q \circ K^+(F)(X) \rightarrow Q \circ K^+(F)(Y)$ die zu (s_1, t_1) bzw. (s_2, t_2) gehören, in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$ gleich.

Es bleibt zu zeigen, dass ξ_F eine natürliche Transformation definiert. Sei $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ ein Morphismus in $\mathbf{K}^+(\mathcal{C})$ und sei $Y_1 = \Phi \circ Q(X_1)$, $Y_2 = \Phi \circ Q(X_2)$. Die natürliche Transformation $\beta : id_{\mathbf{D}^+(\mathcal{C})} \rightarrow \Psi \circ \Phi$ liefert das folgende kommutative Diagramm in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\beta(X_1)} & \Psi(Y_1) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \Psi \circ \Phi(\varphi) \\ X_2 & \xrightarrow{\beta(X_2)} & \Psi(Y_2) \end{array} \quad (1.8.4)$$

Wir können jetzt die Morphismen $\beta(X_1), \beta(X_2)$ und $\Psi \circ \Phi(\varphi)$ in $\mathbf{K}^+(\mathcal{C})$ wie in (1.8.2) darstellen. Desweiteren können wir, wie weiter oben, annehmen, daß alle Objekte " in der Mitte" in $\mathbf{K}^+(\mathcal{S})$ liegen. Ebenso liegen Y_1, Y_2 in $Ob(\mathbf{K}^+(\mathcal{S}))$. Indem wir nun $Q \circ K^+(F)$ auf das Diagramm (1.8.4) anwenden erhalten wir Zeilen vom Typ (1.8.3) in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$ und damit ein kommutatives Diagramm in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$:

$$\begin{array}{ccc} Q \circ K^+(F)(X_1) & \xrightarrow{\xi_F(X_1)} & RF \circ Q(X_1) \\ Q \circ K^+(F)(\varphi) \downarrow & & \downarrow RF \circ Q(\varphi) \\ Q \circ K^+(F)(X_2) & \xrightarrow{\xi_F(X_2)} & RF \circ Q(X_2) \end{array}$$

was zeigt, dass ξ_F eine natürliche Transformation ist.

Wir zeigen 3. :

Zuerst müssen wir für jedes $X \in Ob(\mathbf{K}^+(\mathcal{C})) = Ob(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$ einen Morphismus $\eta(X) : RF(X) \rightarrow G(X)$ konstruieren. Die natürliche Transformation ξ liefert einen Morphismus $\xi(X) : Q \circ K^+(F)(X) \rightarrow G \circ Q(X)$ in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$. Die natürliche Transformation β liefert für so ein X den Isomorphismus $X \rightarrow \Psi \circ \Phi(X)$ in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$. Wie im Beweis von 1. können wir diesen Isomorphismus durch ein Diagramm vom Typ (1.8.2) darstellen. Da ξ eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathbf{K}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$ ist erhalten wir das folgende kommutative Diagramm in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$:

$$\begin{array}{ccc} Q \circ K^+(F)(X) & \xrightarrow{\xi(X)} & G \circ Q(X) \\ Q \circ K^+(F)(s) \downarrow & & \downarrow G \circ Q(s) \\ Q \circ K^+(F)(Z) & \xrightarrow{\xi(Z)} & G \circ Q(Z) \\ Q \circ K^+(F)(t) \uparrow & & \uparrow G \circ Q(t) \\ Q \circ K^+(F)(Y) & \xrightarrow{\xi(Y)} & G \circ Q(Y) \end{array}$$

In diesem Diagramm ist $G \circ Q(t)$ und $Q \circ K^+(F)(t)$ ein Isomorphismus, da t ein Quasi-Isomorphismus ist. Indem wir beide Isomorphismen invertieren, erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Q \circ K^+(F)(X) & \xrightarrow{\xi(X)} & G \circ Q(X) \\ \xi_F(X) \downarrow & & \downarrow G(\beta(Q(X))) \\ RF \circ Q(X) & \xrightarrow{\xi(\Psi \circ \Phi(Q(X)))} & G(\Psi \circ \Phi(Q(X))) \end{array} \quad (1.8.5)$$

Da $\beta(X)$ für $X \in Ob(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$ ein Isomorphismus in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ ist, ist $G(\beta(X))$ auch eine Isomorphismus. Wir definieren

$$\eta(X) : G(\beta(X))^{-1} \circ \xi(\Psi \circ \Phi(X)) : RF(X) \rightarrow G(X)$$

Da sowohl ξ als auch β natürliche Transformationen sind, erhalten wir für $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} RF(X_1) & \xrightarrow{\xi(\psi \circ \phi(X_1))} & G(\Psi \circ \Phi(X_1)) & \xleftarrow{G(\beta(X_1))} & G(X_1) \\ RF(\varphi) \downarrow & & G(\Psi \circ \Phi(\varphi)) \downarrow & & G(\varphi) \downarrow \\ RF(X_2) & \xrightarrow{\xi(\psi \circ \phi(X_2))} & G(\Psi \circ \Phi(X_2)) & \xleftarrow{G(\beta(X_2))} & G(X_2) \end{array}$$

Daraus folgt, dass η eine natürliche Transformation ist. Die Kommutativität des Diagramms (1.8.1) folgt aus der Kommutativität von (1.8.5). Die Eindeutigkeit von η folgt aus der Tatsache, dass $G(\beta(X))$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 1.58.

1. Aus der universellen Eigenschaft von (RF, ξ_F) folgt, dass die Konstruktion unabhängig von der F -injektiven Kategorie \mathcal{I} ist.
2. Ist \mathcal{I} die volle Unter-Kategorie der injektiven Objekte von \mathcal{C} und habe \mathcal{C} genügend viele injektive Objekte. Dann ist \mathcal{I} bzgl. jedem links exakten, additiven Funktor F -injektiv, da jede exakte Sequenz in \mathcal{I} spaltet (siehe Lemma 1.17 1.) und split-exakte Sequenzen wegen der Additivität auf split-exakte Sequenzen abgebildet werden (siehe Lemma 1.11).
3. Sei \mathcal{I} F -injektiv und $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$ mit $H^k(X) = 0$ für $k < n$. Dann gilt

$$R^k F(X) = 0 \quad \text{und} \quad R^n F(X) = FH^n(X).$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass wir ein $Y \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$ mit $Y^k = 0$ für $k < n$ und einen Quasi-Isomorphismus $X \rightarrow Y$ finden können und aus

$$R^n F(X) = H^n RF(X) = H^n(Q \circ K^+(F)(Y)) = H^n(F(Y)) = FH^n(X)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus $H^n(F(Y)) = \ker F(d_Y^n) = F(\ker d_Y^n) = FH^n(Y) = FH^n(X)$ folgt.

4. Ist F ein exakter Funktor. Dann ist ganz \mathcal{C} F -injektiv und es gilt

$$RF \circ Q = Q \circ K^+(F)$$

Proposition 1.59. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ drei abelsche Kategorien und seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ und $F' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ zwei links-exakte Funktoren. Seien \mathcal{I} bzw. \mathcal{I}' zwei F -injektive bzw. F' -injektive Unterkategorien, s.d. $F(\text{Ob}(\mathcal{I})) \subset \text{Ob}(\mathcal{I}')$, dann ist \mathcal{I} $(F' \circ F)$ -injektiv und es gilt:

$$R(F' \circ F) = RF' \circ RF$$

Beweis. Es folgt direkt aus Definition 1.56, dass \mathcal{I} $(F' \circ F)$ -injektiv ist. Weiterhin gilt für $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$

$$RF' \circ RF(X) = RF' \circ \bar{F} \circ \Phi(X) = \bar{F}' \circ \bar{F} \circ \Phi(X) = R(F' \circ F)(X)$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus $F(\text{Ob}(\mathcal{I})) \subset \text{Ob}(\mathcal{I}')$ folgt. □

Proposition 1.60. Seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' zwei abelsche Kategorien, seien $F, F', F'' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ drei links exakte Funktoren und seien $\lambda : F' \rightarrow F$ und $\mu : F \rightarrow F''$ zwei natürliche Transformationen. Sei \mathcal{I} eine volle additive Unterkategorie von \mathcal{C} , die injektiv bezüglich F', F und F'' ist, s.d. für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow F'(X) \longrightarrow F(X) \longrightarrow F''(X) \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann existiert eine natürliche Transformation $RF'' \rightarrow RF'[1]$, s.d. für alle $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$ das Dreieck

$$RF'(X) \xrightarrow{R\lambda(X)} RF(X) \xrightarrow{R\mu(X)} RF''(X) \xrightarrow{\nu(X)} RF'(X)[1]$$

ausgezeichnet ist.

Beweis. Für jedes $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$ haben wir exakte Sequenzen:

$$0 \longrightarrow F'(X^n) \xrightarrow{\lambda(X^n)} F(X^n) \xrightarrow{\mu(X^n)} F''(X^n) \longrightarrow 0$$

Wegen Proposition 1.48 ist $F''(X)$ isomorph zum Abbildungskegel $M(\lambda(X))$ in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$. Wir erhalten einen Morphismus $\alpha(\lambda(X)) : M(\lambda(X)) \rightarrow F'(X)[1]$ der in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$ einen Morphismus von $F''(X)$ nach $F'(X)[1]$ liefert. Dies gibt einen Morphismus

$$\nu(X) : RF''(X) \rightarrow RF'(X)[1]$$

Wir müssen zeigen, dass ν eine natürliche Transformation ist. Sei $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ ein Morphismus in $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
RF''(X_1) & \xlongequal{\quad} & \overline{F}'' \circ \Phi(X_1) & \xrightarrow{\simeq} & M(\lambda(\Phi(X_1))) & \longrightarrow & F'(\Phi(X_1))[1] & \xlongequal{\quad} & RF'(X_1)[1] \\
\downarrow RF''(\varphi) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow RF'(\varphi)[1] \\
RF''(X_2) & \xlongequal{\quad} & \overline{F}'' \circ \Phi(X_2) & \xrightarrow{\simeq} & M(\lambda(\Phi(X_2))) & \longrightarrow & F'(\Phi(X_2))[1] & \xlongequal{\quad} & RF'(X_2)[1]
\end{array}$$

was zeigt, dass ν eine natürliche Transformation ist. Hier folgt die Kommutativität der beiden mittleren Quadrate aus der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccc}
F''(I_1) & \xleftarrow{(0, \mu(I_1))} & M(\lambda(I_1)) & \xlongequal{\quad} & F'(I_1)[1] \oplus F(I_1) & \xrightarrow{\alpha(\lambda(I_1))} & F'(I_1)[1] \\
\downarrow F''(\varphi) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow F'(\varphi)[1] \\
F''(I_2) & \xleftarrow{(0, \mu(I_2))} & M(\lambda(I_2)) & \xlongequal{\quad} & F'(I_2)[1] \oplus F(I_2) & \xrightarrow{\alpha(\lambda(I_2))} & F'(I_2)[1]
\end{array}$$

Die Aussage, dass die drei derivierten Funktoren ein ausgezeichnetes Dreieck bilden, folgt aus Definition 1.29 und Proposition 1.45. □

Zuletzt wollen wir noch den Fall eines rechts-exakten Funktors F betrachten.

Definition 1.61. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ein rechts-exakter Funktor. Eine volle additive Unterkategorie \mathcal{P} von \mathcal{C} heißt F -projektiv falls gilt

1. für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existiert ein Epimorphismus $X' \rightarrow X$ mit $X' \in \text{Ob}(\mathcal{P})$.
2. wenn $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in \mathcal{C} ist und $X'', X \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ gilt, dann ist auch $X' \in \text{Ob}(\mathcal{P})$
3. wenn $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in \mathcal{C} ist und $X', X, X'' \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ gilt, dann ist $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$ exakt.

Die Konstruktion des links-derivierten Funktors:

$$LF : \mathbf{D}^-(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{C}')$$

verläuft analog zu der eines rechts-derivierten Funktors.

2 Garben

Sei X ein topologischer Raum und R ein kommutativer Ring mit 1.

Definition 2.1. Eine **Prägarbe** von R -Moduln \mathcal{F} auf X ist eine Kollektion von Daten

$$\begin{aligned}
(U \text{ offen in } X) &\mapsto \mathcal{F}(U) \quad (R\text{-Modul}) \\
(U \subset V) &\mapsto \rho_{U,V} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \quad (\text{Homomorphismus})
\end{aligned}$$

so daß gilt

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$

2. $\rho_{U,U} = id$
3. $\rho_{U,V} \circ \rho_{V,W} = \rho_{W,U}$ für $U \subset V \subset W$ offen

Die Definition einer Garbe von Ringen bzw. k -Algebren verläuft analog.

Definition 2.2. Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} Prägarben auf X . Ein Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von (Prä-)Garben ist eine Kollektion von Homomorphismen $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ für jede offene Menge U , so daß für $U \subset V$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \\ \rho_{U,V} \downarrow & & \downarrow \rho_{U,V} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Seien $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ und $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$ Morphismen von Prägarben, dann ist ihre Verknüpfung mittels

$$(\psi \circ \varphi)(U) := \psi(U) \circ \varphi(U)$$

definiert. Die Summe von zwei Morphismen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist durch

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(U) := \varphi_1(U) + \varphi_2(U)$$

definiert. Die direkte Summe zweier Prägarben \mathcal{F} und \mathcal{G} ist über

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$$

definiert. Ist $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben, dann definieren wir den Kern und Kokern von φ auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} \ker(\varphi)(U) &= \ker(\varphi(U)) \\ \text{cok}(\varphi)(U) &= \text{Cok}(\varphi(U)) \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese beiden Definitionen die universelle Eigenschaft eines Kerns bzw. Kokerns erfüllen. Aus diesen Definitionen folgt dann direkt, dass

$$\text{im}(\varphi) = \text{coim}(\varphi)$$

d.h. die Kategorie der Prägarben $\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X)$ ist eine abelsche Kategorie.

Definition 2.3.

1. Eine Prägarbe \mathcal{F} heißt **Garbe**, falls gilt: Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Dann gilt

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \quad \text{ist injektiv}$$

und für $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ für alle i, j existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U_i, U}(s) = s_i$.

2. Ein **Morphismus von Garben** ist ein Morphismus der unterliegenden Prägarben.
3. Die direkte Summe von zwei Garben ist die direkte Summe der unterliegenden Prägarben.

Insbesondere ist die Kategorie der Garben $\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X)$ eine voll treue, additive Unterkategorie der Prägarben.

Sei $x \in X$. Die Menge der offenen Umgebungen U von x ist eine gerichtete Menge mit $U \leq V$, falls $U \supset V$. Für eine Prägarbe \mathcal{F} liefert dies ein gerichtetes System von R -Moduln. Wir definieren den **Halm** von \mathcal{F} bei x durch

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_U \mathcal{F}(U)$$

und die Halmabbildung

$$\rho_{U,x} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$$

Ein Morphismus von Prägarben $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ liefert einen Morphismus von gerichteten Systemen. Die universelle Eigenschaft des direkten Limes gibt dann einen Morphismus

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

Dies liefert einen additiven Funktor von der Kategorie der Prägarben zur Kategorie der R -Moduln.

Lemma 2.4. *Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei Garben auf X .*

1. *Seien $\varphi, \psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ zwei Garbenmorphismen mit $\varphi_x = \psi_x$ für alle $x \in X$, dann gilt $\varphi = \psi$.*
2. *Für einen Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist*

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \quad \forall x \in X$$

injektiv genau dann wenn $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ injektiv für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist.

3. *Ein Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist ein Isomorphismus genau dann wenn alle Halmabbildungen $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ Isomorphismen sind.*

Beweis. 1. Betrachte folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \varphi(U) \downarrow & & \downarrow \prod_{x \in U} \varphi_x \\ \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \end{array}$$

Die horizontalen Abbildungen sind wegen den Garbenaxiomen injektiv. Da aufgrund der Annahme $\varphi_x = \psi_x$ für alle $x \in U$ gilt, bleibt das Diagramm kommutativ wenn wir $\varphi(U)$ mit $\psi(U)$ ersetzen. Daraus folgt $\varphi(U) = \psi(U)$.

2. Sei φ_x injektiv für alle $x \in X$. Aus dem Diagramm von Punkt 1. erhalten wir, dass $\varphi(U)$ injektiv ist. Die umgekehrte Implikation folgt aus der Exaktheit von \varinjlim (siehe Appendix Proposition 7.10).
3. Sei $U \subset X$ eine offene Menge. Aus Punkt 2. folgt, dass $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ injektiv ist. Sei jetzt $t \in \mathcal{G}(U)$. Da $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus ist gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x und einen Schnitt $r(x) \in \mathcal{F}(U_x)$ s.d. $\varphi(U_x)(r(x))$ und t den selben Halm bei x haben, d.h. $\varphi(U_x)(r(x))_x = \varphi_x(r(x))_x = t_x$. Nach der Definition des direkten Limes gibt es dann eine Umgebung $V_x \subset U_x$, s.d. falls wir $s(x) := \rho_{V_x, U_x}(r(x))$ definieren, folgendes gilt

$$\varphi(V_x)(s(x)) = \rho_{V_x, U_x}(t)$$

Für $x, y \in U$ haben $s(x)$ und $s(y)$ dieselbe Einschränkung auf $V_x \cap V_y$, da $\varphi(V_x \cap V_y)$ injektiv ist. Wegen dem Garbenaxiom gibt es daher ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U_x, U}(s) = s(x)$. Dann gilt aber $\varphi(U)(s) = t$.

□

Wir wollen jetzt zu einer gegebenen Prägarbe \mathcal{F} eine Garbe \mathcal{F}^+ konstruieren.

Proposition 2.5. *Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf X , dann existiert eine Garbe \mathcal{F}^+ und ein Morphismus $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$, der folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jede Garbe \mathcal{G} und jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ existiert genau ein Morphismus $\varphi' : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\varphi = \varphi' \circ \theta$, d.h. der von θ induzierte Homomorphismus*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{PSh}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

ist ein Isomorphismus. Die **assozierte Garbe** \mathcal{F}^+ ist eindeutig bis auf Isomorphie und für jedes $x \in X$ ist $\theta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$ ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $U \subset X$ offen und sei $\mathcal{F}^+(U)$ die Menge der Funktion $s : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$, so daß für jedes $x \in U$ $s(x) \in \mathcal{F}_x$ gilt und eine offene Umgebung $V_x \subset U$ von x und ein $t \in \mathcal{F}(V)$ existiert, so daß $t_y = s(y)$ für alle $y \in V$ gilt. Mit dieser Definition ist es leicht zu sehen, daß \mathcal{F}^+ eine Garbe ist. Wir definieren den Prägarbenmorphismus $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ indem wir $s \in \mathcal{F}(U)$ auf die Abbildung $x \mapsto s_x$ schicken. Daraus folgt, daß für alle $x \in X$ die Abbildung $\theta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^+$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist für eine Garbe \mathcal{G} der Morphismus $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^+$ wegen Lemma 2.4 ein Isomorphismus.

Der Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induziert einen Morphismus $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$. Dies liefert für jedes offene $U \subset X$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\theta(U)} & \mathcal{F}^+(U) \\ \varphi(U) \downarrow & & \downarrow \varphi^+(U) \\ \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\theta(U)} & \mathcal{G}^+(U) \end{array}$$

Wir definieren $\varphi'(U)$ durch $\theta(U)^{-1} \circ \varphi^+(U)$. Dies liefert einen Garbenmorphismus φ' mit $\varphi' \circ \theta = \varphi$. Die Eindeutigkeit von φ' folgt aus 2.4 1. . \square

Theorem 2.6. *Die Kategorie $\mathfrak{Sh}(X)$ der Garben auf einem topologischen Raum X ist eine abelsche Kategorie.*

Beweis. Sei $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. Seien $\ker(\varphi)$ und $\text{cok}(\varphi)$ der Kern bzw. Kokern in der Kategorie der Prägarben. Es ist leicht zu sehen, daß $\ker(\varphi)$ eine Garbe ist und daß $\ker(\varphi) \rightarrow \mathcal{F}$ die universelle Eigenschaft des Kerns erfüllt (siehe (1.2.1)). Definiere $\text{Cok}(\varphi) := \text{cok}(\varphi)^+$. Wir müssen zeigen, daß der zusammengesetzte Morphismus $\mathcal{G} \rightarrow \text{cok}(\varphi) \rightarrow \text{Cok}(\varphi)$ die universelle Eigenschaft (1.2.2) erfüllt. Sei $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Morphismus von Garben, s.d. $\psi \circ \varphi = 0$. Betrachte folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} & \longrightarrow & \text{cok}(\varphi) & \longrightarrow & \text{Cok}(\varphi) \\ & \searrow & \downarrow \psi & & \swarrow \exists! \alpha & & \swarrow \exists! \beta \\ & & \mathcal{H} & & & & \end{array}$$

0 $\xrightarrow{\quad}$ \mathcal{H}

wobei α wegen der universellen Eigenschaft des Kokerns in der Kategorie der Prägarben existiert und β wegen Proposition 2.5. Es bleibt zu zeigen, daß die kanonische Faktorisierung (1.2.2)

$$\mathcal{F} \longrightarrow \text{Coim}(\varphi) \xrightarrow{\varphi'} \text{Im}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{G}$$

ein Isomorphismus ist. Da der Halm-Funktor exakt ist erhalten wir

$$\mathcal{F}_x \longrightarrow \text{Coim}(\varphi_x) \xrightarrow{\varphi'_x} \text{Im}(\varphi_x) \longrightarrow \mathcal{G}_x \tag{2.0.7}$$

Da φ'_x ein Isomorphismus für alle $x \in X$ ist, folgt die Behauptung aus 2.4 3. . \square

Proposition 2.7. *Die Sequenz von Garben*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

ist exakt genau dann wenn die Sequenzen

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x$$

für alle $x \in X$ exakt sind.

Beweis. Die Hinrichtung folgt aus der Tatsache, dass der Halmfunctor exakt ist. Um die Rückrichtung zu zeigen, beobachten wir, dass die Sequenz $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ genau dann exakt ist, wenn die folgenden Sequenzen Komplexe sind:

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \tag{2.0.8}$$

$$\ker(\psi) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \text{Cok}(\varphi) \tag{2.0.9}$$

Sind nun alle Sequenzen (2.0.7) exakt, dann sind für alle $x \in X$ die Sequenzen $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$ und $\ker(\psi)_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \text{Cok}(\varphi)_x$ Komplexe und wegen Lemma 2.4 1. sind dann auch die Sequenzen (2.0.8) und (2.0.9) Komplexe. \square

Korollar 2.8. *Der Vergarbungsfunktor $+$: $\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X) \rightarrow \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X)$ ist exakt.*

Beweis. Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Prägarben. Die Exaktheit der Sequenz der assoziierten Garben $0 \rightarrow \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+ \rightarrow \mathcal{H}^+ \rightarrow 0$ folgt dann unmittelbar aus Proposition 2.5 und Proposition 2.7. \square

2.1 Funktoren auf $\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X)$

In diesem Abschnitt möchten wir gewisse Funktoren auf der Kategorie der Garben einführen. Sei $R\text{-Mod}$ die abelsche Kategorie der R -Moduln.

Definition 2.9. *Sei \mathcal{F} eine Garbe auf X und $U \subset X$ offen. Definiere den **Schnittfunktor** $\Gamma(U, -) : \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X) \rightarrow R\text{-Mod}$ durch*

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$$

*Die Elemente von $\Gamma(X, \mathcal{F})$ heißen **globale Schnitte**.*

Bemerkung 2.10. *Der Schnittfunktor $\Gamma(U, -)$ ist linksexakt. Dies folgt direkt aus der Konstruktion des Kerns (siehe (2.0.6) und Theorem 2.6). Im allgemeinen ist $\Gamma(U, -)$ aber nicht exakt. Sei $X = \mathbb{C}^*$ mit Koordinate z und \mathcal{O}_X die Garbe der holomorphen Funktionen auf X und $\underline{\mathbb{C}}_X$ die konstante Garbe auf X . Betrachte die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Dies ist eine kurze exakte Sequenz, da für $x_0 \in X$ die Anwendung des Halmfunctors folgende kurze exakte Sequenz liefert:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\{z - x_0\} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z}} \mathbb{C}\{z - x_0\} \longrightarrow 0$$

Der Funktion $\frac{1}{z} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ liegt aber nicht im Bild von $\frac{\partial}{\partial z}$. Wir erhalten also nur folgende links-exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

Definition-Lemma 2.11. Sei

$$\mathcal{F}^\bullet : \dots \longrightarrow \mathcal{F}^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \mathcal{F}^n \xrightarrow{d^n} \mathcal{F}^{n+1} \longrightarrow \dots$$

ein Komplex von Garben. Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir die **n -te Kohomologie Garbe** als

$$\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^\bullet) := \ker(d^n) / \text{Im}(d^{n-1})$$

Die Garbe $\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^\bullet)$ ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$U \mapsto H^n \Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet)$$

Beweis. Seien $V \subset U$ offene Mengen von X die Restriktionsabbildung $\Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{F}^\bullet)$ liefert einen Morphismus von Komplexen von R -Moduln. Dies induziert Restriktionsabbildungen $H^n \Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet) \rightarrow H^n \Gamma(V, \mathcal{F}^\bullet)$ und zeigt, dass $U \mapsto H^n \Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet)$ tatsächlich eine Prägarbe liefert. Da $H^n \Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet) = \ker d^n(U) / \text{Im} d^{n-1}(U)$ gilt, ist diese Prägarbe die n -te Kohomologie des Komplexes \mathcal{F}^\bullet in der Kategorie der Prägarben. Da der Vergarbungsfunktor $+$ exakt ist, folgt die Behauptung. \square

Definition 2.12. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf X und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren

$$\Gamma(A, \mathcal{F}) := \lim_{U \supset A} \mathcal{F}(U)$$

Insbesondere gilt für $\{x\} \subset X$:

$$\Gamma(\{x\}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_x$$

Bemerkung 2.13. Seien $A \subset B \subset X$ beliebige Teilmengen und $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus, dann liefert die universelle Eigenschaft des direkten Limes eine Restriktionsabbildung

$$\Gamma(B, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{F})$$

sowie eine induzierte Abbildung

$$\varphi(A) : \Gamma(A, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(A, \mathcal{G})$$

und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(B, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi(B)} & \Gamma(B, \mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(A, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi(A)} & \Gamma(A, \mathcal{G}) \end{array}$$

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

Definition 2.14. Sei \mathcal{G} eine Garbe auf X . Das **direkte Bild** $f_* \mathcal{G}$ von \mathcal{G} unter der Abbildung f wird definiert durch:

$$U \mapsto f_* \mathcal{G}(U) := \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \quad U \text{ offen in } X$$

Für $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gilt offensichtlich:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Wir bezeichnen mit $a_X : X \rightarrow \{pt\}$ die Abbildung von X auf die Menge mit einem Element. Dann gilt

$$\Gamma(X, \mathcal{G}) = \Gamma(\{pt\}, a_{X*} \mathcal{G}) \simeq a_{X*} \mathcal{G}$$

d.h. der Schnittfunktor ist nur ein Spezialfall des direkten Bild Funktors. Aus der Konstruktion des Kerns und der direkten Summe in der Kategorie der Garben folgt, dass der direkte Bild Funktor

$$f_* : \mathfrak{Sh}(X) \longrightarrow \mathfrak{Sh}(Y)$$

links-exakt und additiv ist.

Definition 2.15. Sei \mathcal{G} eine Garbe auf Y . Das *inverse Bild* $f^{-1}\mathcal{G}$ von \mathcal{G} unter der Abbildung f ist die zu folgender Prägarbe assoziierte Garbe:

$$U \mapsto \lim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

Sei $h : A \rightarrow X$ eine Teilmenge von X . Wir definieren für $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$

$$\mathcal{F}|_A := h^{-1}\mathcal{F}$$

Sei $V \subset Y$ offen und $t \in \Gamma(V, \mathcal{G})$. Die Halme von t definieren einen Schnitt von $f^{-1}\mathcal{G}$ über $f^{-1}(V)$, d.h. wir erhalten eine Adjunktionsabbildung

$$\Gamma(V, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V), f^{-1}\mathcal{G})$$

die mit Einschränkungen $V \supset U$ kompatibel ist, dies liefert den Garbenmorphismus

$$a : \mathcal{G} \longrightarrow f_* f^{-1}\mathcal{G} \tag{2.1.1}$$

Theorem 2.16. Der Funktor f^{-1} ist zum Funktor f_* links-adjungiert, d.h.

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{H})$$

Beweis. Wir definieren zuerst eine Abbildung $\Theta : \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{H})$.

Sei $\varphi : f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ gegeben. Indem wir den Funktor f_* auf φ anwenden, erhalten wir

$$f_*\varphi : f_* f^{-1}\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{H}$$

Wir definieren dann $\psi := \Theta(\varphi) := f_*\varphi \circ a$. Wir zeigen zuerst, dass Θ injektiv ist. Dafür betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\psi(V)} & \Gamma(V, f_*\mathcal{H}) \\ \downarrow a(V) & & \downarrow = \\ \Gamma(f^{-1}(V), f^{-1}\mathcal{G}) & \xrightarrow{\varphi(f^{-1}(V))} & \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{H}) \end{array} \tag{2.1.2}$$

Sei jetzt $x \in X$ fest gewählt und bilde den direkten Limes über alle offenen Umgebungen V von $f(x)$. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{f(x)} & \xrightarrow{\psi_{f(x)}} & (f_*\mathcal{H})_{f(x)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(f^{-1}(f(x)), f^{-1}\mathcal{G}) & \xrightarrow{\varphi(f^{-1}(f(x)))} & \Gamma(f^{-1}(f(x)), \mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f^{-1}\mathcal{G})_x & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{H}_x \end{array}$$

Dabei folgt die Kommutativität des oberen Rechtecks aus der Kommutativität von (2.1.2) und die des unteren Rechteck mit Bemerkung 2.13. Die Verknüpfung der beiden linken vertikalen Morphismen ist wegen (2.1.4) ein Isomorphismus. Daraus folgt, dass φ_x durch $\psi_{f(x)}$ eindeutig festgelegt ist. Die Tatsache, dass Θ injektiv ist, folgt dann aus Lemma 2.4 1. .

Es bleibt die Surjektivität von Θ zu zeigen. Sei also ein $\psi : \mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{H}$ gegeben. Wir müssen für jedes $U \subset X$ einen Homomorphismus $\Gamma(U, f^{-1}\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$ konstruieren, der kompatibel mit der Restriktionssabbildung ist. Sei $\tilde{\mathcal{G}}$ die Prägarbe

$$\tilde{\mathcal{G}}(U) := \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

deren assoziierte Garbe $f^{-1}(\mathcal{G})$ ist. Da ψ ein Garbenmorphismus ist, erhalten wir für $V_2 \subset V_1$ offen, das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V_1) & \xrightarrow{\psi(V_1)} & f_*\mathcal{H}(V_1) = \Gamma(f^{-1}(V_1), \mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(V_2) & \xrightarrow{\psi(V_2)} & f_*\mathcal{H}(V_2) = \Gamma(f^{-1}(V_2), \mathcal{H}) \end{array} \quad (2.1.3)$$

$\Gamma(U, \mathcal{H})$

Wegen der universellen Eigenschaft des direkten Limes erhalten wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V_1) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}(V_2) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Gamma(U, \tilde{\mathcal{G}}) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) & \\ & \downarrow & \\ & \Gamma(U, \mathcal{H}) & \end{array}$$

Wir müssen zeigen, dass die Abbildung

$$\tilde{\varphi}(U) : \Gamma(U, \tilde{\mathcal{G}}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$$

einen Prägarbenhomomorphismus definiert. Für ein $U \subset X$ offen bezeichnen wir mit $(\mathcal{G}(V))_{V \supset f(U)}$ das zugehörige gerichtete System. Für offene $U_1 \subset U_2$ erhalten wir folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}(V))_{V \supset f(U_1)} & \longrightarrow & \Gamma(U_1, \mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{G}(V))_{V \supset f(U_2)} & \longrightarrow & \Gamma(U_2, \mathcal{H}) \end{array}$$

Das Diagramm faktorisiert über die entsprechenden Limiten und wir erhalten wegen der universellen Eigenschaft des direkten Limes:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}(V))_{V \supset f(U_1)} & \xrightarrow{b} & \varinjlim_{V \supset f(U_1)} \mathcal{G}(V) \xrightarrow{\tilde{\varphi}(U_1)} \Gamma(U_1, \mathcal{H}) \\ \downarrow d & & \downarrow e \\ (\mathcal{G}(V))_{V \supset f(U_2)} & \xrightarrow{g} & \varinjlim_{V \supset f(U_2)} \mathcal{G}(V) \xrightarrow{\tilde{\varphi}(U_2)} \Gamma(U_2, \mathcal{H}) \\ & & \downarrow f \\ & & \Gamma(U_2, \mathcal{H}) \end{array}$$

c (top arrow), k (bottom arrow)

Wir haben $f \circ \tilde{\varphi}(U_1) \circ b = f \circ c = k \circ d = h \circ g \circ d = \tilde{\varphi}(U_2) \circ e \circ b$ und wegen der universellen Eigenschaft des direkten Limes $f \circ \tilde{\varphi}(U_1) = \tilde{\varphi}(U_2) \circ e$.

Aus der universellen Eigenschaft der Vergarbung erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{G} \\ & \searrow \tilde{\varphi} & \downarrow \varphi \\ & & \mathcal{H} \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der so konstruierte Morphismus φ die Gleichung $\psi = f_*\varphi \circ a$ erfüllt. Wir beobachten zuerst, dass wegen

$$\mathcal{G}(V) \simeq \tilde{G}(f^{-1}(V)) = \varinjlim_{V' \subset f^{-1}(V)} \mathcal{G}(V')$$

ein Prägarbenisomorphismus $\rho : \mathcal{G} \rightarrow f_*\tilde{G}$ existiert. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{a} & f_*f^{-1}\mathcal{G} & \xrightarrow{f_*\varphi} & f_*\mathcal{H} \\ & \searrow \rho & \uparrow & \nearrow f_*\tilde{\varphi} & \\ & & f_*\tilde{G} & & \end{array}$$

Wegen (2.1.3) gilt $\psi(V) = (f_*\tilde{\varphi} \circ \rho)(V) = (f_*\varphi \circ a)(V)$. Dies zeigt, dass Θ surjektiv ist. \square

Korollar 2.17. Für $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Beweis. Aus Theorem 2.16 folgt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X)}(f^{-1}g^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{H}) &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y)}(g^{-1}\mathcal{G}, f_*\mathcal{H}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Z)}(\mathcal{G}, g_*f_*\mathcal{H}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Z)}(\mathcal{G}, (g \circ f)_*\mathcal{H}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X)}((g \circ f)^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann aus dem Yoneda-Lemma. \square

Korollar 2.18. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, $x \in X$ und $\mathcal{G} \in \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X, R)$. Dann gilt

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x \simeq \mathcal{G}_{f(x)} \quad (2.1.4)$$

Beweis. Betrachte folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \{pt\} & \xrightarrow{i_x} & X \\ & \searrow i_{f(x)} & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

wobei $i_x(pt) = x$ etc. Für eine Garbe \mathcal{H} auf X gilt per Definition $i_x^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{H}_x$. Wir folgern also mit Korollar 2.17:

$$\mathcal{G}_{f(x)} = i_{f(x)}^{-1}\mathcal{G} \simeq (f \circ i_x)^{-1}\mathcal{G} \simeq i_x^{-1}f^{-1}\mathcal{G} = (f^{-1}\mathcal{G})_x$$

\square

Korollar 2.19. *Der Funktor $f^{-1} : \mathfrak{Sh}(Y, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(X, R)$ ist exakt.*

Beweis. Sei $0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H} \xrightarrow{\psi} \mathcal{K} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben. Nach Proposition 3.9 ist die Sequenz exakt genau dann wenn die Sequenzen $0 \rightarrow \mathcal{G}_y \xrightarrow{\varphi_y} \mathcal{H}_y \xrightarrow{\psi_y} \mathcal{K}_y \rightarrow 0$ für alle $y \in Y$ exakt sind. Aus dem Beweis von Korollar 2.18 folgt dann, dass

$$0 \longrightarrow (f^{-1}\mathcal{G})_x \xrightarrow{(f^{-1}\varphi)_x} (f^{-1}\mathcal{H})_x \xrightarrow{(f^{-1}\psi)_x} (f^{-1}\mathcal{K})_x \longrightarrow 0$$

für alle $x \in X$ exakt sind. Die erneute Anwendung von Proposition 2.7 liefert dann die Aussage. \square

Korollar 2.20. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{G} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$, dann existiert ein natürlicher Adjunktionsmorphismus*

$$b : f^{-1}f_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

Beweis. Der Morphismus b ist das Urbild von $id_{f_*\mathcal{G}}$ unter dem Adjunktionsisomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(f^{-1}f_*\mathcal{G}, \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y)}(f_*\mathcal{G}, f_*\mathcal{G})$$

\square

Korollar 2.21. *Der Funktor $f_* : \mathfrak{Sh}(X) \rightarrow \mathfrak{Sh}(Y)$ bildet injektive Garben auf injektive Garben ab.*

Beweis. Sei \mathcal{I} eine injektive Garbe auf X , d.h. der Funktor $\text{Hom}(-, \mathcal{I})$ ist exakt. Da f^{-1} ein exakter Funktor ist, folgt, dass der Funktor $\mathcal{G} \mapsto \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{I}) \simeq \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{I})$ auch exakt ist, d.h. $f_*\mathcal{I}$ ist injektiv. \square

Wir möchten jetzt zeigen, dass die Kategorie $\mathfrak{Sh}(X)$ genügend viele injektive Objekte hat. Dafür brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.22. *Die Kategorie der R -Moduln $R\text{-Mod}$ hat genügend viele injektive Objekte.*

Beweis. Siehe Appendix Proposition 7.7. \square

Theorem 2.23. *Die Kategorie $\mathfrak{Sh}(X)$ hat genügend viele injektive Objekte.*

Beweis. Wir zeigen das Resultat zuerst in dem Fall das X die diskrete Topologie trägt. Sei also $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathfrak{Sh}(X))$. Wegen Lemma 2.22 gibt es für jedes $x \in X$ einen Monomorphismus $F_x \rightarrow I_x$ wobei I_x ein injektives Objekt in $R\text{-Mod}$ ist. Die Garbe $\mathcal{I} := \prod_{x \in X} I_x$ definiert eine injektive Garbe auf X und $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ ist wegen 2.4 2. ein Monomorphismus.

Sei nun X ein allgemeiner topologischer Raum. Wir bezeichnen mit \hat{X} den Raum X versehen mit der diskreten Topologie und $f : \hat{X} \rightarrow X$ die kanonische Einbettung. Sei $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathfrak{Sh}(X))$. Wir haben gezeigt, dass eine injektive Garbe \mathcal{I} auf \hat{X} und einen Monomorphismus $f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ existiert. Indem wir den linksexakten Funktor f_* anwenden erhalten wir zusammen mit der Adjunktionsabbildung (2.1.1) den Morphismus

$$\mathcal{F} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{I}$$

Die Anwendung des Halmfunktors zusammen mit Lemma 2.4 2. zeigt, daß der Morphismus ein Monomorphismus ist. Da wegen Korollar 2.21 $f_*\mathcal{I}$ auch injektiv ist, zeigt dies die Behauptung. \square

Definition 2.24. *Sei X ein topologischer Raum und R ein kommutativer Ring mit 1. Wir bezeichnen mit $\mathbf{D}(X, R)$ die derivierte Kategorie der Kategorie der Garben von R -Moduln. Die entsprechenden derivierten Kategorien von (links bzw. rechts) beschränkten Komplexen bezeichnen wir mit $\mathbf{D}^*(X, R)$ für $* = +, -, b$.*

Definition 2.25. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Das *derivierete direkte Bild*

$$Rf_* : D^+(X, R) \rightarrow D^+(Y, R)$$

ist der derivierte Funktor von f_*

Definition 2.26. Sei $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$. Die k -te **Garbenkohomologie** von \mathcal{F} ist

$$H^k(X, \mathcal{F}) := H^k(R\Gamma(\mathcal{F}))$$

Sei $\mathcal{G} \in \mathbf{C}^+(\mathfrak{Sh}(X, R))$ ein Komplex von Garben. Die k -te **Hyperkohomologie** ist

$$\mathbb{H}^k(X, \mathcal{G}) := H^k(R\Gamma(\mathcal{G}))$$

Proposition 2.27. Sei $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow z$ stetige Abbildungen, dann gilt

$$R(g \circ f)_* = Rg_* \circ Rf_*$$

Insbesondere gilt für $\mathcal{F} \in D^+(X, R)$

$$\mathbb{H}^k(Y, Rf_*\mathcal{F}) \simeq \mathbb{H}^k(X, \mathcal{F})$$

Beweis. Das folgt aus der Tatsache, dass das direkte Bild injektive Garben auf injektive Garben abbildet (Korollar 2.21) und Proposition 1.59. \square

Lemma 2.28. Sei $\mathcal{G} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung f induziert eine natürliche Pull-back Abbildung:

$$f^* : H^*(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow H^*(X, f^{-1}\mathcal{G})$$

Beweis. Sei $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}$ eine injektive Auflösung von \mathcal{G} und $f^{-1}\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ eine injektive Auflösung von $f^{-1}\mathcal{I}$. Da f^{-1} exakt ist, ist \mathcal{J} eine injektive Auflösung von $f^{-1}\mathcal{G}$. Der Adjunktionsmorphismus $\mathcal{I} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{I}$ liefert

$$\Gamma(Y, \mathcal{I}) \rightarrow \Gamma(X, f^{-1}\mathcal{I}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J})$$

Die liefert die gesuchte Pull-back Abbildung. \square

Proposition 2.29. Sei \mathcal{G} eine Garbe auf X . Das k -te derivierte direkte Bild

$$R^k f_* \mathcal{G} := H^k(Rf_* \mathcal{G})$$

ist die assoziierte Garbe zur Prägarbe

$$V \mapsto H^k(f^{-1}(V), \mathcal{G})$$

Beweis. Sei \mathcal{I} eine injektive Auflösung von \mathcal{G} . Es gilt $R^k f_* \mathcal{G} = \mathcal{H}^k f_* \mathcal{I}$. Wegen Lemma 2.11 ist $R^k f_* \mathcal{G}$ die assoziierte Garbe zur Prägarbe ($V \mapsto H^k \Gamma(V, f_* \mathcal{I})$). Es gilt

$$H^k \Gamma(V, f_* \mathcal{I}) = H^k \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{I}) = H^k(f^{-1}(V), \mathcal{G})$$

\square

2.1.1 Abgeschlossene Einbettungen

Sei $i : Z \rightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge in X . Sei \mathcal{F} eine Garbe auf Z , dann gilt

$$(i_*E)_x = \varinjlim_{x \in U} \Gamma(U \cap Z, \mathcal{F})$$

Daraus folgt sofort

$$(i_*E)_x = \begin{cases} E_x & \text{für } x \in Z \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus Z \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Wir erhalten folgende Aussagen.

Lemma 2.30.

1. Der Funktor $i_* : \mathfrak{Sh}(Z, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(X, R)$ ist exakt.
2. $i^{-1}i_*\mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}$ für $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(Z, R)$
3. $H^*(X, i_*\mathcal{F}) \simeq H^*(Z, \mathcal{F})$ für $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(Z, R)$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus (2.1.5) und Proposition 2.7. Aufgrund von Korollar 2.20 haben wir einen Morphismus $i^{-1}i_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Wegen (2.1.4) und (2.1.5) ist der Morphismus ein Isomorphismus. Für die dritte Aussage wählen wir eine injektive Auflösung $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$. Der Funktor i_* liefert dann eine injektive Auflösung $i_*\mathcal{F} \rightarrow i_*\mathcal{I}$. Es gilt

$$\Gamma(X, i_*\mathcal{I}) \xrightarrow{=} \Gamma(Z, \mathcal{I})$$

was die dritte Behauptung zeigt. Alternativ, folgt die dritte Behauptung direkt aus Proposition 2.27. \square

Der Adjunktionsmorphismus $\mathcal{F} \rightarrow i_*i^{-1}\mathcal{F}$ hat folgende universelle Eigenschaft.

Lemma 2.31. Sei $i : Z \rightarrow X$ die Einbettung einer abgeschlossenen Teilmenge und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$, s.d. $(\mathcal{G})_x = 0$ für $x \in X \setminus Z$. Jeder Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ hat eine eindeutige Faktorisierung über $a : \mathcal{F} \rightarrow i_*i^{-1}\mathcal{F}$.

Beweis. Betrachte folgendes kommutative Diagramm in $\mathfrak{Sh}(X, R)$ (prüfe Kommutativität halmweise):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{a} & i_*i^{-1}\mathcal{F} \\ f \downarrow & & \downarrow i_*i^{-1}f \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{a'} & i_*i^{-1}\mathcal{G} \end{array}$$

Durch Lokalisierung folgt, dass a' ein Isomorphismus ist. Setzt man $g := (a')^{-1} \circ i_*i^{-1}f$ liefert $f = g \circ a$ eine Faktorisierung von f . Durch Lokalisierung folgt wiederum, dass der Adjunktionsabbildung $a : \mathcal{F} \rightarrow i_*i^{-1}\mathcal{F}$ ein Epimorphismus ist. Dies zeigt, dass g eindeutig ist. \square

2.1.2 Lokal abgeschlossene Einbettungen

Definition 2.32. Sei $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ und $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Der Träger $\text{supp}(s)$ von s ist definiert als

$$\text{supp}(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$$

Der Träger von s ist abgeschlossen in U .

Definition-Lemma 2.33. Ein Teilmenge $W \subset X$ heißt lokal abgeschlossen, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingung erfüllt ist

1. $W = U \cap Z$ für U offen und Z abgeschlossen
2. jedes $x \in W$ besitzt eine offene Umgebung V_x , so dass $V_x \cap W$ abgeschlossen in W ist.
3. W ist offen in \overline{W} .

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Setze $V = U$.

(2) \Rightarrow (3): Wir zeigen zuerst, dass $V_x \cap W = V_x \cap \overline{W}$. Es gilt $W = (V_x \cap W) \cup ((X \setminus V_x) \cap W)$, also auch $\overline{W} = \overline{(V_x \cap W)} \cup \overline{((X \setminus V_x) \cap W)}$. Da V_x offen in X ist, gilt $\overline{((X \setminus V_x) \cap W)} \subset X \setminus V_x$ und damit $V_x \cap \overline{((X \setminus V_x) \cap W)} = \emptyset$. Wir erhalten somit $\overline{W} \cap V_x = \overline{W} \cap \overline{V_x} = W \cap V_x$. Das bedeutet jeder Punkt $x \in W$ hat eine offene Umgebung $V_x \cap \overline{W}$ in \overline{W} die in W enthalten ist. Also ist W in \overline{W} offen.

(3) \Rightarrow (1): Da W offen in $Z = \overline{W}$ ist existiert eine offene Menge U mit $U \cap Z = W$. \square

Sei $h : W \rightarrow X$ ein lokal abgeschlossener Unterraum.

Definition-Lemma 2.34. 1. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf W . Dann ist $h_! \mathcal{F}$ eine Garbe auf X deren Schnitte über der offenen Menge $U \subset X$ durch

$$\Gamma(U, h_! \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(W \cap U, \mathcal{F}) \mid \text{Supp}(s) \text{ ist abgeschlossen in } U\}$$

gegeben.

2. Es existiert ein kanonischer Monomorphismus $h_! \mathcal{F} \rightarrow h_* \mathcal{F}$.

Beweis. Wir beachten zuerst, dass $\Gamma(U, h_! \mathcal{F}) \subset \Gamma(U, h_* \mathcal{F})$ gilt. Die Restriktionsabbildung $\Gamma(U, h_! \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(V, h_! \mathcal{F})$ für $V \subset U$ offen wird dann von den Restriktionsabbildungen von $h_* \mathcal{F}$ induziert, d.h. $h_! \mathcal{F}$ ist eine Unterprägarbe von $h_* \mathcal{F}$. Wir zeigen, dass $h_! \mathcal{F}$ eine Garbe ist. Sei $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ eine offene Überdeckung von U und $s_i \in \Gamma(U_i, h_! \mathcal{F})$ gegeben, s.d. $\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$. Da $h_* \mathcal{F}$ eine Garbe ist, existiert ein Schnitt $s \in \Gamma(U, h_* \mathcal{F})$ mit $\rho_{U, U_i}(s) = s_i$. Wir müssen zeigen, dass $\text{supp}(s)$ abgeschlossen in U ist. Wegen $\rho_{U, U_i}(s) = s_i$ ist $\text{supp}(s) \cap U_i$ abgeschlossen in U_i , d.h. $U_i \setminus \text{supp}(s)$ ist offen in U_i und damit auch offen in U . Dann ist $U \setminus \text{supp}(s) = \bigcup_i U_i \setminus \text{supp}(s)$ offen in U . \square

Lemma 2.35. Die Halme von $h_! \mathcal{F}$ sind

$$(h_! \mathcal{F})_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{für } x \in W \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus W \end{cases}$$

Insbesondere ist der Funktor $h_! : \mathfrak{Sh}(W, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(X, R)$ exakt.

Beweis. Sei $x \in X \setminus W$ und $s_x \in (h_! \mathcal{F})_x$. Es existiert eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \Gamma(U, h_! \mathcal{F})$, s.d. $\rho_{U, x}(s) = s_x$. Der Schnitt s kommt von einem Schnitt \tilde{s} aus $\Gamma(U \cap W, \mathcal{F})$ dessen Träger $\text{supp}(\tilde{s}) \subset U \cap W$ abgeschlossen in U ist. Das Komplement $A = \text{supp}(\tilde{s})^c$ von $\text{supp}(\tilde{s})$ in U ist offen in U und es gilt $x \in A$. Die Halmabbildung $\rho_{U, x} : \Gamma(U, h_! \mathcal{F}) \rightarrow (h_! \mathcal{F})_x$ faktorisiert dann über $\Gamma(A, h_! \mathcal{F})$. Es gilt aber wegen $A = (\text{supp}(\tilde{s}))^c$, dass $\rho_{U, A}(s) = 0$, also $s_x = 0$.

Sei jetzt $x \in W = V \cap Z$ mit V offen und Z abgeschlossen. Der Monomorphismus $h_! \mathcal{F} \rightarrow h_* \mathcal{F}$ liefert einen Monomorphismus

$$(h_! \mathcal{F})_x \rightarrow (h_* \mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x.$$

Sei $s_x \in \mathcal{F}_x$. Es existiert eine offene Umgebung U von x in X und ein $s \in \Gamma(U \cap W, \mathcal{F})$, s.d. $\rho_{U \cap W, x}(s) = s_x$. Indem wir U mit $U \cap V$ ersetzen, können wir oBdA annehmen, dass W abgeschlossen in U ist. Sei A eine abgeschlossene Menge in U mit $\text{supp}(s) = W \cap A$. Dann ist $\text{supp}(s)$ abgeschlossen in U und daher $s \in \Gamma(U, h_! \mathcal{F})$ und damit $s_x \in (h_! \mathcal{F})_x$. \square

Proposition 2.36. *Der Funktor $h_! : \mathfrak{Sh}(W, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(X, R)$ liefert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie $\mathfrak{Sh}(W, R)$ und der vollen Unterkategorie von $\mathfrak{Sh}(X, R)$ von Garben \mathcal{F} mit*

$$\mathcal{F}_x = 0 \quad \text{für alle } x \in X \setminus W$$

Der inverse Funktor wird durch h^{-1} induziert.

Beweis. Sei \mathcal{G} eine Garbe auf W . Der Adjunktionsmorphismus $h^{-1}h_*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ liefert einen Garbenmorphismus $h^{-1}h_!\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. Wegen Lemma 2.35 ist dies ein Isomorphismus.

Sei jetzt \mathcal{F} eine Garbe auf X deren Halme außerhalb von W verschwinden. Der Adjunktionsmorphismus $\mathcal{F} \rightarrow h_*h^{-1}\mathcal{F}$ faktorisiert über den Monomorphismus von Definition-Lemma 2.34 2. , da jeder Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ abgeschlossenen Träger in U hat (siehe Definition 2.32). Wegen Lemma 2.35 liefert das den Isomorphismus $\mathcal{F} \rightarrow h_!h^{-1}\mathcal{F}$. \square

Proposition 2.37. *Der Funktor $h_! : \mathfrak{Sh}(W, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(X, R)$ hat einen rechts-adjugierten Funktor $h^! : \mathfrak{Sh}(X, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(W, R)$, d.h.*

$$\text{Hom}(h_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{F}, h^!\mathcal{G})$$

für Garben \mathcal{F} auf W und \mathcal{G} auf X .

Beweis. Sei \mathcal{G} eine Garbe auf X und sei \mathcal{G}^W die Garbe auf X deren Schnitte über U wie folgt gegeben sind

$$\Gamma(U, \mathcal{G}^W) = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{G}) \mid \text{supp}(s) \subset W\}$$

Definiere

$$h^!\mathcal{G} := h^{-1}\mathcal{G}^W$$

Da $(\mathcal{G}^W)_x = 0$ für $x \in X \setminus W$ folgt aus Proposition 2.36, dass

$$\Gamma(U, h_!h^!\mathcal{G}) = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{G}) \mid \text{supp}(s) \subset W\} \quad (2.1.6)$$

Wir erhalten einen Monomorphismus $h_!h^!\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. Aus Formel (2.1.6) folgt, dass jeder Morphismus $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$, wobei \mathcal{H} eine Garbe auf X ist, deren Halme außerhalb von W verschwinden, über den Monomorphismus $h_!h^!\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ faktorisiert. Für eine Garbe \mathcal{F} auf W erhalten wir daher

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(h_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(h_!\mathcal{F}, h_!h^!\mathcal{G})$$

Wegen Proposition 2.36 haben wir den Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(W, R)}(\mathcal{F}, h^!\mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X, R)}(h_!\mathcal{F}, h_!h^!\mathcal{G})$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.38. *Der Funktor $h^!$ existiert nur für lokal-abgeschlossene Einbettungen $h : W \rightarrow X$ auf dem Niveau der Garben . Möchte man $f^!$ für beliebige stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ definieren, muss man die derivierte Kategorie der Garben benutzen.*

Proposition 2.39. *Der Funktor $h^! : \mathfrak{Sh}(X, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(W, R)$ ist links-exakt und bildet injektive Garben auf injektive Garben ab.*

Beweis. Die Links-Exaktheit ist eine formale Konsequenz die aus der Existenz des Links-adjungierten Funktors $h_!$ folgt. Für die zweite Aussage müssen wir zeigen, dass der Funktor $\text{Hom}(-, h^!\mathcal{G}) = \text{Hom}(h_!-, \mathcal{G})$ für injektives \mathcal{G} exakt ist. Dies folgt aber aus der Tatsache, dass $h_!$ exakt ist. \square

Lemma 2.40. 1. *Sei $i : Z \rightarrow X$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann gilt $i_! = i_*$*

2. *Sei $j : U \rightarrow X$ eine offene Teilmenge, dann gilt $j^{-1} = j^!$.*

Beweis. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf Z . Wegen Prop 2.34 2. existiert ein Morphismus $i_! \mathcal{F} \rightarrow i_* \mathcal{F}$. Dies ist wegen Formel (2.1.5) und Lemma 2.35 ein Isomorphismus.

Sei jetzt \mathcal{G} eine Garbe auf X . Es gilt $j^! \mathcal{G} = j^{-1} \mathcal{G}^W$. Die Inklusion $\mathcal{G}^W \rightarrow \mathcal{G}$ liefert dann einen Monomorphismus $j^! \mathcal{G} \rightarrow j^{-1} \mathcal{G}$. Man überprüft über die Halme, dass dies ein Isomorphismus ist. \square

Korollar 2.41. *Sei $j : U \rightarrow X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge. Der Funktor j^{-1} bildet injektive Garben auf injektive Garben ab.*

Beweis. Dies folgt aus $j^! = j^{-1}$ und Proposition 2.39. \square

Korollar 2.42. *Sei $U \subset X$ offen und $Z = X \setminus U$ das abgeschlossene Komplement und \mathcal{G} eine Garbe auf X . Dann liefern die Adjunktionsabbildungen die exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow j_! j^{-1} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow i_* i^{-1} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

Beweis. Die erste Abbildung ist die Adjunktionsabbildung $j_! j^{-1} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ (benutze $j^! = j^{-1}$). Die Exaktheit folgt halmweise. \square

Für eine lokal abgeschlossene Menge $W \subset X$ und eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ definieren wir

$$\mathcal{F}_W := h_! h^{-1} \mathcal{F}$$

Proposition 2.43. *Seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Mengen mit Komplement U, V . Wir haben folgendes exakte Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_{U \cap V} & \longrightarrow & \mathcal{F}_U \oplus \mathcal{F}_V & \longrightarrow & \mathcal{F}_{U \cup V} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} & \xrightarrow{(1 \ -1)} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_{A \cup B} & \longrightarrow & \mathcal{F}_A \oplus \mathcal{F}_B & \longrightarrow & \mathcal{F}_{A \cap B} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Beweis. Die der Abbildung folgt aus der Existenz der Adjunktionsabbildungen $j_! j^{-1} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ für offene Einbettungen j bzw. $\mathcal{G} \rightarrow i_! i^{-1} \mathcal{G}$ für abgeschlossene Einbettungen i . \square

2.1.3 Welche Auflösungen

Definition 2.44. *Eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ heißt **welk** (flabby) falls für jede offene Teilmenge $U \subset X$ die Restriktionsabbildung $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ surjektiv ist.*

Die folgenden Aussagen sind klar.

Lemma 2.45. *Sei \mathcal{F} eine welk Garbe auf X .*

1. *Sei $U \subset X$ offen, dann ist $\mathcal{F}|_U$ welk auf U .*
2. *Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig dann ist $f_*\mathcal{F}$ welk.*

Lemma 2.46. 1. *Sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathfrak{Sh}(X)$. Nehme an, dass \mathcal{F}' welk ist dann ist $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$ exakt.*

2. *Sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathfrak{Sh}(X, R)$. Nehme an \mathcal{F}' und \mathcal{F} sind welk, dann ist \mathcal{F}'' welk.*

Beweis. Sei $s'' \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ und sei P die partiell geordnete Menge von Paaren (U, s) mit $U \subset X$ offen und $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, s.d. s auf $s''|_U$ abgebildet wird, wobei $(U, s) \leq (V, t)$ wenn $U \subset V$ und $t|_U = s$. Die Garbenaxiome zeigen, dass jede aufsteigende Kette eine obere Schranke hat. Sei also (U, s) ein maximales Element und nehme an es gilt $U \neq X$. Sei $x \in X \setminus U$. Es existiert eine offene Menge V von x und ein Schnitt $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$, s.d. t auf $s''|_V$ abgebildet wird. Auf $U \cap V$ kommt $s - t$ von $\Gamma(U \cap V, \mathcal{F}')$. Da \mathcal{F}' per Annahme welk ist, existiert ein $r \in \Gamma(X, \mathcal{F}')$ mit $r|_{U \cap V} = (s - t)|_{U \cap V}$. Indem wir t mit $t - r$ ersetzen, können wir annehmen, dass $t = s$ auf $U \cap V$ gilt, d.h. s kann auf $U \cup V$ erweitert werden. Im Widerspruch zur Maximalität von U , also $U = X$.

Wir zeigen jetzt die zweite Aussage. Sei U offen in X . Im folgenden Diagramm sind α und β surjektiv:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}'') \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ \Gamma(U, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(U, \mathcal{F}'') \end{array}$$

Also ist auch γ surjektiv. □

Korollar 2.47. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Die volle Unterkategorie der welken Garben ist injektiv bzgl. der links-exakten Funktoren f_* und $\Gamma(X, -)$.*

Beweis. Die Aussage für $\Gamma(X, -)$ folgt direkt aus Lemma 2.46. Für den Funktor f_* beachten wir, dass $\Gamma(U, f_*\mathcal{G}) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{G})$ für eine Garbe \mathcal{G} auf X gilt. Die Behauptung folgt dann aus der Tatsache, dass $\mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}$ welk ist. □

Sei M ein R -Modul und $a : X \rightarrow \{pr\}$. Wir bezeichnen mit $\underline{M} := a^{-1}M$ die Garbe der lokal konstanten Funktion auf X mit Werten in M .

Lemma 2.48. *Sei M ein R -Modul und $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$. Dann gilt*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X, R)}(\underline{M}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_R(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$$

Insbesondere gilt

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X, R)}(\underline{R}, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F})$$

Beweis. Das folgt direkt aus Theorem 2.16 für $f = a$. □

Proposition 2.49. *Sei \mathcal{F} eine injektive Garbe, dann ist \mathcal{F} welk.*

Beweis. Sei $j : U \rightarrow X$ eine offene Teilmenge. Der Adjunktionsmorphismus $j_! j^{-1} \underline{R} \rightarrow \underline{R}$ ist ein Monomorphismus, wie man mit Lokalisierung leicht sehen kann (Lemma 2.35 und Formel (2.1.4)). Da \mathcal{F} injektiv ist, erhalten wir eine surjektive Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X,R)}(\underline{R}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X,R)}(j_! j^{-1} \underline{R}, \mathcal{F})$$

Der linke Term ist wegen Lemma 2.48 isomorph zu $\Gamma(X, \mathcal{F})$ und für den rechten Term gilt

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X,R)}(j_! j^{-1} \underline{R}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(U,R)}(j^{-1} \underline{R}, j^{-1} \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(U,R)}(\underline{R}, j^{-1} \mathcal{F}) = \Gamma(U, \mathcal{F})$$

□

Proposition 2.50. *Jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ hat eine Auflösung der Form*

$$\dots \rightarrow \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

wobei die \mathcal{P}_i direkte Summen von Garben der Form $j_! \underline{R}$ sind, wobei die $j : U \rightarrow X$ offene Teilmengen von X sind.

Beweis. Es genügt die Existenz eines Epimorphismus $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ zu zeigen, wobei \mathcal{P} eine Garbe von obigem Typ ist. Die Abbildung $j : U \rightarrow X$ liefert

$$\text{Hom}(j_! \underline{R}, \mathcal{F}) = \text{Hom}(\underline{R}, j^{-1} \mathcal{F}) = \Gamma(U, \mathcal{F})$$

Daraus folgt, dass ein $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ einen Garbenmorphismus $j_! \underline{R} \rightarrow \mathcal{F}$ liefert, der $1 \in \Gamma(U, j_! \underline{R})$ in $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ abbildet. Die Aussage folgt dann indem man sukzessive $j_! \underline{R}$ für variierendes U und s hinzufügt. □

2.1.4 Tensor-Produkte

Definition 2.51. *Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$. Das **Tensorprodukt** $\mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G}$ von \mathcal{F} und \mathcal{G} ist die Garbe die zur Prägarbe $(U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_R \mathcal{G}(U))$ assoziiert ist.*

Die Identitäten

$$\mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G} \simeq \mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{F} \quad \text{und} \quad (\mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G}) \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H} \simeq \mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} (\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H})$$

folgen aus den entsprechenden Eigenschaften für R -Moduln.

Lemma 2.52. *Für $x \in X$ gilt:*

$$(\mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G})_x \simeq \mathcal{F}_x \otimes_R \mathcal{G}_x$$

Insbesondere ist der Funktor $-\otimes_{\underline{R}}-$ rechts-exakt in jedem seiner Argumente.

Beweis. Wegen Proposition 2.5 reicht es die Aussage für die Prägarbe $(U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_R \mathcal{G}(U))$ zu zeigen. Die Aussage folgt dann unmittelbar aus der Vertauschbarkeit des induktiven Limes mit dem Tensor produkte von gerichteten Systemen von R -Moduln (Appendix Proposition ???). □

Lemma 2.53. *Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathfrak{Sh}(Y, R)$, dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$f^{-1} \mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} f^{-1} \mathcal{H} \simeq f^{-1} (\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H})$$

Beweis. Der Prägarbenmorphismus

$$\left(U \mapsto \lim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \otimes_R \lim_{V \supset f(U)} \mathcal{H}(V) \right) \longrightarrow \left(U \mapsto \lim_{V \supset f(U)} (\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H})(V) \right) \quad (2.1.7)$$

wir durch die Abbildungen

$$\mathcal{G}(V) \otimes_R \mathcal{H}(V) \longrightarrow (\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H})(V)$$

induziert. Die natürlichen Abbildungen von Prägarben

$$(U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)) \longrightarrow f^{-1}\mathcal{G}$$

$$(U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{H}(V)) \longrightarrow f^{-1}\mathcal{H}$$

liefern eine Sequenz von Prägarbenmorphismen

$$\left(U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \otimes_R \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{H}(V) \right) \rightarrow (U \mapsto (f^{-1}\mathcal{G})(U) \otimes_R (f^{-1}\mathcal{H})(U)) \rightarrow (f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} f^{-1}\mathcal{H})(U)$$

□

Wenn man die Halme vergleicht (benutze Lemma 2.52, Korollar 2.18 und die letzte Aussage von Proposition 2.5) sieht man, dass

$$\left(U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \otimes_R \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{H}(V) \right)^+ \simeq f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} f^{-1}\mathcal{H}$$

Indem man auch die rechte Seite von 2.1.7 vergarbt, erhält man den gewünschten Garbenmorphismus

$$f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} f^{-1}\mathcal{H} \longrightarrow f^{-1}(\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H})$$

Es bleibt zu zeigen, dass dies ein Isomorphismus ist. Sei $x \in X$ und $y = f(x)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} (f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} f^{-1}\mathcal{H})_x &\simeq (f^{-1}\mathcal{G})_x \otimes_R (f^{-1}\mathcal{H})_x \\ &\simeq \mathcal{G}_y \otimes_R \mathcal{H}_y \\ &\simeq (\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H})_y \\ &\simeq (f^{-1}(\mathcal{G} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{H}))_x \end{aligned}$$

Lemma 2.54. *Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ und $Z \subset X$ lokal abgeschlossen, dann gilt*

1. $\underline{R}_Z \otimes_{\underline{R}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_Z$
2. $\mathcal{F}_Z \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G}_Z$

Beweis. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der ersten:

$$\mathcal{F}_Z \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G} \simeq (\underline{R}_Z \otimes_{\underline{R}} \mathcal{F}) \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G} \simeq \mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} (\underline{R}_Z \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G}) \simeq \mathcal{F} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{G}_Z$$

Sei nun $h : Z \rightarrow X$ die kanonische Einbettung. Es gilt

$$h^{-1}(\underline{R}_Z \otimes_{\underline{R}} \mathcal{F}) \simeq h^{-1}\underline{R}_Z \otimes_{\underline{R}} h^{-1}\mathcal{F} \simeq \underline{R} \otimes_{\underline{R}} \mathcal{F}|_Z \simeq \mathcal{F}|_Z$$

Außerdem gilt $(\underline{R}_Z \otimes_{\underline{R}} \mathcal{F})|_{X \setminus Z} = 0$. Wegen Proposition 2.36 liefert dies die Behauptung. □

Definition 2.55. *Sei $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$. Die Garbe \mathcal{F} ist **flach**, falls der Funktor $- \otimes \mathcal{F} : \mathfrak{Sh}(X, R) \rightarrow \mathfrak{Sh}(X, R)$ exakt ist.*

Proposition 2.56. *Sei $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$. Es existiert ein Epimorphismus $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$, wobei \mathcal{P} flach ist.*

Beweis. Sei S die Familie von Paaren (U, s) , wobei $U \subset X$ offen in X und $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ ist. Für $(U, s) \in S$ sei $\underline{R}(U, s)$ die Garbe \underline{R}_U . Wir definieren:

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{(U,s) \in S} \underline{R}(U, s)$$

Sei $\underline{R}(U, s) = \underline{R}_U \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F}$ die Sequenz von Abbildungen, die den Schnitt $1 \in \Gamma(U, \underline{R}_U)$ auf den Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{F}_U)$ schickt. Dies definiert einen Garbenepimorphismus $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$. Die Garbe \mathcal{P} ist flach, da für jedes $x \in X$ der Halm \mathcal{P}_x ein freier R -Modul ist. \square

Proposition 2.57. *Sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathfrak{Sh}(X, R)$. Wenn \mathcal{F} und \mathcal{F}'' flach sind, dann ist auch \mathcal{F}' flach.*

Beweis. Dies folgt mit Lemma 2.52 sofort aus den entsprechenden Eigenschaften für R -Moduln. \square

Korollar 2.58. *Die volle Unterkategorie der flachen Garben ist projektiv bezüglich dem Funktor $-\otimes_R \mathcal{G}$. Der dazugehörige (links-)derivierte Funktor ist*

$$-\overset{L}{\otimes} \mathcal{G} : \mathbf{D}^-(X, R) \longrightarrow \mathbf{D}^-(X, R)$$

Beweis. Das folgt aus Proposition 2.56 und Proposition 2.57. \square

2.1.5 Hom-Garben

Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} Garben auf X . Betrachte die Prägarbe

$$U \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(U)}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

Aus den Garbenaxiomen von \mathcal{G} folgt, dass die obige Prägarbe sogar eine Garbe ist. Wir bezeichnen das "interne Hom" mit

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Aus der Definition folgt die Formel

$$\Gamma(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Aus Theorem 2.16 erhalten wir folgende Adjunktionsformel

Proposition 2.59. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Es gilt*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{H}) \simeq f_* \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X, R)}(f^{-1} \mathcal{G}, \mathcal{H})$$

Insbesondere gilt $\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)}(\mathcal{G}, f_ \mathcal{H}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X, R)}(f^{-1}, \mathcal{G})$.*

Beweis. Sei U offen in Y . Es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(U, f_* \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)}(f^{-1} \mathcal{F}, \mathcal{G})) &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(f^{-1}(U), R)}(f^{-1} \mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}, \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(U, R)}(\mathcal{F}|_U, f_* \mathcal{G}|_U) \\ &\simeq \Gamma(U, \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G})) \end{aligned}$$

\square

Lemma 2.60. *Seien \mathcal{G}, \mathcal{I} Garben und \mathcal{I} injektiv. Dann ist $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ welk.*

Beweis. Sei U offen in X und betrachte die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{G}_U \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_{X \setminus U} \rightarrow 0$. Wir wenden den exakten Funktor $\text{Hom}(-, \mathcal{I})$ an und erhalten wegen Proposition 2.37

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}_{|X \setminus U}, \mathcal{I}_{|X \setminus U}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}_{|U}, \mathcal{I}_{|U})$$

Das zeigt die Aussage. \square

Proposition 2.61. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Es gilt*

$$R\text{Hom}(\mathcal{G}, Rf_*\mathcal{H}) \simeq Rf_*R\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{H})$$

Insbesondere gilt $R\text{Hom}(\mathcal{G}, Rf_\mathcal{H}) \simeq R\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{H})$.*

Beweis. Sei $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$ eine injektive Auflösung von \mathcal{H} , dann gilt

$$\begin{aligned} R\text{Hom}(\mathcal{G}, Rf_*\mathcal{H}) &\simeq \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{I}) \\ &\simeq f_*\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{I}) \\ &\simeq Rf_*R\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus $R\Gamma \circ R\text{Hom} \simeq R\text{Hom}$ bzw. $R\Gamma \circ Rf_* \simeq R\Gamma$ und Lemma 2.60. \square

3 Garben auf lokal-kompakten Räumen

Definition 3.1. *Sei X ein topologischer Hausdorff Raum. X heißt **lokal-kompakt** wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

Lemma 3.2. *Sei X topologischer Hausdorff Raum und K, L disjunkte, kompakte Teilmengen von X . Dann existieren disjunkte, offene Umgebungen U bzw. V von K bzw. L .*

Beweis. Da X Hausdorffsch ist, existieren für $x \in K$ und $y \in L$ disjunkte, offene Umgebungen U_{xy} von x und V_{xy} von y . Wir fixieren für einen Moment y . Da K kompakt ist gibt es endliche viele $x_1, \dots, x_s \in K$, s.d. $U_y := \bigcup_{i=1}^s U_{x_i y} \supset K$. Dann ist U_y disjunkt zu $V_y = \bigcap_{i=1}^s V_{x_i y}$ und V_y ist eine offene Umgebung von y . Da L kompakt ist existieren endlich viele y_1, \dots, y_t , s.d. $V := \bigcup_{i=1}^t V_{y_i} \supset L$. Dann ist V eine offene Umgebung von L und disjunkt zur offenen Umgebung $U := \bigcap_{i=1}^t U_{y_i}$ von K . \square

Lemma 3.3. *Sei X ein lokal-kompakt. Es gilt:*

1. *Jede Umgebung von $x \in X$ enthält eine kompakte Umgebung von x .*
2. *Für jede offene Menge U die eine kompakte Menge K enthält, existiert eine kompakte Menge $L \subset U$ mit $K \subset \bar{L}$.*

Beweis. Es reicht die erste Aussage für eine offene Umgebung V von x zu zeigen, die in einer kompakten Menge K enthalten ist. Betrachte die kompakte Menge $K \setminus V$. Wir wählen für jeden Punkt $y \in K \setminus V$ disjunkte offene Umgebungen V_y von y und U_y von x . Die Überdeckung $(V_y)_{y \in K \setminus V}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung $(V_y)_{y \in S}$ von $K \setminus V$. Die kompakte Menge $K \setminus (\bigcup_{y \in S} V_y)$ ist in V enthalten und enthält die Umgebung $\bigcap_{y \in S} U_y \cap V$.

Für die zweite Aussage wählen wir für jedes $x \in K$ eine kompakte Umgebung N_x von x die in U enthalten ist. Die Überdeckung $(N_x)_{x \in K}$ von K enthält eine endliche Teilüberdeckung $(N_x)_{x \in S}$ von K . Definiere jetzt $L = \bigcup_{x \in S} N_x$. \square

Proposition 3.4. Sei X ein topologischer Raum, Z eine Teilmenge und $\mathcal{F} \in \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X, R)$. Betrachte den kanonischen Morphismus

$$\psi : \Gamma(Z, \mathcal{F}) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \supset Z}} \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z)$$

wobei die U offene Umgebungen von Z sind.

1. Der Morphismus $\psi : \Gamma(Z, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z)$ ist injektiv.
2. Sei X lokal-kompakt und Z kompakt, dann ist ψ ein Isomorphismus.

Beweis. Ist $\psi(s) = 0$ für $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, dann gilt $s_x = 0$ für alle $x \in Z$, d.h. $s = 0$ in einer offenen Umgebung von Z . Das zeigt die erste Aussage.

Sei jetzt $s \in \Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z)$. Wir wählen für jeden Punkt $x \in Z$ eine kompakte Umgebung K_x von x in Z und eine offene Menge U_x in X , die K_x enthält, s.d. ein $s^x \in \Gamma(U_x, \mathcal{F})$ existiert mit $(s^x)_y = s_y$ für alle $y \in K_x$. Da Z kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung dieser K_x . Es reicht daher folgendes zu zeigen: Seien K und L kompakte Teilmengen von X und $s \in \Gamma(U, \mathcal{F}), t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ mit $K \subset U$ und $L \subset V$, s.d. $s_x = t_x$ für $x \in K \cap L$. Dann existiert eine offene Teilmenge W die $K \cup L$ enthält und ein Schnitt in $\Gamma(W, \mathcal{F})$ der mit s in einer Umgebung von K und mit t in einer Umgebung von L übereinstimmt.

Sei W' eine offene Umgebung von $K \cap L$ in X , s.d. s und t die gleiche Einschränkung auf W' haben (die Teilmenge von $U \cap V$ in der s und t gleiche Keime haben ist offen). Wähle disjunkte offene Teilmengen $U' \subset U$ bzw. $V' \subset V$ von X die $L \setminus W'$ bzw. $K \setminus W'$ enthalten (Lemma 3.2). Dann kann man s und t auf $W = U' \cup V' \cup W'$ verkleben und W enthält $K \cup L$. \square

Annahme: Im folgenden sind in diesem Kapitel alle topologischen Räume lokal-kompakt.

Definition 3.5. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und \mathcal{G} eine Garbe auf X . Das **eigentliche direkte Bild** $f_!\mathcal{G}$ von \mathcal{G} unter der Abbildung f wird definiert durch:

$$\Gamma(U, f_!\mathcal{G}) = \{s \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{G}) \mid f : \text{supp}(s) \rightarrow U \text{ ist eigentlich}\}$$

Dies definiert einen links-exakten Funktor

$$f_! : \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X, R) \longrightarrow \mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y, R)$$

und einen derivierten Funktor

$$Rf_! : \mathbf{D}^+(X, R) \longrightarrow \mathbf{D}^+(Y, R)$$

Sei \mathcal{F} eine Garbe auf X . Wir definieren

$$\Gamma_c(X, \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid \text{supp}(s) \text{ ist kompakt}\}$$

Dies liefert einen links-exakten Funktor $\Gamma_c(X, -) : \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X, R) \rightarrow \text{Mod}(R)$ und einen derivierten Funktor:

$$R\Gamma_c(X, -) : \mathbf{D}^+(X, R) \longrightarrow \mathbf{D}^+(R)$$

Proposition 3.6. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und \mathcal{G} eine Garbe auf X . Dann ist für $y \in Y$ der kanonische Morphismus:

$$\alpha : (f_!\mathcal{G})_y \longrightarrow \Gamma_c(f^{-1}(y), \mathcal{G}|_{f^{-1}(y)})$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass α injektiv ist. Sei V eine offene Umgebung von $y \in Y$ und sei $t \in \Gamma(V, f_!\mathcal{G})$. Dann ist t durch einen Schnitt $s \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{G})$, mit $\text{supp}(s) \rightarrow V$ eigentlich, gegeben. Falls $\alpha(t) = 0$ gilt, folgt $\text{supp}(s) \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ und damit $y \notin f(\text{supp}(s))$. Da $f(\text{supp}(s))$ abgeschlossen ist, existiert eine

offene Umgebung von y auf der $t = 0$ gilt.

Wir zeigen jetzt, dass α surjektiv ist. Sei $s \in \Gamma_c(f^{-1}(y), \mathcal{G}|_{f^{-1}(y)})$ und sei $K = \text{supp}(s)$. Wegen Proposition 3.4 gibt es eine offene Umgebung U von K in X und ein $t \in \Gamma(U, \mathcal{G})$, s.d. $t|_K = s|_K$. Indem wir U möglicherweise verkleinern, können wir annehmen dass $t|_{U \cap f^{-1}(y)} = s|_{U \cap f^{-1}(y)}$. Wegen Lemma 3.3 2. existiert eine relativ kompakte offene Umgebung V von K mit $\bar{V} \subset U$. Da $y \notin f(\bar{V} \cap \text{supp}(t) \setminus V)$ gilt, existiert eine offene Umgebung W von y , s.d. $f^{-1}(W) \cap \bar{V} \cap \text{supp}(t) \subset V$ gilt. Wir definieren ein $\tilde{s} \in \Gamma(f^{-1}(W), \mathcal{G})$ durch

$$\tilde{s}|_{f^{-1}(W) \setminus (\text{supp}(t) \cap \bar{V})} = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{s}|_{f^{-1}(W) \cap V} = t|_{f^{-1}(W) \cap V}$$

Da $\text{supp}(\tilde{s})$ in $f^{-1}(W) \cap \text{supp}(t) \cap \bar{V}$ enthalten ist, ist f eigentlich auf dieser Menge und es gilt $\tilde{s}|_{f^{-1}(y)} = s$. \square

Definition 3.7. Sei $\mathcal{F} \in \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X, R)$. Die Garbe \mathcal{F} heißt **weich**, falls für jede kompakte Teilmenge K von X die Restriktionsabbildung $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K, \mathcal{F}|_K)$ surjektiv ist.

Lemma 3.8. Sei \mathcal{G} eine weiche Garbe, dann ist \mathcal{G} weich.

Beweis. Das folgt direkt aus Proposition 3.4. \square

Proposition 3.9. Sei \mathcal{G} eine Garbe auf X . Die Garbe \mathcal{G} ist genau dann weich, wenn die Restriktionsabbildung

$$\Gamma_c(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma_c(Z, \mathcal{G}|_Z)$$

für jede abgeschlossene Menge $Z \subset X$ surjektiv ist.

Beweis. Ist Z kompakt, dann gilt $\Gamma(Z, \mathcal{G}|_Z) = \Gamma_c(Z, \mathcal{G}|_Z)$. Also gilt dass

$$\Gamma(X, \mathcal{G}) \supset \Gamma_c(X, \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \Gamma_c(Z, \mathcal{G}|_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{G}|_Z)$$

surjektiv. Dies zeigt die Rückrichtung. Für die Hinrichtung nehmen wir nun an, dass \mathcal{G} weich ist. Sei $s \in \Gamma_c(Z, \mathcal{G}|_Z)$ mit kompakten Träger K . Sei U eine relativ kompakte, offene Umgebung von K in X . Definiere einen Schnitt $\tilde{s} \in \Gamma(\partial U \cup (Z \cap \bar{U}), \mathcal{G}|_{\partial U \cup (Z \cap \bar{U})})$ durch $\tilde{s}|_{Z \cap \bar{U}} = s|_{Z \cap \bar{U}}$ und $\tilde{s}|_{\partial U} = 0$. Da \mathcal{G} per Annahme weich ist, können wir \tilde{s} zu einem Schnitt $t \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ erweitern. Da $t = 0$ in einer Umgebung von ∂U gilt, hat der Schnitt t Träger auf der kompakten Menge \bar{U} . \square

Korollar 3.10. Eine Garbe \mathcal{G} ist genau dann weich, wenn $H_c^1(U, \mathcal{G}|_U) = 0$ für alle offenen Mengen $U \subset X$ gilt.

Beweis. Sei \mathcal{G} eine Garbe und $j : U \rightarrow X$ die kanonische Einbettung und $i : Z = X \setminus U \rightarrow X$ die Einbettung des Komplements. Wir wenden den derivierten Funktor von Γ_c auf die exakte Sequenz (siehe Korollar 2.42)

$$0 \longrightarrow j_! j^{-1} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow i_* i^{-1} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

an und erhalten die lange exakte Sequenz

$$\dots H_c^0(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H_c^0(Z, \mathcal{G}|_Z) \longrightarrow H_c^1(U, \mathcal{G}|_U) \longrightarrow \dots$$

Wegen Proposition 3.9 folgt dann die Aussage. \square

Betrachte das kartesische Quadrat von lokal-kompakten Räumen:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

was bedeutet, dass das Quadrat kommutativ ist und X' homöomorph zum Faserprodukt $X \times_Y Y' = \{(x, y' \in X \times Y' \mid f(x) = g(y')\}$ ist (warum ist X' lokal-kompakt?).

Proposition 3.11. *Es existiert ein kanonischer Isomorphismus von Funktoren:*

$$g^{-1} \circ f_! \xrightarrow{\simeq} f'_! \circ g'^{-1} \quad (3.0.8)$$

Beweis. Wir konstruieren zuerst den kanonischen Morphismus:

$$f_! \circ g'_* \longrightarrow g_* \circ f'_! \quad (3.0.9)$$

Sei $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\mathfrak{Sh}(X'))$ und V eine offene Teilmenge von Y . Ein Schnitt $t \in \Gamma(V, f_! \circ g'_* \mathcal{G})$ wird durch einen Schnitt $s \in \Gamma((f \circ g')^{-1}(V), \mathcal{G})$ gegeben, s.d. $\text{supp}(s) \subset g'^{-1}(Z)$ für eine Teilmenge $Z \subset f^{-1}(V)$ gilt, die eigentlich über V ist. Da $g'^{-1}(Z) \rightarrow g^{-1}(V)$ auch eigentlich ist, definiert s auch einen Schnitt von $g_* f'_! \mathcal{G}$. Dies liefert den Morphismus (3.0.9).

Wegen Theorem 2.16 gilt:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y')}(g^{-1} \circ f_! \mathcal{G}, f'_! \circ g'^{-1} \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y)}(f_! \mathcal{G}, g_* \circ f'_! \circ g'^{-1} \mathcal{G})$$

Der Morphismus $f_! \rightarrow f_! \circ g'_* \circ g'^{-1} \rightarrow g_* \circ f'_! \circ g'^{-1}$ induziert dann den Morphismus (3.0.8). Es bleibt zu zeigen, dass (3.0.8) ein Isomorphismus ist. Sei $y' \in Y'$. Dann gilt wegen Proposition 3.6 und Korollar 2.18:

$$(g^{-1} \circ f_! \mathcal{G})_{y'} \simeq (f_! \mathcal{G})_{g(y')} \simeq \Gamma_c(f^{-1}(g(y')), \mathcal{G})$$

Die Abbildung g' induziert einen Homöomorphismus $f'^{-1}(y') \simeq f^{-1}(g(y'))$ und damit einen Isomorphismus

$$\Gamma_c(f^{-1}(g(y')), \mathcal{G}) \simeq \Gamma_c(f'^{-1}(y'), g'^{-1} \mathcal{G}) \simeq (f'_! \circ g'^{-1} \mathcal{G})_{y'}$$

□

Proposition 3.12. *Sei \mathcal{G} eine weiche Garbe auf X .*

1. *Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann ist $f_! \mathcal{G}$ weich.*
2. *Sei Z lokal abgeschlossen in X , dann ist $\mathcal{G}|_Z$ und \mathcal{G}_Z weich.*

Beweis. Sei $i : K \rightarrow Y$ eine kompakte Teilmenge von Y und $j : f^{-1}(K) \rightarrow X$ die kanonische Einbettung. Wegen Proposition 3.11 gilt

$$\Gamma(K, f_! \mathcal{G}|_K) = \Gamma_c(K, f_! \mathcal{G}|_K) = a_! \circ i^{-1} \circ f_! \mathcal{G} \simeq a_! \circ f_! \circ j^{-1} \mathcal{G} = \Gamma_c(f^{-1}(K), \mathcal{G}|_{f^{-1}(K)})$$

Da wegen Proposition 3.9 $\Gamma_c(Y, f_! \mathcal{G}) = \Gamma_c(X, \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \Gamma_c(f^{-1}(K), \mathcal{G}|_{f^{-1}(K)}) = \Gamma(K, f_! \mathcal{G}|_K)$ gilt, folgt die Behauptung.

Sei jetzt $Z = A \cap U$ lokal abgeschlossen und $i : A \cap U \rightarrow U$ bzw. $j : U \rightarrow X$ eine offene bzw. abgeschlossene Einbettung. Die Aussage, dass $\mathcal{G}|_U = j^{-1} \mathcal{G}$ weich ist, folgt aus der Tatsache, dass für $K \subset U$ der Morphismus $\Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(K, \mathcal{G}|_K) \simeq \Gamma(K, \mathcal{G})$ über $\Gamma(U, \mathcal{G})$ faktorisiert. Es reicht also anzunehmen, dass Z abgeschlossen ist. Die Aussage für \mathcal{G}_Z folgt dann mit Proposition 3.9.

Sei $k : Z \rightarrow X$ jetzt wieder lokal abgeschlossen. Wegen $\mathcal{G}_Z = k_! \mathcal{G}|_Z$ folgt die Aussage. □

Proposition 3.13. *Sei $0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben auf X und nehme an, dass \mathcal{F}' weich ist. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann ist*

$$0 \longrightarrow f_! \mathcal{G}' \longrightarrow f_! \mathcal{G} \longrightarrow f_! \mathcal{G}'' \longrightarrow 0$$

exakt. Insbesondere ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{G}') \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{G}'') \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Für alle $y \in Y$ ist die Garbe $\mathcal{G}|_{f^{-1}(y)}$ auf $f^{-1}(y)$ weich. Wegen Proposition 3.6 und Proposition 2.7 reicht es die Aussage für den Spezialfall $f : X \rightarrow \{pt\}$ zu zeigen.

Sei $s'' \in \Gamma_c(X, \mathcal{G}'')$ und sei U eine relativ kompakte offene Umgebung von $\text{supp}(s'')$. Wir müssen zeigen, dass s'' im Bild von $\Gamma_c(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{G}'')$ liegt. Indem wir $\mathcal{G}', \mathcal{G}, \mathcal{G}''$ durch $\mathcal{G}'_U, \mathcal{G}_U, \mathcal{G}''_U$ und X mit \bar{U} ersetzen, können wir oBdA annehmen, dass X kompakt ist. Sei $\{K_i\}_{i=1, \dots, n}$ eine endliche Überdeckung von X durch kompakte Teilmengen, s.d. $s_i \in \Gamma(K_i, \mathcal{G})$ existieren, deren Bild in $\Gamma(K_i, \mathcal{F}'')$ gleich $s''|_{K_i}$ ist. Für $n \geq 2$ kommt $s_1 - s_2$ auf $K_1 \cap K_2$ von einem Element t aus $\Gamma(K_1 \cap K_2, \mathcal{G}')$. Da \mathcal{G}' per Annahme weich ist, existiert ein Element $t' \in \Gamma(X, \mathcal{F}')$ dessen Einschränkung auf $K_1 \cap K_2$ gleich t ist. Sei s' das Bild von t' in $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Indem wir s_2 durch $s_2 + s'|_{K_2}$ ersetzen, können wir $s_1|_{K_1 \cap K_2} = s_2|_{K_1 \cap K_2}$ annehmen. Es existiert also ein $u \in \Gamma(K_1 \cup K_2, \mathcal{G})$ mit $u|_{K_i} = s_i$ für $i = 1, 2$. Das Bild von u in $\Gamma(K_1 \cup K_2, \mathcal{F}'')$ ist dann gleich $s''|_{K_1 \cup K_2}$. Die Aussage folgt dann durch Induktion. \square

Lemma 3.14. Sei $0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathfrak{Sh}(X)$. Nehme an \mathcal{G}' und \mathcal{G} sind weich, dann ist \mathcal{G}'' weich.

Beweis. Sei Z abgeschlossen in X . Im folgenden kommutativen Diagramm sind wegen Proposition 3.9 und Proposition 3.13 die Abbildungen α und β surjektiv

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{G}'') \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \Gamma(Z, \mathcal{G}|_Z) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(Z, \mathcal{G}''|_Z) \end{array}$$

Daher ist auch γ surjektiv und damit \mathcal{G}'' weich. \square

Korollar 3.15. Die Kategorie der weichen Garben auf X ist injektiv bezüglich der Funktoren $\Gamma_c(X, -)$, $f_!$ und $\Gamma(K, -)$.

Definition 3.16. Ein topologischer Raum heißt **abzählbar im Unendlichen** falls er sich als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen schreiben lässt.

Proposition 3.17. Sei X ein lokal-kompakter topologischer Raum der abzählbar im Unendlichen ist. Dann ist die Kategorie der weichen Garben injektiv bezüglich dem Funktor $\Gamma(X, -)$.

Beweis. Sei $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $\mathfrak{Sh}(X)$, wobei \mathcal{F}' weich ist. Sei $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von kompakten Teilmengen von X , s.d. $X = \bigcup_n K_n$ und $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Sequenzen $0 \rightarrow \Gamma(K_n, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(K_n, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(K_n, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$ sind wegen Proposition 3.12 und Proposition 3.13 exakt. Da $\Gamma(K_{n+1}, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(K_n, \mathcal{F}')$ für alle n surjektiv ist, ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n \Gamma(K_n, \mathcal{F}') \longrightarrow \varprojlim_n \Gamma(K_n, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_n \Gamma(K_n, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

exakt. Da für jede Garbe \mathcal{G} auf X , $\Gamma(X, \mathcal{G}) \simeq \varprojlim_n \Gamma(K_n, \mathcal{G})$ gilt folgt damit der Beweis. \square

Proposition 3.18 (Mayer-Vietoris Sequenzen). Seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Mengen mit Komplement U, V und $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^+(X, R)$. Wir erhalten folgende lange exakte Kohomologiesequenzen:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \mathbb{H}^j(U \cup V, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}^j(U, \mathcal{G}) \oplus \mathbb{H}^j(V, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}^j(U \cap V, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}^{j+1}(U \cup V, \mathcal{G}) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \mathbb{H}^j(A \cup B, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}^j(A, \mathcal{G}) \oplus \mathbb{H}^j(B, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}^j(A \cap B, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}^{j+1}(A \cup B, \mathcal{G}) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \mathbb{H}_c^j(U \cap V, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}_c^j(U, \mathcal{G}) \oplus \mathbb{H}_c^j(V, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}_c^j(U \cup V, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}_c^{j+1}(U \cap V, \mathcal{G}) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \mathbb{H}_c^j(A \cup B, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}_c^j(A, \mathcal{G}) \oplus \mathbb{H}_c^j(B, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}_c^j(A \cap B, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{H}_c^{j+1}(A \cup B, \mathcal{G}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage. Sei $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ eine weiche Auflösung. Dann ist

$$0 \longrightarrow \Gamma(U \cup V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(V, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

exakt. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert die erste Aussage.

Für die zweite Aussage wählen wir eine injektive Auflösung $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}$. Seien $i_A, i_B, i_{A \cap B}, i_{A \cup B}$ die abgeschlossenen Einbettungen. Die unterste horizontale Sequenz von Proposition 2.43 liefert

$$0 \longrightarrow i_{A \cup B, !} i_{A \cup B}^{-1} \mathcal{I} \longrightarrow i_{A, !} i_A^{-1} \mathcal{I} \oplus i_{B, !} i_B^{-1} \mathcal{I} \longrightarrow i_{A \cap B, !} i_{A \cap B}^{-1} \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

Dies liefert nach Proposition 1.48 ein ausgezeichnetes Dreieck. Wir wenden $R\Gamma$ an und erhalten

$$R\Gamma i_{A \cup B}^{-1} \mathcal{I} \longrightarrow R\Gamma i_A^{-1} \mathcal{I} \oplus R\Gamma i_B^{-1} \mathcal{I} \longrightarrow R\Gamma i_{A \cap B}^{-1} \mathcal{I} \xrightarrow{+1}$$

wobei wir $i_! = i_*$ und $R\Gamma \circ i_* = R\Gamma$ benutzt haben. Da für eine abgeschlossene Einbettung i^{-1} injektive Garben erhält (Korollar 2.41) erhalten wir die zweite Aussage durch die lange exakte Kohomologiesequenz. Die dritte und vierte Aussage folgt wie die zweite Aussage indem man den derivierten Funktor $R\Gamma_c$ anwendet. \square

4 Verdier Dualität

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen lokal-kompakten Räumen. Das Ziel dieses Abschnittes ist es einen rechts-adjungierten Funktor $f^!$ zum Funktor $Rf_! : \mathbf{D}^+(X) \rightarrow \mathbf{D}^+(Y)$ zu konstruieren, d.h.

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^+(Y)}(Rf_! \mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X)}(\mathcal{G}, f^! \mathcal{H})$$

4.1 Kohomologische Dimension

Definition 4.1. Seien \mathcal{C} und \mathcal{C}' zwei abelsche Kategorien und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ein links-exakter Funktor. Ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **F-azyklisch** falls $R^k F(X) = 0$ für $k \neq 0$ gilt.

Sei \mathcal{I} eine F -injektive Unterkategorie und \mathcal{J} die volle Unterkategorie der F -azyklischen Objekte.

Lemma 4.2. Die Unterkategorie \mathcal{I} ist F -injektiv.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass wir die Existenz einer F -injektiven Unterkategorie \mathcal{I} voraussetzen und dass jedes $I \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ per Konstruktion F -azyklisch ist.

Wir müssen die Bedingungen von Definition 1.56 überprüfen. Sei jetzt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, dann existiert ein $I \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ und ein Monomorphismus $X \rightarrow I$.

Aus der langen exakten Kohomologiesequenz folgt, dass für eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ in \mathcal{C} mit $X', X \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ auch $X'' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ folgt.

Sei jetzt $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\text{Ob}(\mathcal{C})$ mit $X', X, X'' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$. Dann folgt wieder aus der langen exakten Kohomologiesequenz, dass $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$ exakt ist. \square

Definition 4.3. Sei F ein links-exakter Funktor. F hat **kohomologische Dimension** $\leq n$ falls

$$R^k F(X) = 0$$

für alle $k > n$ gilt.

Lemma 4.4. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. F hat kohomologische Dimension $\leq n$.
2. Für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existiert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow X \rightarrow X^0 \rightarrow \dots \rightarrow X^n \rightarrow 0$$

mit $X^j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ für $0 \leq j \leq n$.

3. Ist $X^0 \rightarrow \dots \rightarrow X^n \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz mit $X^i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ für $i < n$, dann ist $X^n \in \text{Ob}(\mathcal{J})$.

Beweis. (1) \Rightarrow (3): Sei $X^0 \xrightarrow{d_0} X^1 \rightarrow \dots \rightarrow X^n \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz mit $X^i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ für $i < n$. Dies liefert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \ker d_0 \rightarrow X^0 \xrightarrow{d_0} X^1 \rightarrow \dots \rightarrow X^{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} X^{n-1} \rightarrow X^n \simeq X^{n-1}/\text{Im } d_{n-2} \rightarrow 0$$

Da \mathcal{J} F -injektiv ist, finden wir eine Auflösung

$$0 \rightarrow X^{n-1}/\text{Im } d_{n-2} \rightarrow (X')^n \rightarrow (X')^{n+1} \rightarrow \dots$$

Wir verkleben dies zu einer Auflösung von $\ker d_0$:

$$0 \rightarrow \ker d_0 \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots \rightarrow X^{n-1} \rightarrow (X')^n \rightarrow (X')^{n+1} \rightarrow \dots$$

Es gilt

$$0 = R^{n+k}F(\ker d_0) = H^{n+k}((X')^\bullet) = R^kF(X^{n-1}/\text{Im } d_{n-2}) = R^kF(X^n) \quad \text{für } k \geq 1$$

dies zeigt $X^n \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ und damit die Behauptung.

(3) \Rightarrow (2): Sei $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Da \mathcal{J} F -injektiv ist finden wir eine Auflösung

$$0 \rightarrow X \rightarrow J^0 \rightarrow \dots \rightarrow J^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} J^n \rightarrow J^{n+1} \rightarrow \dots$$

Nach Annahme ist $\text{Im } d_{n-1} \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ und damit ist

$$0 \rightarrow X \rightarrow J^0 \rightarrow \dots \rightarrow J^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \text{Im } d_{n-1} \rightarrow 0$$

die gesuchte Auflösung.

(2) \Rightarrow (1): Nach Annahme gibt es für jedes $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Auflösung X^\bullet in $\text{Ob}(\mathcal{J})$ der Länge n . Da \mathcal{J} F -injektiv ist gilt

$$R^{k+n}F(X) = H^{n+k}F(X^\bullet) = 0 \quad \text{für } k \geq 1$$

d.h. F hat kohomologische Dimension $\leq n$. □

4.2 Der Funktor $f^!$, Teil I

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen lokal-kompakten Räumen.

Wir nehmen ab jetzt folgendes an:

Der Funktor $f_! : \mathfrak{Sh}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathfrak{Sh}(Y, \mathbb{Z})$ hat *endliche* kohomologische Dimension n ,

d.h.

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \text{so dass} \quad R^k f_! = 0 \quad \text{für} \quad k > n.$$

Sei n die kohomologische Dimension von $f_!$.

Wegen Proposition 3.6 hat $f_!$ kohomologische Dimension $\leq n$ genau dann wenn $\Gamma_c(f^{-1}(y), -)$ für alle $y \in Y$ kohomologische Dimension $\leq n$ hat.

Definition 4.5. Eine Garbe \mathcal{G} auf X heißt f -weich falls, für jedes $x \in X$, die Garbe $\mathcal{G}|_{f^{-1}(y)}$ weich ist.

Wegen Proposition 3.6 ist die Unterkategorie der f -weichen Garben auch $f_!$ -azyklisch und wegen Lemma 4.2 auf $f_!$ -injektiv.

Lemma 4.6. Es gelten folgende Implikationen:

$$\text{welk} \Rightarrow \text{weich} \Rightarrow f\text{-weich}$$

Beweis. Die erste Implikation ist Lemma 3.8. Die zweite folgt aus Proposition 3.12 2. . □

Lemma 4.7. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}^{-n} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{S}^{-1} \longrightarrow \mathcal{S}^0 \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Wenn die Garben $\mathcal{S}^{-n}, \dots, \mathcal{S}^{-1}$ f -weich sind, dann ist auch \mathcal{S}^0 f -weich.

Beweis. Da die Einschränkung auf eine Faser von f exakt ist, reicht es die Aussage für weiche anstatt für f -weiche Garbe zu zeigen. Sei $0 \rightarrow \mathcal{S}^0 \rightarrow \mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{K}^1 \rightarrow \dots$ eine weiche Auflösung von \mathcal{S}^0 . Wir können die beiden Auflösungen zu einer weichen Auflösung von \mathcal{F} verkleben. Es gilt dann

$$H_c^1(U, \mathcal{S}^0) \simeq H_c^{n+1}(U, \mathcal{F}) = 0$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Tatsache folgt, dass Γ_c kohomologische Dimension $\leq n$ hat. Die Aussage folgt dann aus Korollar 3.10. □

Sei $\mathcal{K} \in \mathfrak{Sh}(X, \mathbb{Z})$ und $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(Y, R)$. Wir definieren die Prägarbe von R -Moduln $f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F}$ durch

$$(f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V) = \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X, R)}(f_!(\underline{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_V), \mathcal{F})$$

Für $V' \subset V$ wird die Restriktionsabbildung

$$(f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V) \longrightarrow (f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V')$$

durch die Abbildung $f_!(\underline{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_{V'}) \rightarrow f_!(\underline{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_V)$ induziert.

Lemma 4.8. Sei $\mathcal{K} \in \mathfrak{Sh}(X, \mathbb{Z})$ flach und f -weich.

1. Für jede Garbe \mathcal{G} auf X ist $\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}$ f -weich.
2. Der Funktor $\mathcal{G} \rightarrow f_!(\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K})$ ist exakt.

Beweis. 1.) Sei $j : V \rightarrow X$ eine offene Menge. Wir zeigen die Aussage zuerst für $\mathcal{G} = \underline{\mathbb{Z}}_V$. Es gilt $\underline{\mathbb{Z}}_V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K} = \mathcal{K}_V = j_! j^{-1} \mathcal{K}$. Wir müssen zeigen, dass für alle $y \in Y$ die Garbe $(\mathcal{K}_V)|_{f^{-1}(y)}$ weich ist. Sei $i : f^{-1}(y) \rightarrow X$ die kanonische Einbettung. Wir haben folgendes kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(x) \cap V & \xrightarrow{\bar{i}} & V \\ \downarrow \bar{j} & & \downarrow j \\ f^{-1}(y) & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Wegen Proposition 3.11 gilt

$$(\mathcal{K}_V)|_{f^{-1}(y)} = i^{-1}j_!j^{-1}\mathcal{K} = \tilde{j}_!\tilde{i}^{-1}j^{-1}\mathcal{K} = \tilde{j}_!\tilde{j}^{-1}i^{-1}\mathcal{K} = (\mathcal{K}|_{f^{-1}(y)})_{f^{-1}(y)\cap V}.$$

Da $\mathcal{K}|_{f^{-1}(y)}$ per Annahme weich ist, ist auch $(\mathcal{K}|_{f^{-1}(y)})_{f^{-1}(y)\cap V}$ wegen Proposition 3.12 weich. Die zeigt, dass $\underline{\mathbb{Z}}_V \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_X} \mathcal{K}$ weich ist.

Sei jetzt \mathcal{G} eine beliebige Garbe. Es existiert für \mathcal{G} eine Auflösung

$$\longrightarrow \mathcal{G}^{-r} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

wobei jedes \mathcal{G}^j eine direkte Summen von Garben $\underline{\mathbb{Z}}_V$, mit $V \subset X$ offen, ist (dies folgt aus 2.50 und der Tatsache, dass auch $\mathcal{G} \in \mathfrak{Sh}(X, \mathbb{Z})$ gilt). Daraus folgt, dass alle $\mathcal{G}^j \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_Y} \mathcal{K}$ f -weich sind. Da \mathcal{K} flach ist, ist die Sequenz

$$\longrightarrow \mathcal{G}^{-r} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_Y} \mathcal{K} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{G}^0 \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_Y} \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_Y} \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

exakt. Da $f_!$ per Annahme endliche kohomologische Dimension hat, ist wegen Lemma 4.7 auch $\mathcal{G} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_Y} \mathcal{K}$ f -weich.

Die zweite Aussage folgt dann unmittelbar aus der ersten, da der Funktor $f_!$ auf der Kategorie der f -weichen Garben exakt ist. \square

Lemma 4.9. *Sei $\mathcal{K} \in \mathfrak{Sh}(X, \mathbb{Z})$ flach und f -weich und sei $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(Y, R)$ injektiv.*

1. $f_K^!\mathcal{F}$ ist eine injektive Garbe von \underline{R}_X -Moduln.
2. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)}(f_!(\mathcal{G} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_X} \mathcal{K}), \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X, R)}(\mathcal{G}, f_K^!\mathcal{F})$$

der funktoriell bzgl. \mathcal{G} ist.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir $- \otimes \mathcal{K}$ anstelle von $- \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}_Y} \mathcal{K}$.

Wir beweisen zuerst, dass $f_K^!\mathcal{F}$ eine Garbe ist. Sei $V = \bigcup_{j \in J} V_j$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $V \subset X$ und sei $<$ eine Totalordnung auf J . Wir erhalten eine exakte Sequenz:

$$\bigoplus_{j < k} \underline{R}_{V_j \cap V_k} \longrightarrow \bigoplus_i \underline{R}_{V_i} \longrightarrow \underline{R}_V \longrightarrow 0$$

wobei die Abbildung durch

$$\begin{aligned} \underline{R}_{V_j \cap V_k}(U) &\longrightarrow \underline{R}_{V_j}(U) \oplus \underline{R}_{V_k}(U) \\ a &\mapsto (a, -a) \end{aligned}$$

gegeben ist. Aufgrund von Lemma 4.8 2. erhalten wir die exakte Sequenz:

$$f_! \left(\bigoplus_{j < k} \underline{R}_{V_j \cap V_k} \otimes \mathcal{K} \right) \longrightarrow f_! \left(\bigoplus_i \underline{R}_{V_i} \otimes \mathcal{K} \right) \longrightarrow f_!(\underline{R}_V \otimes \mathcal{K})$$

Da \mathcal{F} injektiv ist, ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)}(f_!(\underline{R}_V \otimes \mathcal{K}), \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)} \left(f_! \left(\bigoplus_i \underline{R}_{V_i} \otimes \mathcal{K} \right), \mathcal{F} \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y, R)} \left(f_! \left(\bigoplus_{j < k} \underline{R}_{V_j \cap V_k} \otimes \mathcal{K} \right), \mathcal{F} \right)$$

Wegen Lemma 2.54 2. folgt dann, dass die obige exakte Sequenz isomorph zu folgender Sequenz ist:

$$0 \longrightarrow (f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V) \longrightarrow \prod_i (f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V_i) \longrightarrow \prod_{j < k} (f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V_j \cap V_k)$$

Das zeigt, dass $f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F}$ eine Garbe ist. \square

Wir definieren den Homomorphismus:

$$\alpha(\mathcal{G}) : \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y,R)}(f_!(\mathcal{G} \otimes \mathcal{K}), \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(\mathcal{G}, f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})$$

Sei $\phi \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y,R)}(f_!(\mathcal{G} \otimes \mathcal{K}), \mathcal{F})$. Dann gibt es für $V \subset X$ offen eine Sequenz von Morphismen:

$$\mathcal{G}(V) \otimes_R f_!(\underline{R}_X \otimes \mathcal{K}_V) \longrightarrow f_!(\mathcal{G} \otimes \mathcal{K}_V) \longrightarrow f_!(\mathcal{G} \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \quad (4.2.1)$$

Der mittlere Isomorphismus wird durch $\mathcal{K}_V \rightarrow \mathcal{K}$ induziert. Es bleibt die Existenz des ersten Morphismus zu zeigen. Wir zeigen zunächst die Existenz von

$$\mathcal{G}(V) \otimes_R f_*(\underline{R}_X \otimes \mathcal{K}_V) \longrightarrow f_*(\mathcal{G} \otimes \mathcal{K}_V)$$

Sie $U \subset Y$ und $W := f^{-1}(U)$. Es reicht somit für beliebige offene $W' \subset X$ folgende Morphismen zu erklären

$$\mathcal{G}(V) \otimes_R (\underline{R}_X \otimes \mathcal{K}_V)(W') \longrightarrow (\mathcal{G} \otimes \mathcal{K}_V)(W') \simeq (\mathcal{G}_V \otimes \mathcal{K}_V)(W') \quad (4.2.2)$$

dies ist aber auf dem Niveau der Prägarben klar, da folgende Abbildung existiert:

$$\mathcal{G}(V) \otimes_R (R \otimes \mathcal{K}_V(W')) \longrightarrow \mathcal{G}_V(W') \otimes_R \mathcal{K}_V(W')$$

Die Existenz der ersten Abbildung von (4.2.1) folgt dann aus der Tatsache, dass falls $\text{supp}(s) \rightarrow U$ eigentlich ist für $s \in \Gamma(f^{-1}(U), \underline{R}_X \otimes \mathcal{K}_V)$, dass dann auch $\text{supp}(g \otimes s) \rightarrow U$ eigentlich ist für $g \otimes s \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{G} \otimes \mathcal{K}_V)$.

Die Morphismen (4.2.1) liefern einen Morphismus von $\mathcal{G}(V)$ nach $(f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(f_!(\underline{R} \otimes \mathcal{K}_V), \mathcal{F})$, der funktoriell in V ist, d.h. wir erhalten ein Element $\alpha(\mathcal{G})(\phi) \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(\mathcal{G}, f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})$.

Wir beweisen zuerst für $\mathcal{G} = \underline{R}_V$ und $V \subset X$ offen, dass $\alpha(\mathcal{G})$ ein Isomorphismus ist. Es gilt

$$\text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y,R)}(f_!(\underline{R}_V \otimes \mathcal{K}), \mathcal{F}) \simeq (f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})(V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(\underline{R}_V, f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})$$

wobei der erste Morphismus aus 2.54 2. folgt und der zweite Morphismus aus der Tatsache folgt, dass für eine beliebige Garbe \mathcal{H} und eine offene Menge $j : V \rightarrow X$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(\underline{R}_V, \mathcal{H}) &= \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(j_! j^{-1} \underline{R}, \mathcal{H}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(V,R)}(j^{-1} \underline{R}, j^{-1} \mathcal{H}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(V,R)}(\underline{R}, j^{-1} \mathcal{H}) \\ &\simeq \mathcal{H}(V) \end{aligned}$$

gilt.

Daraus folgt nun, dass für eine Familie von offenen Mengen V_j und $\mathcal{G} = \bigoplus \underline{R}_{V_j}$, die Abbildung $\alpha(\mathcal{G})$ ein Isomorphismus ist.

Sei nun \mathcal{G} eine beliebige Garbe. Aus Proposition 2.50 folgt, dass eine exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ existiert, wobei $\mathcal{G}' \simeq \bigoplus_j \underline{R}_{V_j}$, d.h. $\alpha(\mathcal{G}')$ ist ein Isomorphismus. Betrachte dazu folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y,R)}(f_!(\mathcal{G} \otimes \mathcal{K}), \mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y,R)}(f_!(\mathcal{G}' \otimes \mathcal{K}), \mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(Y,R)}(f_!(\mathcal{G}'' \otimes \mathcal{K}), \mathcal{F}) \\ & & \downarrow \alpha(\mathcal{G}) & & \downarrow \alpha(\mathcal{G}') & & \downarrow \alpha(\mathcal{G}'') \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(\mathcal{G}, f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(\mathcal{G}', f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(\mathcal{G}'', f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F}) \end{array}$$

Beide Zeilen sind wegen Lemma 4.8 2. exakt. Da $\alpha(\mathcal{G}')$ bijektiv ist, ist $\alpha(\mathcal{G})$ injektiv. Dieselbe Argumentation mit \mathcal{G}'' anstatt \mathcal{G} zeigt, dass $\alpha(\mathcal{G}'')$ injektiv ist. Daraus folgt, dass $\alpha(\mathcal{G})$ bijektiv ist.

Dies zeigt, dass der Funktor $\text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X,R)}(-, f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F})$ exakt ist, d.h. $f_{\mathcal{K}}^! \mathcal{F}$ ist injektiv.

Lemma 4.10. *Die Garbe $\underline{\mathbb{Z}}_X$ hat eine flache und f -weiche Auflösung*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_X \longrightarrow \mathcal{K}^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{K}^r \longrightarrow 0$$

Beweis. Sei \hat{X} die Menge X versehen mit der diskreten Topologie und $p : \hat{X} \rightarrow X$ die kanonische Abbildung. Beachte das für jede Garbe \mathcal{H} die Abbildung $\mathcal{H} \rightarrow p_* p^{-1} \mathcal{H}$ injektiv ist, da gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathcal{H}) &\longrightarrow \Gamma(U, p_* p^{-1} \mathcal{H}) = \prod_{x \in U} \mathcal{H}_x \\ t &\mapsto (x \mapsto t_x) \end{aligned}$$

Definiere $\mathcal{K}^0 = p_* p^{-1} \underline{\mathbb{Z}}_X$, $\mathcal{K}^1 = p_* p^{-1}(\text{Cok}(\underline{\mathbb{Z}}_X \rightarrow \mathcal{K}^0))$, $\mathcal{K}^j = p_* p^{-1}(\text{Cok}(\mathcal{K}^{j-2} \rightarrow \mathcal{K}^{j-1}))$ für $1 < j < r$ und $\mathcal{K}^r = \text{Cok}(\mathcal{K}^{r-2} \rightarrow \mathcal{K}^{r-1})$. Dies liefert die exakte Sequenz $0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_X \rightarrow \mathcal{K}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^r \rightarrow 0$. Da die Garben \mathcal{K}^j per Konstruktion weik sind, sind sie auch f -weich und aus Lemma 4.7 folgt, dass \mathcal{K}^r dann auch f -weich ist. Es bleibt zu zeigen dass die \mathcal{K}^j flache $\underline{\mathbb{Z}}_X$ -Moduln sind.

Es reicht zu zeigen, dass für eine flache Garbe \mathcal{G} auch $p_* p^{-1} \mathcal{G}$ und $p_* p^{-1} \mathcal{G} / \mathcal{G}$ flach sind. Es gilt nämlich

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\mathbb{Z}}_X & \longrightarrow & \mathcal{K}^0 = p_* p^{-1} \underline{\mathbb{Z}}_X & & \mathcal{K}^1 = p_* p^{-1}(\mathcal{K}^0 / \underline{\mathbb{Z}}_X) & & \mathcal{K}^2 = p_* p^{-1}(\mathcal{K}^1 / \mathcal{K}^0) & & \mathcal{K}^3 = p_* p^{-1}(\mathcal{K}^2 / \mathcal{K}^1) \\ & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & \mathcal{K}^0 / \underline{\mathbb{Z}}_X & & \mathcal{K}^1 / \mathcal{K}^0 = \mathcal{K}^1 / (\mathcal{K}^0 / \underline{\mathbb{Z}}_X) & & \mathcal{K}^2 / \mathcal{K}^1 = \mathcal{K}^2 / (\mathcal{K}^1 / \mathcal{K}^0) & & \end{array}$$

wobei alle Terme flach sind. Für $x \in X$ gilt

$$(p_* p^{-1} \mathcal{G})_x = \varinjlim_{x' \in U} \prod_{x' \in U} \mathcal{G}_{x'}$$

und

$$(p_* p^{-1} \mathcal{G} / \mathcal{G})_x = \varinjlim_{x' \in U} \prod_{x' \in U \setminus \{y\}} \mathcal{G}_{x'}$$

(hier läuft U über ein System von offenen Umgebungen von x). Da die obigen \mathbb{Z} -Moduln torsions-frei sind (\mathcal{G} ist flach), sind die Garben $p_* p^{-1} \mathcal{G}$ und $p_* p^{-1} \mathcal{G} / \mathcal{G}$ flach. \square

4.3 Doppelkomplexe

Sei \mathcal{C} eine additive Kategorie.

Definition 4.11. *Ein **Doppelkomplex** (X, d_X) besteht aus Objekten $X^{n,m}$ und Morphismen*

$$d_X^{n,m} : X^{n,m} \rightarrow X^{n+1,m} \quad \text{und} \quad d_X^{n,m} : X^{n,m} \rightarrow X^{n,m+1}$$

für $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, s.d. gilt

$$d_X^{n+1,m} \circ d_X^{n,m} = 0, \quad d_X^{n,m+1} \circ d_X^{n,m} = 0 \quad \text{und} \quad d_X^{n+1,m} \circ d_X^{n,m} = d_X^{n,m+1} \circ d_X^{n,m}$$

Nehme jetzt an das der Doppelkomplex folgende Endlichkeitsbedingung erfüllt:

$$\text{für jedes } k \in \mathbb{Z} \text{ ist die Menge } \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n + m = k, X^{n,m} \neq 0\} \text{ endlich} \quad (4.3.1)$$

Wir konstruieren jetzt zu dem Doppel-Komplex X einen **einfachen Komplex** $s(X)$. Sei

$$s(X)^k = \bigoplus_{k=n+m} X^{n,m}$$

Seien jetzt

$$i_{n,m} : X^{n,m} \rightarrow \bigoplus_{k=n'+m'} X^{n',m'} \quad \text{und} \quad p_{n,m} : \bigoplus_{k=n'+m'} X^{n',m'} \rightarrow X^{n,m}$$

die natürlichen Morphismen $X^{n,m} \rightarrow s(X)^k$ bzw. $s(X)^k \rightarrow X^{n,m}$, Wir definieren

$$d_{s(X)}^k : s(X)^k \rightarrow s(X)^{k+1}$$

durch

$$p_{n',m'} \circ d_{s(X)}^k \circ i_{n,m} = \begin{cases} d_X^{n,m} & \text{falls } m = m' \\ (-1)^n d_X^{n,m} & \text{falls } n = n' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 4.12. *Die Sequenz $s(X), d_{s(X)}$ ist ein Komplex in \mathcal{C} , d.h. $d_{s(X)}^{k+1} \circ d_{s(X)}^k = 0$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch eine einfache Rechnung. □

4.4 Der Funktor $f^!$, Teil II

Sei $\mathcal{I}(Y)$ die volle Unterkategorie der injektiven Objekte von $\mathfrak{Sh}(Y, R)$. Aus Proposition 1.54 folgt, dass die natürliche Einbettung $\mathbf{K}^+(\mathcal{I}(Y)) \rightarrow \mathbf{D}^+(Y, R)$ eine natürliche Äquivalenz ist. Sei \mathcal{K}^\bullet der Komplex aus Lemma 4.10. Für $\mathcal{F} \in \mathbf{C}^+(\mathcal{I}(Y))$ definieren wir $f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{F})$ als einfachen Komplex des Doppelkomplexes $(f_{\mathcal{K}^{-q}}^!(\mathcal{F}^p))^{p,q}$. Dann ist wegen Lemma 4.9 1. $f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{F})$ ein Komplex von injektiven Objekten.

Sei $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus in $\mathbf{C}^+(\mathcal{I}(Y))$. Dann induziert $f_{\mathcal{K}^\bullet}^!$ einen Morphismus

$$f^!(\phi) : f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{F}) \longrightarrow f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{G})$$

Lemma 4.13. *Sei $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ null-homotop, dann ist $f^!(\phi)$ auch null-homotop.*

Beweis. Der Morphismus $f^!(\phi)$ ist gegeben durch

$$f^!(\phi)^{p,q} = p_{p,q} \circ f^!(\phi) \circ i_{p,q} = \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y,R)}(f_!(\underline{R}_X \otimes \mathcal{K}^{-q}), \phi^p) : f_{\mathcal{K}^{-q}}^!(\mathcal{F}^p) \longrightarrow f_{\mathcal{K}^{-q}}^!(\mathcal{G}^p)$$

Sei nun $s^k : \mathcal{F}^k \rightarrow \mathcal{G}^{k-1}$ gegeben mit $\phi^k = s^{k+1} \circ d_{\mathcal{F}}^k + d_{\mathcal{G}}^{k-1} \circ s^k$. Wir bezeichnen mit

$$\tilde{s}^{p,q} := \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(Y,R)}(f_!(\underline{R}_X \otimes \mathcal{K}^{-q}), s^p) : f_{\mathcal{K}^{-q}}^!(\mathcal{F}^p) \longrightarrow f_{\mathcal{K}^{-q}}^!(\mathcal{G}^{p-1})$$

den induzierten Morphismus und es gilt

$$f^!(\phi)^{p,q} = \tilde{s}^{p+1,q} \circ d'^{p,q} + d''^{p-1,q} \circ \tilde{s}^{p,q}$$

Wir definieren

$$\tilde{s}^k = \bigoplus_{k=p+q} \tilde{s}^{p,q} : (f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{F}))^k \longrightarrow (f_{\mathcal{K}^\bullet}^!(\mathcal{G}))^{k-1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f^!(\phi) \circ i_{p,q} &= \tilde{s}^{p+1,q} \circ d'^{p,q} + d''^{p-1,q} \circ \tilde{s}^{p,q} \\ &= \tilde{s}^{p+1,q} \circ d'^{p,q} + d''^{p-1,q} \circ \tilde{s}^{p,q} + \tilde{s}^{p,q+1} \circ (-1)^p d''^{p,q} - \tilde{s}^{p,q+1} \circ (-1)^p d''^{p,q} \\ &= \tilde{s}^{p+1,q} \circ d'^{p,q} + d''^{p-1,q} \circ \tilde{s}^{p,q} + \tilde{s}^{p,q+1} \circ (-1)^p d''^{p,q} + (-1)^{p-1} d''^{p-1,q} \circ \tilde{s}^{p,q} \\ &= (\tilde{s}^{k+1} \circ d^k + d^{k-1} \circ \tilde{s}^k) \circ i_{p,q} \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $f^!(\phi)$ null-homotop ist. □

Indem wir jetzt zum Quotienten übergehen, erhalten wir einen Funktor von triangulierten Kategorien:

$$f_{\mathbf{K}^\bullet}^! : \mathbf{K}^+(\mathcal{S}(Y)) \longrightarrow \mathbf{K}^+(\mathcal{S}(X))$$

Bevor wir das Hauptresultat beweisen können, brauchen wir noch eine kategorielle Aussage.

Proposition 4.14. *Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten. Sei \mathcal{S} die volle Unterkategorie der injektiven Objekte. Sei $I \in \mathbf{K}^+(\mathcal{S})$ und $X, Y \in \mathbf{K}^+(\mathcal{C})$. Jeder Quasi-Isomorphismus $X \rightarrow Y$ induziert einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(X, I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(Y, I)$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(X, I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathcal{C})}(X, I)$$

Beweis. Sei C der Abbildungskegel von $X \rightarrow Y$. Wir erhalten also ein Dreieck $X \rightarrow Y \rightarrow C \xrightarrow{\pm 1}$. Wegen 1.5.1 und Proposition 1.35 erhalten wir eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow H^k(X) \rightarrow H^k(Y) \rightarrow H^k(C) \rightarrow H^{k+1}(X) \rightarrow \dots$$

Da $X \rightarrow Y$ ein Quasi-Isomorphismus ist, folgt $H^k(C) = 0$ für alle k .

Wir wenden jetzt auf das Dreieck $X \rightarrow Y \rightarrow C \xrightarrow{\pm 1}$ den kohomologischen Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(-, I)$ (siehe Proposition 1.33) und erhalten die lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(C, I) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(Y, I) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(X, I) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(C[-1], I) \rightarrow \dots$$

Es reicht somit zu zeigen: Ist $D \in \mathbf{K}^+(\mathcal{S})$ mit $H^k(D) = 0$ für alle k , dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(D, I) = 0$.

Wir müssen also zeigen, dass jeder Morphismus von Komplexen $f : D \rightarrow I$ homotop zu 0 ist. Wir konstruieren eine Homotopie $s : D \rightarrow I[-1]$ über Induktion. Nehme an, wir haben schon $s^p : D^p \rightarrow I^{p-1}$ für alle $p \leq n$ konstruiert, s.d. gilt

$$s^p \circ d_D^{p-1} + d_I^{p-2} \circ s^{p-1} = f^{p-1} \quad \text{für } p \leq n$$

Wir müssen $s^{n+1} : D^{n+1} \rightarrow I^n$ konstruieren, s.d. die obige Formel für $p = n + 1$ gilt.

Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} D^{n-1} & \xrightarrow{d_D^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{\bar{d}_D^n} & \mathrm{Cok}(d_D^{n-1}) & \xrightarrow{i^n} & D^{n+1} \\ f^{n-1} \downarrow & & \swarrow s^n & & \downarrow \sigma^{n+1} & \nearrow & \\ I^{n-1} & \xrightarrow{d_I^{n-1}} & I^n & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{s^{n+1}} & \\ & & \searrow & & \nearrow & & \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (f^n - d_I^{n-1} \circ s^n) \circ d_D^{n-1} &= d_I^{n-1} \circ f^{n-1} - d_I^{n-1} \circ s^n \circ d_D^{n-1} \\ &= d_I^{n-1} \circ s^n \circ d_D^{n-1} + d_I^{n-1} \circ d_I^{n-2} \circ s^{n-1} - d_I^{n-1} \circ s^n \circ d_D^{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Abbildung $d_D^n : D^n \rightarrow D^{n+1}$ faktorisiert

$$D^n \xrightarrow{\bar{d}_D^n} \mathrm{Cok}(d_D^{n-1}) \xrightarrow{i^n} D^{n+1}$$

Da $f^n - d_I^{n-1} \circ s^n = 0$ auf dem Bild von d_D^{n-1} gilt, faktorisiert $f^n - d_I^{n-1} \circ s^n$ über $\text{Cok}(d_D^{n-1})$ und es gibt ein $\sigma^{n+1} : \text{Cok}(d_D^{n-1}) \rightarrow I^n$, s.d.

$$f^n - d_I^{n-1} \circ s^n = \sigma^{n+1} \circ \bar{d}_D^n$$

gilt. Da i^n ein Monomorphismus ist ($H^n(D) = 0$) und I^n ein injektives Objekt ist, existiert ein s^{n+1} mit $s^{n+1} = i^n \circ \sigma^{n+1}$, also

$$s^{n+1} \circ d_D^n = s^{n+1} \circ i^n \circ \bar{d}_D^n = \sigma^{n+1} \circ \bar{d}_D^n = f^n - d_I^{n-1} \circ s^n$$

Dies zeigt die erste Behauptung. Für die zweite Behauptung sei J eine injektive Auflösung von X , dann gilt

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{C})}(X, I) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{J})}(J, I) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathcal{C})}(J, I) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathcal{C})}(X, I)$$

wobei der erste Isomorphismus aus der ersten Aussage folgt und der zweite Isomorphismus aus Proposition 1.54. \square

Theorem 4.15. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von lokal-kompakten topologischen Räumen, s.d. $f_!$ endliche kohomologische Dimension hat. Dann existiert ein triangulierter Funktor*

$$f^! : \mathbf{D}^+(Y, R) \longrightarrow \mathbf{D}^+(X, R)$$

und ein Isomorphismus von Bi-Funktoren:

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^+(Y, R)}(Rf_!(-), -) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X, R)}(-, f^!(-))$$

d.h. $f^!$ ist zu $Rf_!$ rechts-adjungiert.

Beweis. Wir zeigen, dass $f_{\mathcal{K}\bullet}^!$ die gewünschten Eigenschaften hat.

Für $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}(Y)))$ und $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}(X)))$ gilt wegen Lemma 4.9 2., dass

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathfrak{S}_h(Y, R))}(f_!(\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{K}^\bullet), \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathfrak{S}_h(Y, R))}(\mathcal{G}, f_{\mathcal{K}\bullet}^! \mathcal{F})$$

Da $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{K}^\bullet$ ein Quasi-Isomorphismus ist, ist $\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{K}^\bullet$ wegen Lemma 4.8 1. ein Komplex von f -weichen Garben und daher gilt $Rf_! \mathcal{G} \simeq f_!(\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{K}^\bullet)$ in $\mathbf{D}^+(Y, R)$. Aus Proposition 4.14 folgt dann, dass

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathfrak{S}_h(Y, R))}(f_!(\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{K}^\bullet), \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(Y, R)}(Rf_! \mathcal{G}, \mathcal{F})$$

Andererseits ist $f_{\mathcal{K}\bullet}^! \mathcal{F}$ ein Komplex von injektiven \underline{R}_X -Moduln, daher gilt

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}^+(X, R)}(\mathcal{G}, f_{\mathcal{K}\bullet}^! \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X, R)}(\mathcal{G}, f_{\mathcal{K}\bullet}^! \mathcal{F})$$

Das zeigt die Behauptung. \square

Sei jetzt $g : Y \rightarrow Z$ ebenfalls eine stetige Abbildung zwischen lokal kompakten Räumen.

Proposition 4.16. *Nehme an $f_!$ und $g_!$ haben endliche kohomologische Dimension, dann hat $(f \circ g)_!$ ebenfalls endliche kohomologische Dimension und es gilt:*

$$(g \circ f)^! \simeq f^! \circ g^!$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Grothendieck Spektralsequenz für die Funktoren $f_!$ und $g_!$:

$$E_2^{p,q} = R^p g_! \circ R^q f_! \implies E_\infty^{p+q} = R^{p+q}(g \circ f)_!$$

Die zweite Behauptung zeigt man wie das analoge Resultat aus Korollar 2.17. \square

Betrachte das kartesische Quadrat von lokal-kompakten Räumen:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Proposition 4.17.

1. $f'_!$ hat endliche kohomologische Dimension
2. Es existiert ein kanonischer Morphismus von Funktoren

$$g^{-1} \circ Rf_! \simeq Rf'_! \circ g'^{-1}$$

3. Es existiert ein kanonischer Morphismus von Funktoren

$$g^! \circ Rf_* \simeq Rf'_* \circ g'^!$$

4. Es existiert ein Morphismus von Funktoren

$$g'^{-1} f'^! \longrightarrow f^! g^{-1}$$

Beweis. Sei $y' \in Y'$, dann ist $f'^{-1}(y')$ homöomorph zu $f^{-1}(g(x'))$. Daraus folgt, dass die kohomologische Dimension von $f'_!$ durch die von $f_!$ beschränkt ist.

Wir beweisen die zweite Aussage. Wegen $g^{-1} \circ f_! \simeq f'_! \circ g'^{-1}$ (siehe Proposition 3.11) reicht es zu zeigen, dass $g^{-1} \circ Rf_!$ bzw. $Rf'_! \circ g'^{-1}$ der derivierte Funktor von $g^{-1} \circ f_!$ bzw. $f'_! \circ g'^{-1}$ ist. Sei $\mathcal{G} \in D^+(Y, R)$ und \mathcal{I} eine injektive Auflösung.

$$g^{-1} \circ Rf_! \mathcal{G} \simeq g^{-1} \circ f_! \mathcal{I} \simeq R(g^{-1} \circ f_!) \mathcal{G}$$

Sei $\mathcal{S}(X)$ die Kategorie der f -weichen Garben und $\mathcal{S}(X')$ die Kategorie der f' -weichen Garben, dann bildet $g'^{-1} \mathcal{S}(X)$ in $\mathcal{S}(X')$ ab, da für ein $y \in Y$ und ein $y' \in Y'$ mit $g(y') = y$ die Abbildung g' einen Homöomorphismus $f'^{-1}(y') \rightarrow f^{-1}(y)$ induziert. Daraus folgt aber

$$Rf'_! \circ g'^{-1} \mathcal{G} \simeq f'_! \circ g'^{-1} \mathcal{I} \simeq R(f'_! \circ g'^{-1}) \mathcal{G}$$

Um die dritte Aussage zu beweisen schreiben wir

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{G}, f^! Rg_* \mathcal{F}) &\simeq \text{Hom}(Rf_! \mathcal{G}, Rg_* \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}(g^{-1} Rf_! \mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}(Rf'_! \circ g'^{-1} \mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}(g'^{-1} \mathcal{G}, f'^! \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}(\mathcal{G}, Rg'_* \circ f'^! \mathcal{F}) \end{aligned}$$

wobei der erste Isomorphismus aus Theorem 4.15, der zweite Isomorphismus aus Proposition 2.61, der dritte Isomorphismus aus Punkt 2, der vierte Isomorphismus wieder aus Theorem 4.15 und der fünfte Isomorphismus wieder aus Proposition 2.61 folgt.

Aus einer Variante von Yoneda's Lemma folgt dann die Aussage.

Für die vierte Aussage betrachten wir folgende Sequenz von Morphismen

$$Rf'_! g'^{-1} f^! \mathcal{F} \simeq g^{-1} Rf_! f^! \mathcal{F} \rightarrow g^{-1} \mathcal{F}$$

wobei der Isomorphismus aus 2.) folgt. Mit Hilfe von Theorem 4.15 erhalten wir den gesuchten Morphismus

$$g'^{-1} f^! \mathcal{F} \rightarrow f^! g^{-1} \mathcal{F}$$

□

4.5 Lokale Kohomologie

Sei X topologischer Raum $U \subset X$ eine offene Teilmenge und W eine abgeschlossene Teilmenge von U . Für eine Garbe $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ definieren wir

$$\Gamma_W(U, \mathcal{F}) = \ker(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \setminus W))$$

$\Gamma_W(U, \mathcal{F})$ ist also der Unter-Modul der Schnitte $\Gamma(U, \mathcal{F})$ deren Träger in W enthalten sind. Ist $V \subset U$ eine offene Teilmenge die W enthält, dann ist $\Gamma_W(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_W(V, \mathcal{F})$ ein Isomorphismus. Wir definieren daher $\Gamma_W(X, \mathcal{F})$ als $\Gamma_W(U, \mathcal{F})$, wobei U eine offene Teilmenge ist, die W als abgeschlossene Teilmenge enthält.

Proposition 4.18. *Die Prägarbe $U \mapsto \Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F})$ ist eine Garbe. Wir bezeichnen sie mit $\Gamma_W(\mathcal{F})$.*

Beweis. Sei $U \subset X$ offen und $\bigcup_{i \in I} U_i = U$ eine offene Überdeckung. Setze $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Sei $V_{ij} \subset U_{ij}$ s.d. $W \cap U_{ij}$ in V_{ij} abgeschlossen ist. Setze $V_i = \bigcup_{j \in I} V_{ij}$ und $V = \bigcup_i V_i$. Dann gilt $V_i \subset U_i$ bzw. $V \subset U$ und $W \cap U_i$ bzw. $W \cap U$ ist abgeschlossen in V_i bzw. V .

Betrachte die Abbildung

$$\Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{i \in I} \Gamma_{W \cap U_i}(U_i, \mathcal{F})$$

dies ist per Definition

$$\Gamma_{W \cap U}(V, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{i \in I} \Gamma_{W \cap U_i}(V_i, \mathcal{F})$$

Da die obige Abbildung von der injektiven Abbildung $\Gamma(V, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_i \Gamma(V_i, \mathcal{F})$ induziert wird, folgt die erste Eigenschaft einer Garbe. Betrachte nun Schnitte $s_i \in \Gamma_{W \cap U_i}(U_i, \mathcal{F}) \stackrel{Def}{=} \Gamma_{W \cap U_i}(V_i, \mathcal{F})$ mit $s_i = s_j$ in $\Gamma_{W \cap U_{ij}}(U_{ij}, \mathcal{F}) \stackrel{Def}{=} \Gamma_{W \cap U_{ij}}(V_{ij}, \mathcal{F})$. Diese verkleben sich zu einem Schnitt $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$. Der Schnitt s ist aber gleich 0 in $\Gamma(V \setminus (W \cap U), \mathcal{F})$, da er in $\prod_{i \in I} \Gamma(V_i \setminus (W \cap U_i), \mathcal{F})$ gleich null ist. Daraus folgt, dass $s \in \Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F}) \stackrel{Def}{=} \Gamma_{W \cap U}(V, \mathcal{F})$. □

Lemma 4.19. *Sei $W \subset X$ lokal abgeschlossen in X . Wenn \mathcal{F} eine welche Garbe auf X ist, dann ist $\Gamma_W \mathcal{F}$ auch welk.*

Beweis. Da $\Gamma_W(X, \mathcal{F}) = \Gamma_W(V, \mathcal{F})$ für eine offene Menge V ist in der W abgeschlossen ist, können wir oBdA annehmen, dass W in X abgeschlossen ist. Sei jetzt $U \subset X$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\Gamma_W(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F})$ surjektiv ist. Sei also $s \in \Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F})$. Wir erweitern s durch 0 auf $X \setminus Z$. Dies gibt einen Schnitt in $\Gamma_{Z \cap U}((X \setminus Z) \cup U, \mathcal{F})$. Da \mathcal{F} welk ist können wir die zu einem Schnitt auf ganz X erweitern, der automatisch in $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ liegt. □

Lemma 4.20. *Sei W lokal abgeschlossen und $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von welchen Garben. Dann ist*

$$0 \rightarrow \Gamma_W(\mathcal{F}') \rightarrow \Gamma_W(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_W(\mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

exakt. Insbesondere sind welche Garben Γ_W -injektiv.

Beweis. Sei $U \subset X$ offen, s.d. $W \cap U$ in U abgeschlossen ist. Betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma_{W \cap U}(U, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(U \setminus W, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \Gamma(U \setminus W, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U \setminus W, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Beachte, dass die zweite und dritte Zeile sowie alle Spalten exakt sind. Eine Diagrammjagd zeigt, dass dann auch die erste Zeile exakt ist. Daraus folgt die erste Aussage. Für die zweite Aussage müssen wir die Bedingungen in Definition 1.56 überprüfen. Die erste Bedingung folgt aus der Existenz einer injektiven und damit welchen Auflösung. Die zweite Bedingung folgt aus Lemma 2.46 2., die dritte Bedingung folgt aus der ersten Aussage. \square

Proposition 4.21. *Sei $Z \subset X$ abgeschlossen, $j : U \rightarrow X$ die Einbettung des Komplements von Z und $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{D}^+(X, R)$. Dann existiert ein natürliches Dreieck*

$$R\Gamma_Z(\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow Rj_*j^{-1}\mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{+1}$$

Beweis. Sei \mathcal{I} eine injektive (und damit welche) Auflösung von \mathcal{G}^\bullet . Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z \cap U}(U, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(U \setminus Z, \mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

Das liefert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_Z(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow j_*j^{-1}\mathcal{I} \longrightarrow 0$$

Mit Proposition 1.60 und der Tatsache, dass $R(j_*j^{-1}) = Rj_*j^{-1}$ gilt, erhalten wir die Aussage. \square

Proposition 4.22. *Sei $h : W \rightarrow X$ eine lokal-abgeschlossene Einbettung. Dann gilt:*

$$h^!(\cdot) \simeq h^{-1} \circ R\Gamma_W(\cdot)$$

Beweis. Sei $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^+(X, R)$ und $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^+(W, R)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(W, R)}(\mathcal{G}, f^!\mathcal{F}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(X, R)}(Rf_!\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(X, R)}(Rf_!\mathcal{G}, R\Gamma_W(\mathcal{F})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(W, R)}(f^{-1} \circ Rf_!\mathcal{G}, f^{-1}R\Gamma_W(\mathcal{F})) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(W, R)}(\mathcal{G}, f^{-1}R\Gamma_W(\mathcal{F}))
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt dann aus dem Yoneda-Lemma. \square

Korollar 4.23. *Sei $i : Z \hookrightarrow X$ abgeschlossen, $j : U \rightarrow X$ die Einbettung des Komplements von Z und $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{D}^+(X, R)$. Dann existiert ein natürliches Dreieck*

$$i^!\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow Rj_*j^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{+1}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus den Propositionen 4.21 und 4.22. \square

4.6 Orientierung und Dualität

Definition 4.24.

1. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und nehme an $f_!$ hat endliche kohomologische Dimension. Wir setzen

$$\omega_{X/Y} := f^! R$$

und nennen $\omega_{X/Y}$ den **relativen dualisierenden Komplex**. Ist $Y = \{pt\}$, dann setzen wir $\omega_X = \omega_{X/Y}$ und nennen ω_X den dualisierenden Komplex von Y .

2. Sei $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(X, R)$. Wir definieren

$$\mathbb{D}_X \mathcal{F} := R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \omega_X)$$

und nennen $\mathbb{D}_X \mathcal{F}$ den dualen Komplex von \mathcal{F} .

Lemma 4.25. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X, R)$, dann existiert ein kanonischer Morphismus

$$f_* \mathcal{G} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow f_* (\mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}) \quad (4.6.1)$$

Beweis. Betrachte die folgende Kette von Abbildungen:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Hom}(f^{-1} f_* \mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}(f^{-1}(f_* \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}), \mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}(f_* \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}, f_*(\mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F})) \end{aligned}$$

Der erste Abbildung folgt aus Korollar 2.20, der erste Isomorphismus aus Lemma 2.53 und der zweite Isomorphismus aus Theorem 2.16. \square

Lemma 4.26. Sei M ein flacher R -Modul und $\mathcal{F} \in \mathfrak{S}\mathfrak{h}(X, R)$. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus:

$$\Gamma_c(X, \mathcal{F}) \otimes M \xrightarrow{\simeq} \Gamma_c(X, \mathcal{F} \otimes \underline{M})$$

Insbesondere ist $\mathcal{F} \otimes \underline{M}$ weich, falls \mathcal{F} weich ist.

Beweis. Betrachte die Prä-Garbe ($U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes \underline{M}(U)$). Die linke Seite der obigen Abbildung sind die globalen Schnitte der Prägarbe und die rechte Seite sind die globalen Schnitte der assoziierten Garbe, dies liefert die Abbildung. Wir können oBdA annehmen, dass X kompakt ist, da sich Schnitte mit kompakten Träger auf ganz X trivial forsetzen lassen. Sei $X = \bigcup_j K_j$ eine endliche Überdeckung von X mittels kompakter Teilmengen. Wir erhalten eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_j \Gamma(K_j, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mu} \bigoplus_{j,k} \Gamma(K_j \cap K_k, \mathcal{F}).$$

Da M flach ist, ist die Sequenz auch nach tensorieren mit M exakt. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\lambda} & \bigoplus_j \Gamma(K_j, \mathcal{F}) \otimes M & \xrightarrow{\mu} & \bigoplus_{j,k} \Gamma(K_j \cap K_k, \mathcal{F}) \otimes M \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \underline{M}) & \xrightarrow{\lambda'} & \bigoplus_j \Gamma(K_j, \mathcal{F} \otimes \underline{M}) & \xrightarrow{\mu'} & \bigoplus_{j,k} \Gamma(K_j \cap K_k, \mathcal{F} \otimes \underline{M}) \end{array}$$

Wir zeigen zuerst, dass α injektiv ist. Für jedes $x \in X$ haben wir einen Isomorphismus

$$\varinjlim_{U \ni x} (\Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes M) \simeq \mathcal{F}_x \otimes M \simeq \varinjlim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{F} \otimes \underline{M}) \quad (4.6.2)$$

Wenn $\alpha(s) = 0$ für $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes M$ gilt, können wir eine endliche Überdeckung finden, s.d $\lambda(s) = 0$ gilt, daraus folgt aber $s = 0$. Indem wir die Argumentation für K_j und $K_j \cap K_k$ wiederholen, zeigen wir, daß auch β und γ injektiv ist.

Wir zeigen jetzt, dass α surjektiv ist. Sei $t \in \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes M)$. Wegen 4.6.2 existiert eine endliche Überdeckung $X = \bigcup_j K_j$, s.d. $\lambda(t)$ im Bild von β liegt. Aus der Injektivität von γ folgt dann, dass t im Bild von α liegt. \square

Proposition 4.27. *Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(Y, R)$ und $\mathcal{G} \in \mathfrak{Sh}(X, r)$. Es existiert ein kanonischer Morphismus:*

$$f_! \mathcal{G} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow f_! (\mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}) \quad (4.6.3)$$

Wenn \mathcal{F} flach ist, dann ist der obige Morphismus ein Isomorphismus.

Beweis. Beachte, dass der Morphismus 4.6.3 vom Morphismus 4.6.1 induziert wird. Wir nehmen jetzt an, dass \mathcal{F} flach ist. Sei $x \in X$, wir erhalten folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned} (f_! (\mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F})_x) &\simeq \Gamma_c(f^{-1}(x), \mathcal{G} \otimes f^{-1} \mathcal{F}) \\ &\simeq \Gamma_c(f^{-1}(x), \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}_x) \\ &\simeq \Gamma_c(f^{-1}(x), \mathcal{G}) \otimes \mathcal{F}_x \\ &\simeq (f_! \mathcal{G})_x \otimes \mathcal{F}_x \\ &\simeq (f_! \mathcal{G} \otimes \mathcal{F})_x \end{aligned}$$

wobei wir für den ersten und vierten Isomorphismus Proposition 3.6 und für den dritten Lemma 4.26 benutzen. \square

Definition 4.28. *Sei R ein Ring. Die **schwache globale Dimension** $wgld(R)$ ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, s.d. es für jeden R -Modul M eine flache Auflösung der Länge n gibt.*

Bemerkung 4.29.

1. *Hauptidealringe und reguläre lokale Ringe haben endliche schwache globale Dimension.*
2. *Man kann zeigen, dass jedes $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^+(X, R)$ zu einem nach unten beschränkten Komplex von flachen Garben quasi-isomorph ist.*

Proposition 4.30. *Sei $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^+(X, R)$, sei $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^+(Y, R)$ und $wgld(R) < \infty$, dann gilt*

$$Rf_! \overset{L}{\otimes} \mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} Rf_! \left(\mathcal{G} \overset{L}{\otimes} f^{-1} \mathcal{F} \right)$$

Beweis. Nehme an \mathcal{F} ist eine flache Garbe. Aus Proposition 4.27 folgt, dass der Funktor $\cdot \otimes f^{-1} \mathcal{F}$ weiche Garben in $f_!$ -azyklische Garben abbildet. Daraus folgt, dass $Rf_!(\cdot \otimes f^{-1} \mathcal{F})$ der derivierte Funktor von $f_!(\cdot \otimes f^{-1} \mathcal{F})$ ist. Da $Rf_!(\cdot) \otimes \mathcal{F}$ der derivierte Funktor von $f_!(\cdot) \otimes \mathcal{F}$ ist, folgt das Ergebniss für flache \mathcal{F} aus Proposition 4.27. Im allgemeinen Fall ersetzen wir \mathcal{F} mit einer flachen Auflösung. \square

Proposition 4.31. *Nehme an $f_!$ hat endlich kohomologische Dimension. Dann existiert ein kanonischer Morphismus von Funktoren:*

$$f^!(\cdot) \overset{L}{\otimes} f^{-1}(\cdot) \longrightarrow f^! \left(\cdot \overset{L}{\otimes} \cdot \right)$$

Beweis. Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{G} \in \mathbf{D}^+(X, R)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X, R)} \left(f^! \mathcal{F} \overset{L}{\otimes} f^{-1} \mathcal{F}_2, f^! \mathcal{G} \right) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X, R)} \left(Rf_! \left(f^! \mathcal{F}_1 \overset{L}{\otimes} f^{-1} \mathcal{F}_2 \right), \mathcal{G} \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(Y, R)} \left(Rf_! f^! \mathcal{F}_1 \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}_2, \mathcal{G} \right) \end{aligned}$$

wobei der letzte Isomorphismus aus Proposition 4.30 folgt. Setze jetzt $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}_2$, Dann ist der gesuchte Morphismus das Bild von $Rf_! f^! \mathcal{F}_1 \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1 \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}_2$ unter den obigen Isomorphismen. \square

Definition 4.32. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen lokal-kompakten Räumen. Die Abbildung f heißt topologische Submersion mit Faserdimension l , falls es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung V von x gibt, s.d. $U = f(V)$ offen in X ist und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^l & \xrightarrow{h} & V \\ & \searrow p & \downarrow f|_V \\ & & U \end{array}$$

wobei p die Projektion und h ein Homöomorphismus ist.

Proposition 4.33. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine topologische Submersion mit Faser Dimension l . Dann gilt:

1. $\mathcal{H}^k(f^! \underline{R}) = 0$ für $k \neq -l$ und $H^{-l}(f^! \underline{R})$ ist ein lokales System vom Rang 1.
2. Der Morphismus $f^! \underline{R} \otimes f^{-1}(\cdot) \rightarrow f^!(\cdot)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Zuerst beweisen wir die erste Aussage im Fall $X = \mathbb{R}^l$ und $Y = \{pt\}$. Sei $j : U \rightarrow X$ eine offene Teilmenge von X und $f^! R \rightarrow \mathcal{I}$ eine injektive Auflösung von $f^! R$. Es gilt

$$\begin{aligned} R\Gamma(U, f^! R) &\simeq \Gamma(U, \mathcal{I}) \\ &\simeq \Gamma(U, \mathcal{H}om(\underline{R}, \mathcal{I})) \\ &\simeq \mathcal{H}om(j^{-1} \underline{R}, j^{-1} \mathcal{I}) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(j^{-1} \underline{R}, j^{-1} f^! R) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(\underline{R}, (f|_U)^! R) \\ &\simeq R\mathcal{H}om((f|_U)_! \underline{R}, R) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(U, \underline{R}), R) \end{aligned}$$

Nehme außerdem an, dass U homöomorph zu \mathbb{R}^l ist, dann gilt

$$R\Gamma_c(U, \underline{R}) \simeq R[-l]$$

Sei jetzt \mathcal{I} eine injektive Auflösung von $f^! R$ und J eine Auflösung des R -Moduls R . Es gilt

$$\Gamma(U, \mathcal{I}) \simeq R\Gamma(U, f^! R) \simeq R\mathcal{H}om(R[-l], R) \simeq \mathcal{H}om^\bullet(R[-l], J) = J[l] \simeq R[l] \quad \text{in } D^b(R\text{-Mod})$$

Sei $x \in X$ und $B_\epsilon(x), B_{\epsilon'}(x)$ zwei Bälle um x mit Radien $\epsilon' < \epsilon$. Die Abbildung $R\Gamma_c(B_{\epsilon'}(X), \underline{R}) \rightarrow R\Gamma_c(B_\epsilon(X), \underline{R})$ induziert auf $R[l]$ die Identität. Somit gilt $\mathcal{I}_x \simeq R[l]$ für alle $x \in X$ und damit

$$\mathcal{H}^j(f^! R)_x \simeq \mathcal{H}^j(\mathcal{I})_x \simeq \mathcal{H}^j(\mathcal{I}_x) \simeq \begin{cases} R & \text{für } j = -l \\ 0 & \text{für } j \neq -l \end{cases}$$

Daraus folgt $\mathcal{H}^{-l}(f^! R)[l] \simeq f^! R$ und somit

$$\Gamma(U, \mathcal{H}^{-l}(f^! R)) \simeq \mathcal{H}om(H_c^l(U, \underline{R}), R)$$

Da $H_c^l(U, \underline{R}) \rightarrow H_c^l(X, \underline{R})$ ein Isomorphismus ist, folgt, dass $\mathcal{H}^{-l}(f^! R)$ lokal konstant vom Rang 1 ist.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall. Da wir lokal arbeiten, können wir $X = \mathbb{R}^l \times Y$ annehmen und das f die Projektion auf den zweiten Faktor ist. Sei $p : X \rightarrow \mathbb{R}^l$ die Projektion auf den ersten Faktor und $a_{\mathbb{R}^l}$ bzw. a_Y die Projektion auf den Punkt. Proposition 4.17 4. liefert einen Isomorphismus

$$p^{-1} \omega_{\mathbb{R}^l} = p^{-1} a^! R \rightarrow f^! a_Y^{-1} R = f^! \underline{R}.$$

Wir erhalten eine Sequenz von Morphismen:

$$p^{-1}\omega_{\mathbb{R}^l} \otimes f^{-1}\underline{R} \longrightarrow f^!\underline{R} \otimes f^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow f^!\mathcal{F}$$

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^l$ und $V \subset X$ offen. Wir erhalten folgende Isomorphismen

$$\begin{aligned} R\Gamma(U \times V, f^!\mathcal{F}) &\simeq R\mathrm{Hom}(\underline{R}_{U \times V}, f^!\mathcal{F}) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(Rf_!\underline{R}_{U \times V}, \mathcal{F}) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(U, \underline{R}_U) \otimes \underline{R}_V, \mathcal{F}) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(U, \underline{R}_U) \otimes \underline{R}, j^{-1}\mathcal{F}) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(U, \underline{R}_U), R) \otimes R\mathrm{Hom}(\underline{R}, j^{-1}\mathcal{F}) \\ &\simeq R\Gamma(U, \omega_{\mathbb{R}^l}) \otimes R\Gamma(V, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

□

Definition 4.34. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine topologische Submersion mit Faserdimension l . Definiere

$$\mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}} := \mathcal{H}^{-l}(\omega_{X/Y})$$

Die Garbe $\mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}}$ heißt **relative Orientierungsgarbe**. Für $Y = \{\mathrm{pt}\}$ schreiben wir $\mathcal{L}_X^{\mathrm{or}}$ und nennen $\mathcal{L}_X^{\mathrm{or}}$ Orientierungsgarbe von X . Insbesondere gilt daher

$$\omega_{X/Y} \simeq \mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}}[l]$$

Lemma 4.35. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine topologische Submersion mit Faserdimension l ,

1. Sei $\omega_{X/Y}^{\mathbb{Z}}$ bzw. $\mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}, \mathbb{Z}}$ der relativ dualisierende Komplex und die relative Orientierungsgarbe über \mathbb{Z} , dann gilt:

$$\omega_{X/Y} = \underline{R} \otimes \omega_{X/Y}^{\mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}} \simeq \underline{R} \otimes \mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}, \mathbb{Z}}$$

2. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus:

$$\mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}} \otimes \mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}} \simeq \underline{R}$$

Beweis. Beweis von 1.: Es gilt

$$\omega_{X/Y} = f^!(\underline{R}) = f^!(\underline{R} \otimes \underline{\mathbb{Z}}) \simeq f^{-1}(\underline{R}) \otimes f^!(\underline{\mathbb{Z}}) = \underline{R} \otimes \omega_{X/Y}^{\mathbb{Z}}$$

Die zweite Aussage folgt indem man die $-l$ -te Kohomologiegarbe nimmt.

Beweis von 2.: Wegen 1. reicht es $\mathcal{L}_{X/Y, \mathbb{Z}}^{\mathrm{or}} \otimes \mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}, \mathbb{Z}} \simeq \underline{\mathbb{Z}}$ zu zeigen. Beachte, dass $\mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}, \mathbb{Z}}$ lokal isomorph zu $\underline{\mathbb{Z}}$ ist. Die Kartenwechselabbildung ist daher Multiplikation mit ± 1 . Daher ist die Kartenwechselabbildung für $\mathcal{L}_{X/Y, \mathbb{Z}}^{\mathrm{or}} \otimes \mathcal{L}_{X/Y}^{\mathrm{or}, \mathbb{Z}}$ gleich $+1$. Daraus folgt aber die Aussage. □

Lemma 4.36. Sei $f : Y \rightarrow Z$ eine topologische Submersion mit Faserdimension m , $g : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $f \circ g$ eine topologische Submersion mit Faserdimension l . Sei $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^+(Z, R)$, dann gilt:

$$g^! \circ f^{-1}\mathcal{F} \simeq (f \circ g)^{-1}\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{X/Z}^{\mathrm{or}} \otimes g^{-1}\mathcal{L}_{Y/Z}^{\mathrm{or}}[l - m]$$

Insbesondere gilt

$$\omega_{X/Y} \simeq \mathcal{L}_{X/Z}^{\mathrm{or}}[l] \otimes g^{-1}\mathcal{L}_{Y/Z}^{\mathrm{or}}[-m]$$

Beweis. Wir haben folgende Abbildungen

$$g^! f^{-1} \mathcal{F} \otimes g^{-1} \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \longrightarrow g^! \circ (f^{-1} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m]) \simeq g^! f^! \mathcal{F} \simeq (f \circ g)^! \mathcal{F} \simeq (f \circ g)^{-1} \otimes \mathcal{L}_{X/Z}^{or}[l] \quad (4.6.4)$$

Sei jetzt $\bigcup_i U_i = Y$ eine offene Überdeckung von Y mit $\mathcal{L}_{Y/Z|U_i}^{or} \simeq \underline{R}$. Setze $V_i = g^{-1}(U_i)$. Sei $h : V_i \rightarrow X$ und $j : U_i \rightarrow Y$ die kanonischen offenen Einbettungen, dann gilt

$$\begin{aligned} \left(g^! f^{-1} \mathcal{F} \otimes g^{-1} \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \right)_{|V_i} &\simeq h^{-1} g^! f^{-1} \mathcal{F} \otimes h^{-1} g^{-1} \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \\ &\simeq g^! j^{-1} f^{-1} \mathcal{F} \otimes g^{-1} j^{-1} \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \\ &\simeq g^! j^{-1} f^{-1} \mathcal{F} \\ &\simeq g^! \left(j^{-1} f^{-1} \mathcal{F} \otimes j^{-1} \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \right) \\ &\simeq g^! j^{-1} \left(f^{-1} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \right) \\ &\simeq h^{-1} g^! \left(f^{-1} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \right) \\ &\simeq \left(g^! \left(f^{-1} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[m] \right) \right)_{|V_i} \end{aligned}$$

wobei wir $h^{-1} = h^!$ bzw. $j^{-1} = j^!$ und die Tatsache, dass das inverse Bild mit Tensorprodukt vertauscht (Lemma 2.53) benutzt haben. D.h. die erste Abbildungen von 4.6.4 ist lokal ein Isomorphismus, also ein Isomorphismus.

Die erste Aussage folgt dann nach tensorieren von beiden Seiten mit $g^{-1} \mathcal{L}_{Y/Z}^{or}[-m]$ und Lemma 4.35 2. . Die zweite Aussage folgt mit $\mathcal{F} = \underline{R}$. \square

Proposition 4.37. *Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann ist \mathcal{L}_X^{or} die zu $(U \mapsto \text{Hom}(H_c^n(U, \underline{R}), R))$ assoziierte Garbe.*

Beweis. Sei $U \subset X$ offen und homöomorph zu \mathbb{R}^n . Es gilt:

$$\begin{aligned} R\Gamma(U, \mathcal{L}_X^{or}[n]) &\simeq R\Gamma(U, \omega_X) \\ &\simeq R\text{Hom}(\underline{R}_U, \omega_X) \\ &\simeq R\text{Hom}(R\Gamma_c(X, \underline{R}_U), R) \\ &\simeq \text{Hom}(H_c^n(U, \underline{R}), R)[n] \end{aligned}$$

\square

Theorem 4.38 (Poincaré-Dualität). *Sei $R = k$ ein Körper und X eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Es existieren folgende kanonische Isomorphismen*

$$H^m(X, \mathcal{L}^{or}) \simeq H_c^{n-m}(X, \underline{k})^\vee$$

Ist X außerdem orientierbar über k , dann gilt

$$H^m(X, \underline{k}) \simeq H_c^{n-m}(X, \underline{k})^\vee$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
H^m(X, \mathcal{L}^{or}) &\simeq H^m(R\Gamma(X, \omega_X[-n])) \\
&\simeq H^0(R\Gamma(X, \omega_X[m-n])) \\
&\simeq H^0 R\mathcal{H}om(\underline{k}, \omega_X[m-n]) \\
&\simeq \mathcal{H}om(\underline{k}, \omega_X[m-n]) \\
&\simeq \mathcal{H}om(R\Gamma_c(X, \underline{k})[n-m], k) \\
&\simeq \mathcal{H}om(H_c^\bullet(X, \underline{k})[n-m], k) \\
&\simeq H_c^{n-m}(X, \underline{k})^\vee
\end{aligned}$$

□

Definition 4.39. Sei X lokal-kompakter topologischer Raum. Die **Borel-Moore Homologie** von X ist:

$$H_m^{BM}(X, R) := \mathbb{H}^{-m}(X, \omega_X)$$

Die Poincaré-Dualität liefert

$$H_m^{BM}(X, k) = \mathbb{H}^{-m}(X, \omega_X) \simeq H^{n-m}(X, \mathcal{L}^{or}) \simeq H_c^m(X, \underline{k})^\vee$$

Theorem 4.40 (Poincaré-Verdier Dualität). Sei $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(X, R)$. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$R\Gamma(X, \mathbb{D}_X \mathcal{F}) \simeq \mathbb{D}R\Gamma_c(X, \mathcal{F})$$

Ist $R = k$ ein Körper, dann haben wir die Isomorphismen:

$$\mathbb{H}^m(X, \mathbb{D}_X \mathcal{F}) \simeq \mathbb{H}_c^{-m}(X; \mathcal{F})^\vee$$

Beweis. Wir benutzen Theorem ?? im Fall $Y = \{pt\}$. Es gilt

$$R\Gamma(X, \mathbb{D}_X \mathcal{F}) \simeq R\Gamma R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, f^! R) \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(X, \mathcal{F}), R) \simeq \mathbb{D}R\Gamma_c(X, \mathcal{F})$$

Im Fall...

□

5 Schnitthomologie

Sei X ein topologischer Raum, dann bezeichnet $\mathring{c}X$ den offenen Kegel $X \times [0, \infty)/(x, 0) \sim (x', 0)$ über X (der offene Kegel über der leeren Menge ist per Definition ein Punkt).

5.1 PL-Räume

Ein p -dimensionaler **Simplex** σ ist die konvexe Hülle von $(p+1)$ -Punkten (v_0, \dots, v_p) im \mathbb{R}^n , s.d. die Vektoren $v_1 - v_0, \dots, v_p - v_0$ linear unabhängig sind. Jeder Punkt von σ kann eindeutig durch $\sum t_i v_i$ mit $0 \leq t_i \leq 1$ dargestellt werden. Die v_i heißen Ecken von σ und die t_i baryzentrische Koordinaten. Wir sagen, dass σ von seinen Ecken aufgespannt wird und schreiben $\sigma = v_0 \dots v_p$. Ein Simplex τ der von einer Teilmenge der Ecken von σ aufgespannt wird, heißt **Seite** von σ , wir schreiben $\tau \prec \sigma$.

Zwei Ordnungen der Simplexmenge $\{v_0, \dots, v_p\}$ heißen äquivalent, falls sie durch eine gerade Permutation ineinander übergehen. Jede dieser Äquivalenzklassen heißt **Orientierung** von σ . Ein **orientierter Simplex** ist ein Simplex zusammen mit einer Orientierung von σ .

Eine Menge K von Simplizes im \mathbb{R}^n heißt simplizialer Komplex, falls

1. ist $\sigma \in K$ und $\tau \prec \sigma$, dann ist auch $\tau \in K$
2. ist $\sigma, \tau \in K$, dann ist $\sigma \cap \tau \prec \sigma$ und $\sigma \cap \tau \prec \tau$
3. K ist *lokal-endlich*, d.h. für $x \in \sigma \in K$ existiert eine Umgebung von x die nur mit endlich vielen $\tau \in K$ nichtleeren Schnitt hat.

Die Menge $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ heißt das zu K gehörige **Polyeder**.

Eine Teilmenge $L \subset K$ heißt **Unterkomplex**, falls L selbst ein simplizialer Komplex ist.

Ein simplizialer Komplex L heißt lineare Unterteilung von K falls $|K| = |L|$ gilt und jeder Simplex τ von L in einem Simplex σ von K enthalten ist.

Sei $\sigma = v_0 \dots v_p$ ein p -Simplex. Wir definieren jetzt p -Simplices $\sigma_w = q_0 \dots q_p$ mit $\sigma_w \subset \sigma$ für $w \in S_{p+1}$ (die Permutationen von $\{0, \dots, p\}$) und

$$q_i = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i v_{w(j)}$$

Die Menge der σ_w zusammen mit ihren Seiten liefern eine lineare Unterteilung von σ . Indem wir in einem simplizialen Komplex K jeden Simplex so unterteilen erhalten wir eine lineare Unterteilung von K , die sogenannte baryzentrische Unterteilung.

Seien K, L simpliziale Komplexe. Eine simpliziale Abbildung $f : K \rightarrow L$, ist eine Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$, s.d. für jeden Simplex $\sigma \in K$ $f|_{\sigma}$ linear ist und f den Simplex Σ surjektiv auf einen Simplex in L abbildet.

Eine Triangulierung eines topologischen Raumes X besteht aus einem simplizialen Komplex K und einem Homöomorphismus $|K| \rightarrow X$.

Ein **PL-Raum** ist ein topologischer Raum zusammen mit einer Klasse \mathcal{T} von lokal-endlichen Triangulierungen T von X . Die Klasse \mathcal{T} muss dabei abgeschlossen unter linearer Unterteilung sein und falls $T, T' \in \mathcal{T}$ gilt, müssen T und T' eine gemeinsame lineare Unterteilung haben.

Ein **abgeschlossener PL-Unterraum** ist ein Unterkomplex einer geeigneten Triangulierung $T \in \mathcal{T}$ von X .

Eine **PL-Abbildung** ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen PL-Räumen, die für geeignete Triangulierungen T bzw. T' von X bzw. Y simplizial ist.

Ein PL-Raum M ist eine **PL-Mannigfaltigkeit** der Dimension n falls jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung hat, die PL-homöomorph zu einer offenen Menge im \mathbb{R}^n ist.

Definition 5.1. Eine 0-dimensionale PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit ist ein diskreter, topologischer Raum mit höchstens abzählbar vielen Punkten.

Eine n -dimensionale **PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit** ist ein PL-Raum X der Dimension n mit einer Filtration von abgeschlossenen PL-Unterräumen

$$X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} \supset \dots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

s.d. gilt

1. $S_{n-k} := X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$ ist eine PL-Mannigfaltigkeit der Dimension $n - k$, falls $S_{n-k} \neq \emptyset$.
2. $X \setminus X_{n-2}$ ist dicht.
3. für jeden Punkt $x \in S_{n-k}$ existiert eine kompakte $k - 1$ -dimensionale PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit L

$$L = L_{k-1} \supset L_{k-3} \supset \dots \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset$$

und ein PL-Homöomorphismus

$$h : U \longrightarrow B \times \overset{\circ}{L}$$

wobei U eine offene Umgebung U von x , B eine offener Ball um x in S_{n-k} . Die Abbildung h erhält die Stratifizierung, d.h. h bildet $U \cap X_{n-l}$ auf $B \times \overset{\circ}{L}_{k-l-1}$ ab.

Sei jetzt X ein PL-Raum und $T \in \mathcal{T}$. Eine **simpliciale i -Kette** ξ ist eine Funktion

$$\xi : \{\sigma \text{ orientierter } i\text{-Simplex} \mid \sigma \in T\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mit $\xi(-\sigma) = -\xi(\sigma)$ wobei $-\sigma$ die umgekehrte Orientierung trägt. Der **Träger** $|\xi|$ von ξ ist die Vereinigung aller abgeschlossener i -Simplizes σ in T mit $\xi(\sigma) \neq 0$. Da T lokal-endlich ist, ist der Träger von ξ ein abgeschlossener PL-Unterraum von X . Wir bezeichnen mit $C_i^T(X)$ die abelsche Gruppe der simplicialen i -Ketten. Elemente von $C_i^T(X)$ können dann durch formale unendliche Summen von orientierter i -Simplizes

$$\xi = \sum n_\sigma \sigma$$

dargestellt werden.

Für ein $\xi \in C_i^T(X)$ und eine kompatibel orientierte Unterteilung T' von T definieren wir eine i -Kette $\xi' \in C_i^{T'}(X)$ durch

$$\xi'(\sigma') = \begin{cases} \xi(\sigma) & \text{falls } \sigma' \text{ im kompatibel orientierten } i\text{-Simplex } \sigma \in T \text{ enthalten ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} C_i^T(X) &\longrightarrow C_i^{T'}(X) \\ \xi &\longmapsto \xi' \end{aligned}$$

Sind T und T' jetzt zwei Triangulierungen von X und $\xi \in C_i^T(X)$, $\xi' \in C_i^{T'}(X)$, dann heißen ξ und ξ' äquivalent falls es eine gemeinsame Unterteilung T'' von T und T' gibt, s.d. die Bilder von ξ und ξ' unter den Abbildungen

$$C_i^T(X) \longrightarrow C_i^{T''}(X) \longleftarrow C_i^{T'}(X)$$

in $C_i^{T''}(X)$ übereinstimmen.

Wir definieren die Gruppe der PL i -Ketten durch

$$C_i(X) = \varinjlim_{T \in \mathcal{T}} C_i^T(X)$$

Beachte dass Elemente ξ von $C_i(X)$ einen wohl-definierten Träger $|\xi|$ haben.

Sei σ ein Simplex der durch v_0, \dots, v_i erzeugt wird. Wir definieren einen Rand-Operator durch

$$\partial(\sigma) = \sum_{j=1}^i (-1)^j \langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i \rangle$$

wobei der $i-1$ -Simplex $\langle v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i \rangle$ die i -te Seite von σ ist, die durch weglassen von v_i entsteht. Dies induziert eine Abbildung

$$\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$$

für die $\partial \circ \partial = 0$ gilt, $(C_\bullet(X), \partial)$ ist also ein Komplex.

Seien jetzt X, Y PL-Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine PL-lineare Abbildung. Wir wählen Triangulierungen T bzw. T' von X bzw. Y , s.d. f bezüglich diesen Triangulierungen simplizial ist. Für einen p -Simplex $\sigma = v_0 \dots v_p$ definieren wir

$$f_* : C_p^T(X) \longrightarrow C_p^{T'}(Y)$$

$$\sigma = v_0 \dots v_p \mapsto \begin{cases} f(\sigma) = f(v_0) \dots f(v_p) & \text{falls } f(\sigma) \text{ } p\text{-Simplex} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die liefert eine Komplex-Abbildung

$$f_* : C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$$

und induziert eine Abbildung zwischen den Homologien.

Bemerkung 5.2. Die Homologie des Komplexes $C_\bullet(X)$ von PL-Ketten auf X ist isomorph zur Borel-Moore Homologie von X :

$$H_i(C_\bullet(X)) \simeq H_i^{BM}(X, \mathbb{Z})$$

Beschränken wir uns auf PL-Ketten mit kompakten Träger $C_\bullet^c(X)$ dann erhalten wir klassische singuläre Homologie

$$H_i(C_\bullet^c(X)) \simeq H_i(X, \mathbb{Z})$$

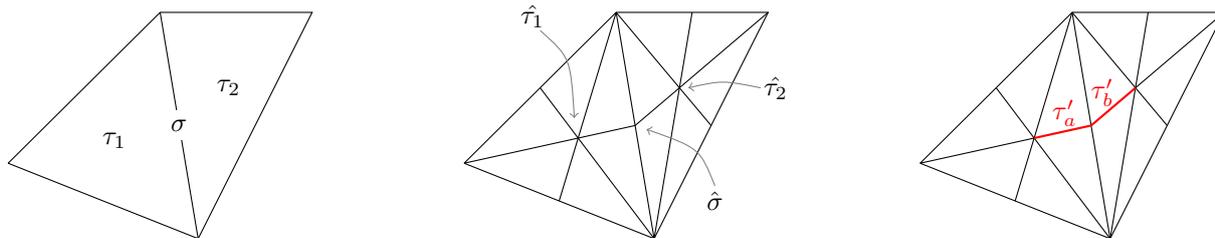
Ein Vorteil der Borel-Moore Homologie gegenüber der klassischen singulären Kohomologie ist es, dass man auch für nicht-kompakte Räume Fundamentalklassen definieren kann.

Eine PL-stratifizierte n -dimensionale Pseudo-Mannigfaltigkeit heißt **orientierbar** falls es eine Triangulierung T von X gibt, s.d. man jeden n -Simplex so orientieren kann, dass die Kette, die $1 \in \mathbb{Z}$ jedem n -Simplex mit der gegebenen Orientierung zuweist, ein n -Zykel ist. So ein n -Zykel heißt Orientierung von X und seine Homologie-Klasse

$$[X] \in H_n^{BM}(X, \mathbb{Z})$$

heißt **Fundamentalklasse** von X .

Wir definieren jetzt für einen $(n - k)$ -Simplex σ die duale simpliziale k -Kette ist $D_X(\sigma)$. Diese ist folgendermaßen erklärt: Sei T' die Baryzentrische Unterteilung von T . $D_X(\sigma)$ ist die Vereinigung der Simplexes τ' von T' , deren Ecken Baryzentren $\hat{\tau}$ von Simplexes τ in T sind, die σ enthalten.



Sei jetzt σ ein $(n - k)$ -Simplex. Wir definieren die Ko-Kette 1_σ durch

$$1_\sigma(\sigma') = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma = \sigma' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zuordnung $1_\sigma \mapsto D_X(\sigma)$ liefert einen natürlichen Morphismus von Komplexen:

$$\varphi : (C_T^{n-\bullet}(X), d) \longrightarrow (C_\bullet^{T'}, \partial) \tag{5.1.1}$$

welche folgende Homomorphismen induziert:

$$H^{n-k}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k^{BM}(X, \mathbb{Z})$$

$$H_c^{n-k}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(X, \mathbb{Z})$$

Für Mannigfaltigkeiten liefert dies Poincaré-Dualität.

5.2 PL Schnitt-Homologie

Definition 5.3. Eine Perversität p ist eine Funktion

$$p : \{2, 3, \dots\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit $p(2) = 0$ und $p(k) \leq p(k+1) \leq p(k) + 1$.

Beispiel 5.4. Es gibt einige ausgezeichnete Perversitäten:

- Null Perversität: $\bar{0}(k) = 0$
- Top Perversität: $\bar{t}(k) = k - 2$
- niedrigere mittlere Perversität: $\bar{m} = \lfloor \bar{t}/2 \rfloor$
- höhere mittlere Perversität: $\bar{n} = \lceil \bar{t}/2 \rceil$

Zwei Perversitäten \bar{p} und \bar{q} heißen komplementär, falls $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$ gilt.

Definition 5.5. Sei X eine n -dimensionale PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit. Die Gruppe $IC_{\bullet}^{\bar{p}}(X)$ der i -dimensionalen Schnitt-Ketten der Perversität \bar{p} ist definiert als

$$IC_{\bullet}^{\bar{p}}(X) = \{ \xi \in C_{\bullet}(X) \mid \dim(|\xi| \cap X_{n-k}) \leq i - k + \bar{p}(k), \\ \dim(|\partial\xi| \cap X_{n-k}) \leq i - 1 - k + \bar{p}(k), \text{ für alle } k \geq 2 \}$$

Die Rand-Operatoren

$$\partial_i : IC_{\bullet}^{\bar{p}}(X) \longrightarrow IC_{\bullet-1}^{\bar{p}}(X)$$

sind wegen der Bedingung an $|\partial\xi|$ wohldefiniert. Das heißt $IC_{\bullet}^{\bar{p}}(X)$ ist ein Unterkomplex von $C_{\bullet}(X)$.

Definition 5.6. Die Homologie Gruppen des PL Schnitt-Ketten Komplexes

$$IH_{\bullet}^{\bar{p}}(X) = H_{\bullet}(IC_{\bullet}^{\bar{p}}(X))$$

heißen Schnitt-Homologiegruppen zur Perversität \bar{p} der PL-stratifizierten Pseudo-Mannigfaltigkeit X .

Seien \bar{p} und \bar{q} zwei Perversitäten. Wir schreiben $\bar{p} \leq \bar{q}$, falls $\bar{p}(k) \leq \bar{q}(k)$ für alle $k \geq 2$. Insbesondere gilt $\bar{0} \leq \bar{p} \leq \bar{t}$ für alle Perversitäten \bar{p} . Falls $\bar{p} \leq \bar{q}$ gilt erhalten wir eine Inklusion

$$IC_{\bullet}^{\bar{p}}(X) \hookrightarrow IC_{\bullet}^{\bar{q}}(X)$$

welche den folgenden kanonischen Morphismus

$$IH_{\bullet}^{\bar{p}}(X) \longrightarrow IH_{\bullet}^{\bar{q}}(X)$$

induziert.

Proposition 5.7. Sei X eine n -dimensionale PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit. Die Poincaré-Dualitätsabbildung

$$H^{n-k}(X) \longrightarrow H_k^{BM}(X)$$

faktoriert über

$$H^{n-k}(X) \longrightarrow IH_k^{\bar{0}}(X) \longrightarrow IH_k^{\bar{p}}(X) \longrightarrow IH_k^{\bar{t}}(X) \longrightarrow H_k(X)$$

für alle Perversitäten \bar{p} .

Beweis. Sei T eine Triangulierung von X , s.d. jedes Stratum X_j ein Unterkomplex ist. Sei T' die baryzentrische Unterteilung von T . Für einen Simplex σ bezeichnen wir mit $\hat{\sigma}$ sein Baryzentrum. Wir bezeichnen mit T_i das i -te Skelett von T . Dies ist ein Unterkomplex von T' der von allen Ecken $\hat{\sigma}$ mit $\dim(\sigma) \leq i$ erzeugt wird. Das i -te Ko-Skelett D_i ist ebenfalls ein Unterkomplex von T' , welcher von allen Ecken $\hat{\sigma}$ mit $\dim(\sigma) \geq i$ aufgespannt wird. Beachte das die Unterkomplexe T_i und D_{i+1} jeweils von komplementären Mengen von Ecken aufgespannt werden.



Für einen m -Simplex $\eta \in T$ gilt $\dim(|D_i| \cap \eta) \leq m - i$, da $D_i \cap \eta$ als Unter-Komplex von T' nur von Ecken $\hat{\tau}$ aufgespannt wird, für die $i \leq \dim(\tau) \leq m$ gilt und die Simplizes von T' von Ecken $\hat{\sigma}_l, \dots, \hat{\sigma}_k$, mit $\sigma_l \subsetneq \sigma_{l+1} \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k$, aufgespannt werden. Insbesondere gilt, da die Strata X_j Unterkomplexe von T sind, $\dim(|D_i| \cap X_{n-k}) = n - k - i$.

Sei jetzt σ ein $(n-l)$ -Simplex. Da $D_X(\sigma)$ eine Vereinigung von Simplizes in T' deren Ecken Baryzentren $\hat{\tau}$ von Simplizes $\tau \supset \sigma$ sind, sieht man leicht, dass $D_X(\sigma)$ ein Unterkomplex von D_{n-l} ist. Insbesondere gilt dann

$$\dim(|D_X\sigma| \cap X_{n-k}) \leq (n-k) - (n-l) = l-k.$$

Da die Zuordnung (5.1.1) $\varphi : 1_\sigma \mapsto D_X(\sigma)$ ein Komplexmorphismus ist, gilt:

$$\partial D_X(\sigma) = \partial \varphi(1_\sigma) = \varphi(d1_\sigma) = \varphi(1_\sigma(\partial(\cdot))) = \varphi\left(\sum_{\substack{\sigma' \\ \sigma \text{ facet of } \sigma'}} \pm 1_{\sigma'}\right) = \sum_{\substack{\sigma' \\ \sigma \text{ facet of } \sigma'}} \pm D_X(\sigma')$$

d.h. $\partial D_X(\sigma)$ ist ein Unterkomplex von D_{n-l+1} , also

$$\dim(|\partial D_X\sigma| \cap X_{n-k}) = (n-l) - (n-l+1) = l-k-1.$$

Das bedeutet, dass die Abbildung $\varphi : C_T^{n-l}(X) \rightarrow C_l^{T'}(X)$ über $IC_l^{\bar{0}}(X)$ faktorisiert. Das zeigt aber die Aussage. □

Sei X eine n -dimensionale PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit. Dann ist $\mathbb{R} \times X$ mit der Stratifizierung $(\mathbb{R} \times X)_{i+1} = \mathbb{R} \times X_i$ eine $n+1$ -dimensionale PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit. Eine i -dimensionale Schnitt-Kette $\xi \in IC_i^{\bar{p}}(X)$ liefert eine $(i+1)$ -Kette $\mathbb{R} \times \xi$, die

$$\begin{aligned} \dim(|\mathbb{R} \times \xi| \cap (\mathbb{R} \times X)_{n+1-k}) &= \dim(\mathbb{R} \times (|\xi| \cap X_{n-k})) \\ &= 1 + \dim(|\xi| \cap X_{n-k}) \\ &\leq (i+1-k + \bar{p}(k)) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

erfüllt (für $\partial(\mathbb{R} \times \xi)$ ähnlich). D.h. wir erhalten eine $i+1$ -dimensionale Schnitt-Kette $\mathbb{R} \times \xi \in IC_{i+1}^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$, die Einhängung von ξ genannt wird.

Lemma 5.8. *Sei $\eta \in IC_i^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$ ein Zykel mit Träger in $\mathbb{R}_{\geq 0} \times X$. Dann existiert ein $\theta \in IC_{i+1}^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$ mit Träger in $\mathbb{R}_{\geq 0} \times X$ und $\eta = \partial\theta$.*

Beweis. Wir definieren durch geeignete Triangulierungen eine PL-Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \times X \\ (t_1, t_2, x) &\mapsto (t_1 + t_2, x) \end{aligned}$$

Für $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \eta$ gilt

$$\begin{aligned} \partial f_*(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \eta) &= f_*(\partial(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \eta)) \\ &= f_*({0} \times \eta + \mathbb{R}_{\geq 0} \times \partial\eta) \\ &= f_*({0} \times \eta) = \eta \end{aligned}$$

Setze $\theta := f_*(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \eta)$, wegen $\partial\theta = \eta \in IC_i^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$ und der Form der Stratifizierung $(\mathbb{R} \times X)_{i+1} = \mathbb{R} \times X_i$ folgt, dass $\theta \in IC_{i+1}^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$. \square

Proposition 5.9. *Die Einhängung induziert den Isomorphismus*

$$IH_i^{\bar{p}}(X) \xrightarrow{\cong} IH_{i+1}^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$$

Beweis. Wir können oBdA annehmen, dass X zusammenhängend ist indem wir für jede Zusammenhangskomponente getrennt argumentieren.

Wir zeigen zuerst die Surjektivität. Sei $\xi \in IC_{i+1}^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$ ein Zykel und T eine Triangulierung von $\mathbb{R} \times X$, s.d. $|\xi|$ und die Strata $(\mathbb{R} \times X)_j$ Unterkomplexe sind. Da $X \times \mathbb{R}$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, hat T höchstens abzählbar viele Ecken. Daher existiert ein $t \in \mathbb{R}$, s.d. $\{t\} \times X$ keine Ecken enthält. Sei ξ_t die Kette $\xi \cap \{t\} \times X$. Die Bedingung an t garantiert, dass $\{t\} \times X$ jeden j -Simplex in T in einem $(j-1)$ -Simplex schneidet. Daher gilt $\dim \xi_t = i-1$. Setze $\xi^+ = \xi \cap ([t, +\infty) \times X)$ und $\xi^- = \xi \cap ((-\infty, t] \times X)$. Dann sind ξ^+ und ξ^- Ketten in $IC_i^{\bar{p}}(X)$ und es gilt sowohl $\xi = \xi^+ + \xi^-$ als auch $\partial\xi^+ = -\partial\xi^- = \xi_t$. Daraus folgt

$$\partial(\xi^+ - \xi_t \times [t, +\infty)) = \xi_t - \partial\xi_t \times [t, +\infty) - \xi_t = 0$$

Das heißt $\xi^+ - \xi_t \times [t, +\infty)$ ist ein Zykel in $IC_{i+1}^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$ und hat Träger in $X \times [t, +\infty)$. Wegen Lemma 5.8 ist daher $\xi^+ - \xi_t \times [t, +\infty)$ ein Rand. Ein analoges Argument zeigt, dass $\xi^- - \xi_t \times (-\infty, t]$ ein Rand ist. Das bedeutet aber, dass $\xi = \xi^+ + \xi^- = \xi_t \times \mathbb{R}$ in $IH_{i+1}^{\bar{p}}(X \times \mathbb{R})$ gilt.

Wir zeigen die Injektivität. Sei $\eta \in IC_i^{\bar{p}}(X)$ ein Zykel, s.d. $\mathbb{R} \times \eta = \partial\gamma$ für ein $\gamma \in IC_{i+1}^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X)$ gilt. Wir müssen zeigen, dass η ein Rand ist. Wähle eine Triangulierung T , s.d. $\mathbb{R} \times \eta$ und γ Unterkomplexe sind. Wir finden wieder ein $t \in \mathbb{R}$, s.d. $\{t\} \times X$ keine Ecken von T enthält. Da wir alle Simplices transversal schneiden, folgt daraus, dass $\gamma_t = \gamma \cap \{t\} \times X \in IC_i^{\bar{p}}(X)$ und

$$\eta = (\mathbb{R} \times \eta) \cap (\{t\} \times X) = \partial\gamma \cap (\{t\} \times X) = \partial\gamma_t$$

\square

Sei jetzt L eine kompakte $(k-1)$ -dimensionale PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit mit Strata

$$L = L_{k-1} \supset \dots \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset$$

Sei $\overset{\circ}{c}L$ der offene Kegel mit Spitze v und der Stratifizierung

$$(\overset{\circ}{c}L)_i = \begin{cases} \overset{\circ}{c}L_{i-1} & i > 0 \\ \{v\} & i = 0 \end{cases}$$

Eine Schnitt-Kette $\xi \in IC_{i-i}^{\bar{p}}(L)$ liefert eine Kette $\overset{\circ}{c}\xi \in C_i(\overset{\circ}{c}L)$. Die Kette $\overset{\circ}{c}\xi$ erfüllt alle Perversitäts-Restriktionen auf $\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}$, aber möglicherweise nicht auf v . Beachte, dass $\overset{\circ}{c}\xi$ immer die Spitze v enthält und ebenso $\partial(\overset{\circ}{c}\xi)$ außer wenn ξ ein Zykel ist. Die Perversitätsbedingungen liefern dann

$$\overset{\circ}{c}\xi \in IC_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L) \quad \text{falls} \quad \begin{cases} i > k - p(k) & \text{für beliebiges } \xi \\ i \geq k - p(k) & \text{für Zykel} \end{cases}$$

Wir erhalten also eine Komplex-Abbildung

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{c} : \tau_{\bullet \geq k-p(k)} IC_{\bullet-1}^{\bar{p}}(L) &\longrightarrow IC_{\bullet}^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L) \\ \xi &\mapsto \overset{\circ}{c}L \end{aligned}$$

Proposition 5.10. *Der Komplex-Morphismus $\overset{\circ}{c}$ induziert folgende Isomorphismen*

$$IH_i(\overset{\circ}{c}L) \simeq \begin{cases} IH_{i-1}(L) & i \geq k-p(k) \\ 0 & i < k-p(k) \end{cases}$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass wenn ein Zykel $\xi \in IC_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L)$ nicht die Spitze v enthält, ξ selbst schon ein Rand ist. In diesem Fall ist $|\xi|$ nämlich für ein $\epsilon > 0$ in $[\epsilon, \infty) \times L$ enthalten. Da es einen PL-Isomorphismus $[\epsilon, \infty) \times L \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times L$ gibt, können wir Lemma 5.8 anwenden.

Wir zeigen zuerst die Surjektivität. Sei $\xi \in IC_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L)$ ein Zykel. Sei T eine Triangulierung von $\overset{\circ}{c}L$ sowie ξ und N_ϵ das Bild von $[0, \epsilon) \times L$ in $\overset{\circ}{c}L$. Wir können ϵ so wählen, dass N_ϵ als einzige Ecke die Spitze v enthält. Sei $\xi_\epsilon = \xi \cap \{\epsilon\} \times L$. Da wir alle Simplizes in T transversal schneiden gilt, dass $\xi_\epsilon \in IC_{i-1}^{\bar{p}}(L)$ und ξ_ϵ ein Zykel ist. Es gilt außerdem, dass $\overset{\circ}{c}\xi_\epsilon \in IC_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L)$ und dass $\overset{\circ}{c}\xi_\epsilon$ ein Zykel ist. Daraus folgt, dass $\overset{\circ}{c}\xi_\epsilon - \xi$ ein Zykel ist und Träger in $[\epsilon, \infty) \times L$ hat, also ein Rand ist. Daher gilt $\overset{\circ}{c}\xi_\epsilon = \xi$ in $IH_i(\overset{\circ}{c}L)$.

Wir zeigen die Injektivität. Sei $\eta \in \tau_{\bullet \geq k-p(k)} IC_{i-1}^{\bar{p}}(L)$, s.d. $\overset{\circ}{c}\eta = \partial\gamma$ für ein $\gamma \in IC_i^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L)$ gilt. Wie vorher wählen wir eine Triangulierung T von γ und $\overset{\circ}{c}\eta$ und ein $\epsilon > 0$, s.d. N_ϵ nur die Spitze v enthält. Setze $\gamma_\epsilon = \{\epsilon\} \times L \cap \gamma$. Dann gilt $\gamma_\epsilon \in IC_i^{\bar{p}}(L)$ und $\partial\gamma_\epsilon = \eta$. Dies zeigt die Injektivität. \square

Proposition 5.11. *Die Abbildung $\overset{\circ}{c}$ gefolgt von der Einschränkung auf das Komplement von der Spitze:*

$$\begin{aligned} IC_{\bullet-1}^{\bar{p}}(L) &\xrightarrow{\overset{\circ}{c} \setminus v} IC_{\bullet}^{\bar{p}}(\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}) \\ \xi &\mapsto \overset{\circ}{c}\xi \setminus v = \overset{\circ}{c}\xi \cap (\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

induziert einen Isomorphismus

$$IH_i^p(L) \longrightarrow IH_{i+1}^p(\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\})$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Proposition 5.9. Sei $i : \overset{\circ}{c}L \setminus \{v\} \rightarrow \overset{\circ}{L}$ die Einbettung und $\pi : \overset{\circ}{L} \setminus \{v\} \rightarrow (0, \infty)$ die Projektion. Durch eine ähnliche Argumentation wie in Lemma 5.8 sehen wir, dass ein Zykel in $IC_i^p(\overset{\circ}{c}L)$ der Träger in $\pi^{-1}([t, \infty))$ bzw. in $\pi^{-1}((0, t])$ für ein $t > 0$ hat, selbst ein Rand ist. Sei jetzt $\xi \in IC_{i+1}^p(\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\})$ ein Zykel in einer gegebenen Triangulierung T . Wähle ein $t > 0$, s.d. $\xi_t = \xi \cap \pi^{-1}(t)$ keine Ecke von T enthält, dann ist ξ homolog zu $i^*(\overset{\circ}{c}\xi_t)$. Das zeigt die Surjektivität. Sei nun $\eta \in IC_i^p(L)$ und $\gamma \in IC_{i+2}^p(\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\})$ mit $i^*(\overset{\circ}{c}\eta) = \partial\gamma$. Sei T eine Triangulierung in der η und γ definiert sind und sei $t > 0$ so gewählt, dass $\pi^{-1}(t)$ keine Ecke von T enthält. Dann gilt $\eta = \partial(\gamma \cap \pi^{-1}(t))$. \square

Korollar 5.12. *Sei L eine $k-1$ -dimensionale kompakte PL-stratifizierte Pseudomannigfaltigkeit. Die Inklusion $i : \overset{\circ}{c}L \rightarrow \overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}$ induziert Isomorphismen*

$$i^* : IH_i^p(\overset{\circ}{c}L) \rightarrow IH_i^p(\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}) \quad \text{für } i \geq k-p(k)$$

Beweis. Betrachte folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\bullet \geq k-p(k)} IC_{\bullet-1}^p(L) & \longrightarrow & IC_{\bullet-1}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ IC_{\bullet}(\overset{\circ}{c}L) & \longrightarrow & IC_{\bullet}(\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}) \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind wegen Proposition 5.10 und Proposition 5.11 Quasi-Isomorphismen. Daher ist die untere Abbildung ein Quasi-Isomorphismus für $i \geq k - p(k)$. \square

Sei jetzt $X = X_n \supset X_{n-2} \dots X_0$ eine PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit. Wir studieren jetzt die Garbe \mathcal{IC}_\bullet^p .

Seien $U \subset V$ offene Menge von X und T eine Triangulierung von V . Nehme eine Triangulierung T' von U , s.d. jeder Simplex in T' in einem Simplex in T enthalten ist. Wir konstruieren eine Abbildung $\rho_{UV} : C_i^T(V) \rightarrow C_i^{T'}(U)$. Sei $\xi = \sum_{\sigma \in T} n_\sigma \sigma$, dann ist $\rho_{UV}(\xi)$ gegeben durch

$$\rho_{UV}(\xi) = \sum_{\sigma' \in T'} n_{t(\sigma')} \sigma'$$

wobei $t(\sigma')$ der kleinste Simplex in T ist indem σ' enthalten ist. Falls $t(\sigma)$ ein j -Simplex ist mit $j > i$, dann definieren wir $a_{t(\sigma)} := 0$. Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$\rho_{UV} : C_i(V) \rightarrow C_i(U)$$

und damit eine Garbe \mathcal{C}_i . Die Rand-Abbildungen $\mathcal{C}_i(U) \rightarrow \mathcal{C}_{i-1}(U)$ kommutieren mit den Restriktionsabbildungen, daher erhalten wir einen Komplex von Garben $\mathcal{C}_\bullet(X)$. Der Unterkomplex $\mathcal{IC}_\bullet^p(X)$ von $\mathcal{C}_\bullet(X)$ wird dann analog zu Definition 5.5 definiert.

Proposition 5.13. *Die Garbe $\mathcal{IC}_i^p(X)$ ist weich für alle $i \geq 0$.*

Beweis. Sei K eine kompakte Untermenge von X und $\xi \in \Gamma(K, \mathcal{IC}_i^p)$. Wir müssen zeigen, dass ξ die Restriktion einer i -Schnittkette $\tilde{\xi} \in \Gamma(X, \mathcal{IC}_i^p)$ ist. Wir können annehmen, dass ξ von einem $IC_i^p(U)$ kommt, s.d. Z in U enthalten ist. Das heißt es existiert eine Triangulierung T von U in der die Strata $X_{n-k} \cap U$ Unterkomplexe sind. Die Idee ist folgende: Wir wollen ξ durch 0 erweitern. Das Problem ist, dass obwohl der Träger von $|\xi|$ abgeschlossen in U ist, er nicht unbedingt abgeschlossen in X ist. Wir schneiden daher Teile von ξ ab, die Z nicht selbst schneiden.

Sei T' eine baryzentrische Unterteilung von T . Für einen Ecke v von T sei T'_v der Stern von v in X , d.h. die Vereinigung aller Simplices in T' die v enthalten. Wegen der lokalen Endlichkeit ist T'_v eine abgeschlossene Menge von X .

Sei $\xi = \sum_{\tau' \in T'} a_{\tau'} \tau'$ und $\xi_v = \sum_{v \in \tau'} a_{\tau'} \tau'$. Es gilt $|\xi_v| = T'_v \cap |\xi|$.

Behauptung: Die Kette ξ_v ist in $IC_i^p(U)$. Wir müssen die Perversität-Bedingungen überprüfen. Die erste Bedingung $\dim(|\xi_v| \cap X_{n-k}) \leq i - k + p(k)$ ist wegen $|\xi_v| \subset |\xi|$ automatisch erfüllt. Wir müssen daher nur noch die Bedingung $\dim(|\partial \xi_v| \cap X_{n-k}) \leq i - 1 - k + p(k)$ überprüfen. Schreibe $\partial \xi_v = \sum b_{\sigma'} \sigma' + \sum b_{\pi'} \pi'$ wobei die $\{\sigma'\}$ die $i - 1$ Simplices von T' sind die v enthalten und $\{\pi'\}$ die Simplices sind die v nicht enthalten. Der Träger $|\sigma'|$ ist in $|\partial \xi|$ enthalten, daraus folgt

$$\dim(|\sigma'| \cap X_{n-k}) \leq \dim(|\partial \xi| \cap X_{n-k}) \leq i - 1 - k + p(k)$$

Außerdem gilt

$$\dim(|\pi'| \cap X_{n-k}) = \max\{j \mid |\pi'| \text{ und } X_{n-k} \text{ haben gemeinsamen } j\text{-Simplex}\}$$

Andererseits gilt, dass keine j -Seite von π' in einem j -Simplex von T enthalten ist. Da $X_{n-k} \cap U$ und $|\xi|$ Ketten sind die in der Triangulierung T definiert sind und $|\pi'| \subset \xi$ gilt, können wir folgern, dass wenn $|\pi'|$ und $X_{n-k} \cap U$ einen gemeinsamen j -Simplex in T' haben, dann hat $|\xi|$ und $X_{n-k} \cap U$ einen gemeinsamen $(j + 1)$ -Simplex in T . Daraus folgt

$$\dim(|\sum b_{\pi'} \pi'| \cap X_{n-k}) \leq (\dim(|\xi| \cap X_{n-k}) - 1) \leq i - 1 - k + p(k)$$

Das zeigt die Behauptung.

Wir kehren zum ursprünglichen Beweis zurück. Sei Σ die Mengen von Ecken von Simplizes die K schneiden. Setze $T'_K := \bigcup_{v \in \Sigma} T'_v$. und bemerke, dass dieser Unterkomplex abgeschlossen in X ist. Wir können daher die Triangulierung T'_K auf eine Triangulierung S von ganz X ausdehnen. Die Kette $\xi \cap T'_K$ ist ein Element von $IC_i^{p,S}(X)$, da sie denselben Träger wie $\sum_{v \in \Sigma} \xi_v$ hat und dieser, wegen der Behauptung, eine Schnittkette ist. \square

Da wir lieber Kohomologie betrachten (d.h. Differentiale vom Grad $+1$) betrachten wir $\mathcal{IC}_{n-\bullet}$ anstatt \mathcal{IC}_\bullet .

Korollar 5.14. *Wir haben den folgenden Isomorphismus*

$$\mathbb{H}^i(\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p) \simeq IH_{n-i}^p(X)$$

Beweis. Folgt aus $\Gamma(X, \mathcal{IC}_i^p(X)) = IC_i^p(X)$ und der Tatsache, dass eine weiche Garbe auf lokal-kompakten Räumen, die abzählbar im Unendlichen sind, azyklisch ist (siehe Proposition 3.17). \square

Proposition 5.15. *Sei $x \in X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$ und U eine Umgebung von x die PL-isomorph zu $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathring{c}L$ ist. Es gilt*

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{IC}_\bullet^p)_x = \begin{cases} IH_{i-n+k-1}(L) & i \geq n-p(k) \\ 0 & i < n-p(k) \end{cases}$$

Außerdem ist die Einschränkung $\mathcal{H}_i(\mathcal{IC}_\bullet^p)|_{X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}}$ für alle i und $k \geq 2$ eine lokal konstante Garbe auf $X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$.

Beweis. Wir haben folgende Komplexabbildungen

$$\tau_{\geq n-p(k)} IC_{\bullet-n+k-1}^p(L) \longrightarrow IC_{\bullet-n+k}^p(\mathring{c}L) \longrightarrow IC_{\bullet}^p(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathring{c}L) \simeq IC_{\bullet}^p(U) \longrightarrow (\mathcal{IC}_\bullet^p)_x$$

wobei die erste bzw. zweite Abbildung ein Quasi-Isomorphismus wegen Proposition 5.10 bzw. Proposition 5.9 ist. Wir müssen zeigen, dass der letzte Morphismus ein Quasi-Isomorphismus ist. Es gilt

$$(\mathcal{IC}_\bullet^p)_x = \varinjlim_V IC_\bullet^p(V) \simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} IC_\bullet^p(N_\epsilon)$$

wobei $N_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)^{n-k} \times C_\epsilon$ und C_ϵ das Bild von $[0, \epsilon) \times L$ in $\mathring{c}L$ ist. Da für alle $\epsilon > 0$ die Umgebung N_ϵ PL-isomorph zu $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathring{c}L$ ist, folgt die erste Behauptung. Da die Abbildung $H_i(IC_\bullet^p(U)) \rightarrow (\mathcal{H}_i(\mathcal{IC}_\bullet^p))_x$ eine Isomorphismus für alle $x \in X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$ ist, sind die Garben $\mathcal{H}_i(\mathcal{IC}_\bullet^p)|_{X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}}$ lokal konstant. \square

Wir definieren

$$U_k := X \setminus X_{n-k} \quad \text{damit gilt} \quad S_{n-k} = U_{k+1} \setminus U_k = X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$$

und bezeichnen mit $i_k : U_k \rightarrow U_{k+1}$ die Einbettung.

Nachdem wir jetzt die Halme von \mathcal{IC}_\bullet^p untersucht haben, wollen wir wissen wie der Schnittkomplex sich von Stratum zu Stratum verändert. Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\mathcal{IC}_\bullet^p|_{U_{k+1}} \longrightarrow i_{k*}(\mathcal{IC}_\bullet^p|_{U_k})$$

Über der offenen Menge U_k ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Sei $x \in S_{n-k}$ und U eine Umgebung von x , s.d. $U \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^{n-k} \times \mathring{c}L$. Aus dem Beweis von Proposition 5.15 folgt, dass

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{IC}_\bullet^p)_x \simeq IH_i^p(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathring{c}L) \quad (5.2.3)$$

andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_i(i_{k*}(\mathcal{IC}_{\bullet|U_k}^p))_x &\simeq \varinjlim_v IH_i^p(V \cap U_k) \\
&\simeq \varinjlim_v IH_i^p(V \setminus S_{n-k}) \\
&\simeq IH_i^p(\mathbb{R}^{n-k} \times (\mathring{c}L \setminus \{v\}))
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Proposition 5.16. *Die natürliche Abbildung*

$$\mathcal{IC}_{\bullet|U_{k+1}}^p \longrightarrow i_{k*}(\mathcal{IC}_{\bullet|U_k}^p)$$

induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{IC}_{n-\bullet|U_{k+1}}^p) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}^i(i_{k*}(\mathcal{IC}_{n-\bullet|U_k}^p))$$

für $i \leq p(k)$.

Beweis. Um zu beweisen, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist, reicht es die Halme zu betrachten. Über U_k ist die Abbildung ein Isomorphismus. Wir müssen also die Aussage nur für $x \in S_{n-k}$ beweisen. Sei also wie oben $x \in S_{n-k}$ und U eine Umgebung von x . Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{IC}_{\bullet-n+k}^p(\mathring{c}L) & \longrightarrow & \mathcal{IC}_{\bullet-n+k}^p(\mathring{c}L \setminus \{v\}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{IC}_{\bullet}^p(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathring{c}L) & \longrightarrow & \mathcal{IC}_{\bullet}^p(\mathbb{R}^{n-k} \times (\mathring{c}L \setminus \{v\})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathcal{IC}_{\bullet|U_{k+1}}^p)_x & \longrightarrow & (i_{k*}(\mathcal{IC}_{\bullet|U_k}^p))_x
\end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen auf der linken resp. rechten Seite sind nach Proposition 5.9 und Formel 5.2.3 bzw. 5.2.4 Quasi-Isomorphismen. \square

Definition 5.17. *Sei Y eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Orientierungsgarbe \mathcal{L}^{or} auf Y ist die lokal konstante Garbe vom Rang 1 assoziiert zur Prägarbe:*

$$U \mapsto H_n^{BM}(U)$$

Wir haben jetzt alles nötige zusammen um die Komplexe $\mathcal{IC}_{\bullet}^p(X)$ zu charakterisieren.

Theorem 5.18. *Die Komplexe $\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p(X)$ haben folgende Eigenschaften:*

1. $\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p$ ist ein beschränkter Komplex, der in negativen Graden gleich null ist.
2. $\mathcal{IC}_{n-\bullet|U_2}^p$ ist quasi-isomorph zur Orientierungsgarbe von U_2
3. $\mathcal{H}^i(\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p)_x = 0$ für $i > p(k)$, $x \in S_{n-k}$.
4. Die Abbildung $\mathcal{IC}_{n-\bullet|U_{k+1}}^p \rightarrow Ri_{k*}\mathcal{IC}_{n-\bullet|U_k}^p$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p)_x \longrightarrow \mathcal{H}^i(Ri_{k*}\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p)_x \quad \text{für } i \leq p(k), x \in S_{n-k}$$

Beweis. Punkt 1. ist klar aus der Konstruktion von $\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p$. Der zweite Punkt folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{IC}_{n-\bullet|U_2}^p = \mathcal{C}_{n-\bullet}$ die Garbe der simplizialen Ketten ist. Der dritte Punkt folgt aus Proposition 5.15 (beachte, dass wir hier $\mathcal{IC}_{n-\bullet}^p$ anstatt \mathcal{IC}_{\bullet}^p benutzen. Der letzte Punkt folgt aus Proposition 5.16 und der Tatsache, dass \mathcal{IC}_{\bullet}^p weich ist (siehe 3.15, beachte i_k ist abgeschlossene Einbettung, daher $i_{k*} = i_k!$). \square

Beispiel 5.19. Sei X eine PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit mit einer isolierten Singularität $\{x\}$, d.h. $X \setminus \{x\}$ ist eine PL-Mannigfaltigkeit. Sei außerdem X von gerader Dimension. Die Filtration

$$X = X_{2k} \supset X_{2k-1} \supset \dots \supset X_0$$

mit $X_j = \{x\}$ für $0 \leq j < 2k$ liefert eine Stratifizierung von X . Sei X kompatibel trianguliert. Die simplizialen i -Schnittketten für die mittlere Perversität sind

$$\{\xi \in C_i(X) \mid \dim(|\xi| \cap \{x\}) \leq i - k - 1, \dim(|\partial\xi| \cap \{x\}) \leq i - k - 2\}$$

$$\text{Für } i \leq k \text{ gilt: } IC_i(X) = IC_i(X \setminus \{x\}) = C_i(X \setminus \{x\})$$

$$\text{Für } i \geq k + 2 \text{ gilt: } IC_i(X) = C_i(X)$$

Daraus folgt $IH_i(X) = H_i(X \setminus \{x\})$ für $i \leq k - 1$ und $IH_i(X) = H_i(X)$ für $i \geq k + 2$. Aus

$$\ker(\partial : IC_{k+1}(X) \rightarrow IC_k(X)) = \ker(\partial : C_{k+1}(X) \rightarrow C_k(X))$$

und $IC_{k+2}(X) = C_{k+2}(X)$ folgt $IH_{k+1}(X) \simeq H_{k+1}(X)$. Außerdem gilt

$$\partial(IC_{k+1}(X)) = (\partial C_{k+1}(X)) \cap IC_k(X)$$

und $IC_k(X) = C_k(X \setminus \{x\})$ und damit $IH_k(X) \simeq \text{Im}(H_k(X \setminus \{x\}) \rightarrow H_k(X))$.

5.3 Garbentheoretische Schnittthomologie

Definition 5.20. Eine 0-dimensionale stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit ist ein diskreter, topologischer Raum mit höchstens abzählbar vielen Punkten.

Eine n -dimensionale **stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Raum X mit einer Filtration

$$X = X_n \supset X_{n-2} \supset X_{n-3} \dots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

von abgeschlossenen Unterräumen, s.d. gilt

1. $S_{n-k} := X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n - k$, falls $S_{n-k} \neq \emptyset$
2. $X \setminus X_{n-2}$ ist dicht in X
3. für jeden Punkt $x \in S_{n-k}$ existiert eine kompakte $k-1$ -dimensionale stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit L

$$L = L_{k-1} \supset L_{k-3} \supset \dots \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset$$

und ein Homöomorphismus

$$h : U \longrightarrow B \times \overset{\circ}{L}$$

wobei U eine offene Umgebung U von x , B eine offener Ball um x in S_{n-k} . Die Abbildung h erhält die Stratifizierung, d.h. h bildet $U \cap X_{n-l}$ auf $B \times \overset{\circ}{L}_{k-l-1}$ ab (der offene Kegel über der leeren Menge ist per Definition ein Punkt).

Die abgeschlossene Menge X_{n-2} wird auch **singulärer Ort** Σ der stratifizierten Pseudo-Mannigfaltigkeit genannt. Der Raum L wird Link bei x des Stratum S_{n-k} genannt.

Wir definieren wie vorher

$$U_k := X \setminus X_{n-k} \quad \text{und} \quad i_k : U_k \longrightarrow U_{k+1}$$

Ist \mathcal{F} ein Komplex von Garben dann schreiben wir \mathcal{F}_k für $\mathcal{F}|_{U_k}$.

Example 5.21. Sei X die folgende affine algebraische Varietät in \mathbb{C}^3 die durch $y^2 \cdot z = x^2$ gegeben ist.

PICTURE

Der singuläre Ort $\Sigma = X_2$ ist hier die komplexe Gerade $x = y = 0$. Um lokal normale Trivialität zu erhalten muss man noch den Ursprung als Stratum X_0 einfügen.

Definition 5.22 (Deligne Konstruktion). Sei X eine n -dimensionale stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit, p eine Perversität und \mathcal{L} ein lokales System auf U_2 . Wir definieren den Komplex $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})$ induktiv auf U_k :

$$\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_2 := \mathcal{L} \quad \text{auf } U_2$$

für $k \geq 2$ definieren wir $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_k$ auf U_k durch

$$\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_{k+1} := \tau_{\leq p(k)} Ri_{k*} \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_k$$

Es gilt schließlich $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L}) := \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_{n+1}$.

Wir führen folgendes Axiomensystem für einen Komplex von Garben ein:

Definition 5.23 (AX1). Sei S^\bullet ein Komplex von Garben und \mathcal{L} ein lokales System:

1. S^\bullet ist beschränkt, $S^i = 0$ für $i < 0$ und $S_2^\bullet = \mathcal{L}$
2. Für $x \in S_{n-k}$ gilt $\mathcal{H}^i(S_x^\bullet) = 0$ für $i > p(k)$.
3. Die Abbildung $S_{k+1}^\bullet \rightarrow Ri_{k*} S_k^\bullet$ ist ein Quasi-Isomorphismus bis zur Stelle $p(k)$.

Lemma 5.24. Nehme an S^\bullet erfüllt AX1. Dann ist

$$S_{k+1}^\bullet \simeq \tau_{\leq p(k)} Ri_{k*} S_k^\bullet \quad \text{in } \mathbf{D}^b(X)$$

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$S_{k+1}^\bullet \longleftarrow \tau_{\leq p(k)} S_{k+1}^\bullet \longrightarrow \tau_{\leq p(k)} Ri_{k*} S_k^\bullet$$

Der linke Pfeil ist ein Quasi-Isomorphismus wegen Bedingung 2 aus AX1, der rechte Pfeil ist ein Quasi-Isomorphismus wegen Bedingung 3. \square

Theorem 5.25. Der Komplex $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})$ erfüllt AX1. Jeder Komplex S^\bullet der AX1 erfüllt ist quasi-isomorph zu einem $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})$

Beweis. Das $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})$ AX1 erfüllt folgt direkt aus der Konstruktion. Sei umgekehrt S^\bullet ein Komplex der AX1 erfüllt. Dann gilt $S_2^\bullet = \mathcal{L} = \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_2$ wegen Bedingung 1. Nehme an es gilt $S_k^\bullet \simeq \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_k$, dann gilt auch $Ri_{k*} S_k^\bullet \simeq Ri_{k*} \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_k$ und somit

$$S_{k+1}^\bullet \simeq \tau_{\leq p(k)} Ri_{k*} S_k^\bullet \simeq \tau_{\leq p(k)} Ri_{k*} \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_k \simeq \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})_{k+1}$$

wobei der erste Isomorphismus aus Lemma 5.24 folgt. \square

Definition 5.26. Sei X eine stratifizierte Pseudo-mannigfaltigkeit, p eine Perversität und \mathcal{L} ein lokales System auf U_2 . Der Schnittkomplex auf X mit Koeffizienten in \mathcal{L} ist

$$\mathcal{IC}_p^*(X; \mathcal{L}) := \mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})$$

Die Schnittkohomologie von X mit Koeffizienten in \mathcal{L} gegeben durch

$$IH_p^*(X; \mathcal{L}) := \mathbb{H}^i(\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L}))$$

Proposition 5.27. Sei X eine PL-stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit und sei $\mathcal{IC}_*^{p, PL}(X)$ der Schnittkomplex aus Abschnitt 5.2. Dann erfüllt $\mathcal{IC}_{n-\bullet}^{p, PL}$ AX1 mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{or}$. Insbesondere gilt

$$IH_i^p(X) \simeq IH_p^{n-i}(X, \mathcal{L}^{or})$$

Beweis. Das folgt direkt aus Theorem 5.18. \square

6 Konstruierbarkeit

Definition 6.1. Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Die **kohomologische Dimension** $\dim_R(X)$ von X ist das kleinste $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ so daß

$$H_c^i(U, \mathcal{F}) = 0$$

für alle offenen Teilmengen $U \subset X$, $\mathcal{F} \in \mathfrak{Sh}(X, R)$ und $i > n$ gilt.

Annahme: Wir nehmen ab jetzt an, dass X endliche kohomologische Dimension hat.

Definition 6.2. Sei R ein kommutativer, noetherscher Ring mit 1.

1. Ein induktives System von R -Moduln $(A_i)_{i \in I}$ heißt **essentiell konstant** falls folgendes gilt

(a) Für alle $i \in I$ existiert ein $j \geq i$ mit

$$\ker(A_i \rightarrow A_j) = \ker(A_i \rightarrow \varinjlim A_k)$$

(b) Es existiert ein $i_0 \in I$, so dass $A_{i_0} \rightarrow \varinjlim A_i$ surjektiv ist.

2. Ein projektives System von R -Moduln $(A_i)_{i \in I}$ heißt **essentiell konstant** falls gilt

(a') Für jedes $i \in I$ existiert ein $j \geq i$ mit

$$\operatorname{Im}(A_j \rightarrow A_i) = \operatorname{Im}(\varprojlim A_k \rightarrow A_i)$$

(b') Es existiert ein $i_0 \in I$ so daß $\varprojlim A_i \rightarrow A_{i_0}$ injektiv ist.

Definition 6.3. Sei $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{D}^b(X)$.

1. \mathcal{G}^\bullet heißt **kohomologisch lokal konstant (klk)** falls $\mathcal{H}^\bullet \mathcal{G}^\bullet$ lokal konstant ist.

2. Sei $\mathfrak{X} : X = X_n \supset X_{n-1} \supset X_{n-2} \supset \dots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$ eine Filtration von X durch abgeschlossene Teilmengen. Der Komplex \mathcal{G}^\bullet heißt **\mathfrak{X} -kohomologisch lokal konstant (\mathfrak{X} -klk)** falls $\mathcal{H}^\bullet \mathcal{G}^\bullet$ lokal konstant auf jedem Stratum $X_i \setminus X_{i-1}$ für $i \in \{0, \dots, n\}$ ist.

3. Der Komplex \mathcal{G}^\bullet heißt **\mathfrak{X} -kohomologisch konstruierbar (\mathfrak{X} -kk)** falls er \mathfrak{X} -klk ist und die Halme $\mathcal{H}^\bullet \mathcal{G}_x^\bullet$ endlich erzeugte R -Moduln sind.

4. Der Komplex \mathcal{G}^\bullet heißt **kohomologisch konstruierbar (kk)** falls er folgendes erfüllt:

(KK1) Für $x \in X$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist das projektive System $\mathbb{H}_c^m(U_x, \mathcal{G}^\bullet)$ über alle offenen Umgebungen von x essentiell konstant und sein Limes ist endlich erzeugt.

(KK2) Für $x \in X$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist das induktive System $\mathbb{H}^m(U_x, \mathcal{G}^\bullet)$ über alle offenen Umgebungen von x essentiell konstant und sein Limes ist endlich erzeugt.

(KK3) Für $x \in X$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt $H^m(f_x^! \mathcal{G}^\bullet) \simeq \varprojlim \mathbb{H}_c^m(U_x, \mathcal{G}^\bullet)$ wobei U_x über alle offenen Umgebungen von x läuft und $f_x : \{x\} \rightarrow X$ die Einbettung ist.

Proposition 6.4. Sei \mathcal{G}^\bullet ein kohomologisch konstruierbarer Komplex, $P \subset Q$ offen in X mit $\overline{P} \subset Q$ und \overline{P} kompakt, dann ist das Bild von $\mathbb{H}_c^j(P, \mathcal{G}^\bullet)$ in $\mathbb{H}_c^j(Q, \mathcal{G}^\bullet)$ endlich erzeugt.

Beweis. Da X endliche kohomologische Dimension hat gilt $\mathbb{H}^j(Q, \mathcal{G}^\bullet) = 0$ für $j \gg 0$. Wir beweisen das Resultat durch absteigende Induktion. Nehme an das Resultat gilt für $i+$. Sei $E := \{U \subset Q \mid U \text{ offen, } \bar{U} \text{ kompakt, } \bar{U} \subset Q\}$ und $E^j = \{U \in E \mid \text{Im}(\mathbb{H}_c^j(U, \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}_c^j(Q, \mathcal{G}^\bullet)) \text{ ist endlich erzeugt}\}$. wir müssen $P \in E^j$ zeigen. Da R noethersch ist folgt aus $P \subset V$ mit $V \in E^j$, dass $P \in E^j$ ist. Es reicht daher für jede kompakte Teilmenge $K \subset Q$ eine Umgebung $V \in E^j$ zu finden. Aus (KK1) folgt das jedes $x \in Q$ eine Umgebung U_x besitzt die in E^j liegt. Da $K \subset Q$ kompakt ist können wir $U_1, \dots, U_k \in E_j$ finden, s.d. $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$ gilt.

Wir reduzieren zuerst auf den Fall $k = 2$. Betrachte die kompakte Menge $K' = K \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{k-2})$. Dann gilt $K' = U_{k-1} \cup U_k$. Der Fall $k = 2$ liefert uns ein $U'_{k-1} \in E^j$ mit $K' \subset U'_{k-1}$. Es gilt dann $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_{k-2} \cup U'_{k-1}$. Per absteigender Induktion können wir also auf den Fall $k = 2$ reduzieren.

Sei $k = 2$. Es existiert eine offene Umgebung V_1 von $K \setminus U_2$ s.d. $\bar{V}_1 \subset U_1$ gilt. Damit gilt dann auch $K \subset V_1 \cup U_2$ und wir können eine offene Umgebung V_2 von $K \setminus V_1$ finden, s.d. $\bar{V}_2 \subset U_2$ gilt. Dann ist $K \subset V_1 \cup V_2$ und wir müssen zeigen, dass $V_1 \cup V_2 \in E^j$ gilt. Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}_c^j(V_1, \mathcal{G}^\bullet) \oplus \mathbb{H}_c^j(V_2, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^j(U_1, \mathcal{G}^\bullet) \oplus \mathbb{H}_c^j(U_2, \mathcal{G}^\bullet) & & \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & \searrow \mu & \\ \mathbb{H}_c^j(V_1 \cup V_2, \mathcal{G}^\bullet) & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{H}_c^j(U_1 \cup U_2, \mathcal{G}^\bullet) & \xrightarrow{\nu} & \mathbb{H}_c^j(Q, \mathcal{G}^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \delta & & \\ \mathbb{H}_c^{j+1}(V_1 \cap V_2, \mathcal{G}^\bullet) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{H}_c^{j+1}(U_1 \cap U_2, \mathcal{G}^\bullet) & & \end{array}$$

wobei die Spalten ein Teil der Mayer-Vietoris Sequenz sind. Wir müssen zeigen, dass das Bild $\text{Im}(\nu \circ \beta)$ endlich erzeugt ist. Wir wissen bereits, dass $\text{Im}(\mu) = \text{Im}(\nu \circ \alpha)$ endlich erzeugt ist. Da R noethersch ist folgt dass auch $\nu(\text{Im} \beta \cap \text{Im} \alpha)$ endlich erzeugt.

Es reicht daher zu zeigen, dass $\nu(\text{Im}(\beta)/(\text{Im}(\beta) \cap \text{Im}(\alpha)))$ bzw. $\text{Im}(\beta)/(\text{Im}(\beta) \cap \text{Im}(\alpha))$ selbst endlich erzeugt ist. Es gilt aber $\text{Im}(\beta)/(\text{Im}(\beta) \cap \text{Im}(\alpha)) \simeq \text{Im}(\delta \circ \beta) \subset \text{Im}(\gamma)$. Der Modul $\text{Im}(\gamma)$ ist aber nach Induktionsannahme endlich erzeugt. \square

Proposition 6.5. *Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{G}^\bullet ein klk Komplex von Garben und $f_x : \{x\} \rightarrow M$ die kanonische Einbettung. Dann gilt:*

1. *Das induktive System $\mathbb{H}^i(U, \mathcal{G}^\bullet)$ (bzw. das projektive System $\mathbb{H}_c^i(U, \mathcal{G}^\bullet)$) ist auf der Menge der offenen Umgebungen von x , die homöomorph zu einem offenen Ball sind, konstant und der direkte Limes ist isomorph zu $H^i(\mathcal{G}_x^\bullet)$ (bzw. $H^{i-m}(\mathcal{G}_x^\bullet)$).*
2. *$f_x^! \mathcal{G}^\bullet = f_x^{-1} \mathcal{G}^\bullet[-m]$. Insbesondere gilt $H^i(f_x^! \mathcal{G}^\bullet) = H^{i-m}(\mathcal{G}_x^\bullet)$.*
3. *Wenn $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{G}^\bullet)$ endlich erzeugte Halme hat, dann ist \mathcal{G}^\bullet kohomologisch konstruierbar.*

Beweis. Sei U eine Umgebung von x und homöomorph zu einem Ball. Wir bemerken, dass $\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^\bullet)$ konstant auf U ist. Damit gilt $\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^\bullet)(U) = H^q(\mathcal{G}_x^\bullet)$. Wir verwenden die Spektralsequenzen

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H^p(U, \mathcal{H}^q(\mathcal{G}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(U, \mathcal{G}^\bullet) \\ E_2^{p,q} &= H_c^p(U, \mathcal{H}^q(\mathcal{G}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}_c^{p+q}(U, \mathcal{G}^\bullet) \end{aligned}$$

Sie kollabieren auf der zweiten Seite, da gilt

$$H^i(U, \mathcal{H}^\bullet \mathcal{G}^\bullet) = \begin{cases} H^\bullet(\mathcal{G}_x^\bullet) & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_c^i(U, \mathcal{H}^\bullet \mathcal{G}^\bullet) = \begin{cases} H_c^\bullet(\mathcal{G}_x^\bullet) & \text{für } i = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es folgt daher $\mathbb{H}^i(U, \mathcal{G}^\bullet) = H^i(\mathcal{G}_x^\bullet)$ und $\mathbb{H}_c^i(U, \mathcal{G}^\bullet) = H^{i-m}(\mathcal{G}_x^\bullet)$.

Wir beweisen die zweite Aussage in mehreren Schritten. Da wir mit $f_x^!$ die exzeptionelle Einschränkung auf einen Punkt betrachten, reicht es anzunehmen (indem wir auf einen genügend kleine Umgebung von x einschränken), dass der Komplex \mathcal{G}^\bullet konstante Kohomologie hat. Wir können außerdem annehmen, dass der Komplex (nach einer Verschiebung) nur Kohomologie in den Graden 0 bis p hat.

Wir beweisen die Aussage zuerst für eine konstante Garbe $\underline{G} = a^{-1}G$, wobei $a : M \rightarrow \{pt\}$ die Abbildung auf einen Punkt ist. Wir benutzen Lemma 4.36 und erhalten

$$f_x^! \underline{G} \simeq f_x^! a^{-1} G \simeq f_x^{-1} a^{-1} G \otimes \mathcal{L}_{\{x\}/\{pt\}}^{or} \otimes g^{-1} \mathcal{L}_{M/\{pt\}}^{or}[-m] = f_x^{-1} \underline{G}[-m]$$

Sei jetzt \mathcal{G}^\bullet ein Komplex der nur (konstante) Kohomologie im Grad 0 hat. Dann ist \mathcal{G}^\bullet quasi-isomorph zu $\mathcal{H}^0(\mathcal{G}^\bullet)$ und die Behauptung folgt auch in diesem Fall. Sei jetzt die Aussage für Komplexe bewiesen die Kohomologie im Grad 0 bis $l-1$ haben (bzw. Verschiebungen von solchen Komplexen), wir zeigen die Aussage für Komplexe mit Kohomologie im Grad 0 bis l . Sei also \mathcal{G}^\bullet ein Komplex mit Kohomologie im Grad 0 bis l . Wegen Definition 1.22 und Proposition 1.48 erhalten wir folgendes Dreieck:

$$\tau^{<l} \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \tau^{\geq l} \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{+1}$$

Dabei hat $\tau^{<l} \mathcal{G}^\bullet$ Kohomologie im Grad 0 bis $l-1$ und $\tau^{\geq l} \mathcal{G}^\bullet$ Kohomologie im Grad l . Wenden wir den Funktor $f_x^!$ an, so erhalten wir per Induktionsvoraussetzung

$$f_x^{-1} \tau^{<l} \mathcal{G}^\bullet[-m] \longrightarrow f_x^! \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow f_x^{-1} \tau^{\geq l} \mathcal{G}^\bullet[-m] \xrightarrow{+1}$$

Da wir auch ein Dreieck

$$f_x^{-1} \tau^{<l} \mathcal{G}^\bullet[-m] \longrightarrow f_x^{-1} \mathcal{G}^\bullet[-m] \longrightarrow f_x^{-1} \tau^{\geq l} \mathcal{G}^\bullet[-m] \xrightarrow{+1}$$

haben folgt nach (TR4) und der langen exakten Kohomologiesequenz, dass $f_x^! \mathcal{G}^\bullet \simeq f_x^{-1} \mathcal{G}^\bullet$.

Wir beweisen die dritte Aussage. Die Bedingungen (KK1) und (KK2) folgen aus der ersten Aussage. Die Bedingung (KK3) folgt aus

$$H^i(f_x^! \mathcal{G}^\bullet) = H^{i-m}(f_x^{-1} \mathcal{G}^\bullet) = H^{i-m}(\mathcal{G}_x^\bullet) = \varinjlim_{U \ni x} \mathbb{H}_c^i(U, \mathcal{G}^\bullet)$$

wobei wir Aussage 2. benutzt haben. □

Lemma 6.6. *Sei X eine stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit, Y ein lokal-kompakter topologischer Raum und betrachte $Z = Y \times X$ zusammen mit der Filtrierung $Z_i = Y \times X_i$. Sei $\pi : Z \rightarrow Y$ die Projektion und $X_y := \pi^{-1}(y) \simeq X$ die Faser. Nehme an \mathcal{G}^\bullet ist \mathfrak{Z} -konstruierbar, dann gilt:*

1. *Sei Y ein abgeschlossener Ball. Dann ist die natürliche Abbildung $\mathbb{H}_c^\bullet(Z, \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}_c^\bullet(X_y, \mathcal{G}^\bullet)$ ein Isomorphismus.*
2. *Nehme an X ist kompakt und dass jeder Punkt in Y ein Fundamentalsystem von Umgebungen hat, die homöomorph zu offenen Bällen sind. Dann ist $R\pi_* \mathcal{G}^\bullet$ klk. Ist zusätzlich Y kontrahierbar, dann ist $\mathbb{H}^\bullet(Z, \mathcal{G}^\bullet) \rightarrow \mathbb{H}^\bullet(X_y, \mathcal{G}^\bullet)$ ein Isomorphismus. Ist Y ein offener Ball der Dimension d , dann gilt $\mathbb{H}_c^j(Z, \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{H}^{j-d}(X_y, \mathcal{G}^\bullet)$.*

Beweis. Sei $p : Z \rightarrow X_y$ die Projektion und $i : X_y \rightarrow Z$ die Inklusion. Es gilt per Definition, dass

$$\mathbb{H}_c^\bullet(X_y, \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{H}_c^\bullet(X_y, i^{-1} \mathcal{G}^\bullet)$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{H}_c^\bullet(Z, \mathcal{G}^\bullet) \simeq \mathbb{H}_c^\bullet(X_y, Rp_* \mathcal{G}^\bullet)$$

da die Abbildung p eigentlich ist. Sie \mathcal{I}^\bullet eine injektive Auflösung von \mathcal{G}^\bullet . Es reicht daher zu zeigen, dass $Rp_* \mathcal{I}^\bullet \rightarrow i^{-1} \mathcal{I}^\bullet$ ein Quasi-Isomorphismus ist. Die Abbildung $Rp_* \mathcal{I}^\bullet = p_* \mathcal{I}^\bullet \rightarrow i^{-1} \mathcal{I}^\bullet$ ist folgendermaßen

gegeben. Sei $s \in \Gamma(U, p_*\mathcal{I}^\bullet) = \Gamma(p^{-1}(U), \mathcal{I}^\bullet)$. Dies liefert einen Schnitt in $\Gamma(U, i^{-1}\mathcal{I}^\bullet)$ nach der Konstruktion des direkten Bildes.

Wir beweisen die Aussage in mehreren Schritten. Sei X eine Mannigfaltigkeit, dann ist $\mathcal{H}^\bullet\mathcal{I}^\bullet$ lokal konstant. Sei $U \subset X_y$ offen und homöomorph zu einem offenem Ball, dann ist $p^{-1}(U) = Y \times U$ kontrahierbar und damit ist $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{I}^\bullet)$ konstant auf $p^{-1}(U)$. Daraus folgt, dass die Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^\bullet(p^{-1}(U), \mathcal{H}^\bullet(\mathcal{I}^\bullet)) \Rightarrow E_\infty^{p,q} = \mathbb{H}^\bullet(p^{-1}(U), \mathcal{I}^\bullet)$$

schon auf der zweiten Seite kollabiert, d.h. es gilt $E_2^{0,q} = H^0(p^{-1}(U), \mathcal{H}^q(\mathcal{I}^\bullet)) = E_\infty^q = \mathbb{H}^q(p^{-1}(U), \mathcal{I}^\bullet)$. Daraus folgt

$$\mathbb{H}^\bullet(U, Rp_*\mathcal{I}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^\bullet(p^{-1}(U), \mathcal{I}^\bullet) \simeq H^\bullet(\mathcal{I}_x^\bullet)$$

für jedes $x \in p^{-1}(U)$. D.h. für jedes $x \in X_y$ gilt

$$(\mathcal{H}^\bullet(Rp_*\mathcal{I}^\bullet))_x \simeq \lim_{\rightarrow} \mathbb{H}^\bullet(U, Rp_*\mathcal{I}^\bullet) \simeq H^\bullet(\mathcal{I}_x^\bullet) \simeq (\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{I}^\bullet))_x \simeq (\mathcal{H}^\bullet i^{-1}\mathcal{I}^\bullet)_x$$

d.h. $Rp_*\mathcal{I}^\bullet \rightarrow i^{-1}\mathcal{I}^\bullet$ ist ein Quasi-Isomorphismus und damit folgt die erste Aussage im Fall, dass X eine Mannigfaltigkeit ist.

Wir benutzen jetzt Induktion nach k . Sei $V_k = X \setminus X_{n-k}$ mit $n = \dim X$ und $T_k = X_k \setminus X_{k-1}$, $U_k = Y \times V_k$ und $S_{n-k} = Y \times Z_{n-k}$. Wir haben das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^i(U_k, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^i(U_{k+1}, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^i(S_{n-k}, \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma_i \\ \dots & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^i(V_k, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^i(V_{k+1}, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^i(T_{n-k}, \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Per Induktionsannahme sind die α_i Isomorphismen und die γ_i sind Isomorphismen da S_{n-k} eine Mannigfaltigkeit ist. Die β_i sind dann nach dem 5-er Lemma Isomorphismen. Für $k = n$ erhalten wir die erste Aussage.

Wir beweisen die zweite Aussage. Sei $y \in Y$ und B ein abgeschlossener Ball um y in Y . Da X kompakt ist, liefert die erste Aussage (mit $Z = B \times X$)

$$\mathbb{H}^\bullet(\pi^{-1}(B), \mathcal{G}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^\bullet(\pi^{-1}(y), \mathcal{G}^\bullet) \quad \text{für alle } y \in B$$

Sei \mathcal{I}^\bullet eine injektive Auflösung von \mathcal{G}^\bullet . Es gilt

$$\mathbb{H}^\bullet(\pi^{-1}(B), \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^\bullet\Gamma(\pi^{-1}(B), \mathcal{I}^\bullet) \simeq H^\bullet\Gamma(B, \pi_*\mathcal{I}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^\bullet(B, R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)$$

Sei U_y^n ein Fundamentalsystem von Umgebungen von y , dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^\bullet(\pi^{-1}(y), \mathcal{G}^\bullet) &\simeq H^\bullet\Gamma(\pi^{-1}(y), \mathcal{I}^\bullet) \\ &\simeq H^\bullet \varinjlim_{U_y^n \times X} \Gamma(U_y^n \times X, \mathcal{I}^\bullet) \\ &\simeq H^\bullet \varinjlim_{U_y^n} \Gamma(U_y^n, \pi_*\mathcal{I}^\bullet) \\ &\simeq H^\bullet(\pi_*\mathcal{I}^\bullet)_y \\ &\simeq (\mathcal{H}^\bullet R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)_y \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $R\pi_*\mathcal{G}^\bullet$ kohomologisch lokal konstant ist.

Wir nehmen jetzt an, dass Y kontrahierbar ist. Es gilt, dass $\mathbb{H}^\bullet(Z, \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{H}^\bullet(Y; R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)$. Da per Annahme Y kontrahierbar ist, ist $R\pi_*\mathcal{G}^\bullet$ kohomologisch konstant. Wir erhalten eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) \Rightarrow E_\infty^{p+q} = \mathbb{H}^{p+q}(Y, R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)$$

Da $H^p(Y, \mathcal{H}^q R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) = 0$ für $p \neq 0$ entartet die Spektralsequenz auf der zweiten Seite und wir erhalten

$$\mathbb{H}^k(Y, R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) \simeq H^0(Y, \mathcal{H}^k R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) = (\mathcal{H}^k R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)_y \quad \text{für alle } y \in Y$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $(\mathcal{H}^\bullet R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)_y \simeq \mathbb{H}^\bullet(X_y, \mathcal{G}^\bullet)$ gilt. wir haben

$$(\mathcal{H}^\bullet R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)_y \simeq \varinjlim_{U \ni y} \mathbb{H}^\bullet(U, R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) \simeq \varinjlim_{U \ni y} \mathbb{H}^\bullet(\pi^{-1}(U), \mathcal{G}^\bullet) \quad (6.0.1)$$

Für Umgebungen U die homöomorph zu einem abgeschlossenen Ball sind, gilt nach Aussage 1., dass $\mathbb{H}^\bullet(\pi^{-1}(U), \mathcal{G}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^\bullet(X_y, \mathcal{G}^\bullet)$. Das zeigt den zweiten Teil der zweiten Aussage.

Da X per Annahme kompakt ist, ist π eigentlich, daher gilt auch

$$\mathbb{H}_c^\bullet(Z, \mathcal{G}^\bullet) \simeq \mathbb{H}_c^\bullet(Y, R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)$$

Sei jetzt Y ein offener Ball der Dimension d . Wir haben folgende Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H_c^p(Y, \mathcal{H}^q R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) \Rightarrow E_\infty^{p+q} \simeq \mathbb{H}_c^{p+q}(Y; R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)$$

Da $\mathcal{H}^q R\pi_*\mathcal{G}^\bullet$ konstant ist gilt

$$\mathbb{H}_c^q(Y; R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) \simeq H_c^d(Y, \mathcal{H}^{q-d} R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) \simeq (\mathcal{H}^{q-d} R\pi_*\mathcal{G}^\bullet)_y$$

für alle $y \in Y$. Aus Formel (6.0.1) folgt dann

$$\mathbb{H}_c^q(Y; R\pi_*\mathcal{G}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^{q-d}(X_y, \mathcal{G}^\bullet)$$

□

Lemma 6.7. *Sei X eine stratifizierte Pseudo-mannigfaltigkeit und $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{D}^b(X, R)$. Nehme an \mathcal{G}^\bullet ist \mathfrak{X} -klk und sei $U = B \times \overset{\circ}{c}L$ eine Umgebung von $x \in S_{n-k}$. Dann gilt*

1. $\mathbb{H}^\bullet(U, Rj_{k*}\mathcal{G}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^\bullet(L, \mathcal{G}_{|L}^\bullet)$
2. $Rj_{k*}\mathcal{G}^\bullet$ ist \mathfrak{X} -klk auf U_{k+1} .

Beweis. Sei \mathcal{I}^\bullet eine injektive Auflösung von \mathcal{G}^\bullet . Es gilt

$$\mathbb{H}^\bullet(U, Rj_{k*}\mathcal{G}^\bullet) \simeq H^\bullet\Gamma(U, j_{k*}\mathcal{I}^\bullet) \simeq H^\bullet\Gamma(U \cap U_k, \mathcal{I}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^\bullet(U \cap U_k, \mathcal{G}^\bullet)$$

Weiterhin gilt $U \cap U_k \simeq B \times (\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}) \simeq B \times \mathbb{R} \times L$. Indem wir Lemma 6.6 2. mit $(Z = B \times \mathbb{R} \times L, X = L$ und $Y = B \times \mathbb{R}$ anwenden erhalten wir die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt dann direkt aus der ersten, da der Isomorphismus für jedes $y \in B$ gilt. □

Proposition 6.8. *Sei X eine stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit, $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{D}^b(X, R)$ sei \mathfrak{X} -klk und $x \in X$. Dann gilt:*

1. Das projektive System $\mathbb{H}_c^j(U, \mathcal{G}^\bullet)$ ist konstant über einer ausgezeichneten Umgebung von x .
2. Das induktive System $\mathbb{H}^j(U, \mathcal{G}^\bullet)$ ist konstant über einer ausgezeichneten umgebung von x .
3. (KK3) gilt für \mathcal{G}^\bullet .

4. Für jedes Stratum $i_Z : Z \rightarrow X$ von \mathfrak{X} , ist der Komplex $i_Z^! \mathcal{G}^\bullet$ *klk* auf Z .

5. Ist \mathcal{G}^\bullet \mathfrak{X} -*klk*, dann ist \mathcal{G}^\bullet auch *klk*.

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage. Sei $x \in S_{n-k}$ und sei $U \simeq B^{n-k} \times \overset{\circ}{c}L$ eine ausgezeichnete Umgebung von x . Sei $Z = U \cap S^{n-k} \simeq B^{n-k}$. Aus der kurzen exakten Sequenz 2.42 erhalten wir nach anwenden von $R\Gamma_c$ die lange exakte Sequenz

$$\dots \mathbb{H}_c^j(U \setminus Z, \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}_c^j(U, \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}_c^j(Z, \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \dots \quad (6.0.2)$$

Da $\mathcal{G}^\bullet|_{S_{n-k}}$ *klk* ist, folgt aus Proposition 6.5 1., dass $\mathbb{H}_c^j(Z, \mathcal{G}^\bullet)$ ein konstantes projektives System ist. Es gilt aber auch $U \setminus Z \simeq B^{n-k} \times (\overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}) \simeq B^{n-k+1} \times L$. Aus Lemma 6.6 2. folgt, dass

$$\mathbb{H}_c^j(U \setminus Z, \mathcal{G}^\bullet) \simeq \mathbb{H}^{j-n+k-1}(L, \mathcal{G}^\bullet). \quad (6.0.3)$$

Daher ist $\mathbb{H}_c^j(U \setminus Z, \mathcal{G}^\bullet)$ auch ein konstantes inverses System. Aus dem 5-er Lemma folgt, dass auch $\mathbb{H}_c^j(U, \mathcal{G}^\bullet)$ konstant über ausgezeichneten Umgebungen U von x ist.

Wir zeigen die dritte Aussage. Sei $\bar{U} \simeq \bar{B}^{n-k} \times cL$ eine abgeschlossene Umgebung von $x \in S_{n-k}$. Betrachte folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \{x\} & & & & \bar{U} \setminus \{x\} \\ & \searrow f_x & & \nearrow j & \\ & & \bar{U} & & \\ & \nearrow k & & \searrow l & \\ U & & & & \bar{U} \setminus U \end{array}$$

Wir wenden Korollar 4.23 auf das Paar (f_x, j) an und erhalten

$$f_{x!} f_x^! \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow Rj_* j^{-1} \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{+1}$$

andererseits wenden wir Korollar 2.42 auf das Paar (k, l) an und erhalten

$$k_! k^{-1} \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet \longrightarrow l_* l^{-1} \mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{+1}$$

Indem wir $R\Gamma$ auf das erste Dreieck und $R\Gamma_c$ auf das zweite Dreieck anwenden und die lange exakte Kohomologiesequenz nehmen, erhalten wir das folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^j(f_x^! \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}^j(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}^j(\bar{U} \setminus \{x\}, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow \\ & \downarrow \alpha_j & & \parallel & & \downarrow \gamma_j & \\ \longrightarrow & \mathbb{H}_c^j(U, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}^j(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathbb{H}^j(\bar{U} \setminus U, \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow \end{array}$$

Dafür müssen wir noch die Morphismen α_j und γ_j konstruieren und zeigen, dass das Diagramm kommutiert. Es gilt aber

$$\begin{aligned} & H^j(f_x^! \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma(\bar{U}, f_{x!} f_x^! \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma_c(\bar{U}, f_{x!} f_x^! \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma_c(\bar{U}, k_! i_! i^! k^{-1} \mathcal{G}^\bullet) \\ & \longrightarrow \mathbb{H}_c^j(U, \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma_c(\bar{U}, k_! k^{-1} \mathcal{G}^\bullet) \\ & \longrightarrow \mathbb{H}^j(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma_c(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) \end{aligned}$$

Die Abbildungen im linken Quadrat werden aus den Morphismen $i_!i^! \rightarrow id$ und $k_!k^{-1} \rightarrow id$ konstruiert. Für das zweite Dreieck gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^j(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) &\simeq H^j R\Gamma_c(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma(\bar{U}, \mathcal{G}^\bullet) \\ &\longrightarrow \mathbb{H}^j(\bar{U} \setminus \{x\}, \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma(\bar{U}, Rj_*j^{-1}\mathcal{G}^\bullet) \\ &\longrightarrow \mathbb{H}^j(\bar{U} \setminus U, \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma(\bar{U}, Rl_*l^{-1}\mathcal{G}^\bullet) \simeq H^j R\Gamma(\bar{U}, Rj_*Rm_*m^{-1}l^{-1}\mathcal{G}^\bullet) \end{aligned}$$

Die Abbildungen im rechten Quadrat werden aus den Morphismen $id \rightarrow Rj_*j^{-1}$ und $id \rightarrow Rm_*m^{-1}$ konstruiert. Dies zeigt die Kommutativität des Diagramms. Wir müssen zeigen, dass die β_j Isomorphismen sind. Dafür reicht es zu zeigen, dass die γ_j Isomorphismen sind. Setze $d := n - k - 1$. Wir haben die folgenden Homöomorphismen:

$$\bar{U} \simeq \bar{B}^{d+1} \times cL \simeq cS^d \times c(L) \simeq c(S^d * L)$$

wobei S^d die d -dimensionale Sphäre ist und $S^d * L$ der Verbund (join) der topologischen Räume S^d und L ist.¹ Wir haben

$$\bar{U} \setminus \{x\} = (0, 1] \times (S^d * L) \quad \text{und} \quad \bar{U} \setminus U = \{1\} \times (S^d * L)$$

Indem wir Lemma 6.6 2. für $Y = (0, 1]$ und $X = S^d * L$ anwenden erhalten wir den gewünschten Isomorphismus. Das zeigt, dass die α_j Isomorphismen sind und damit (KK3) gilt.

Wir zeigen die vierte Aussage. Sei $j : U_Z \rightarrow X$ das Komplement von Z in X . Wir haben nach 4.23 folgendes Dreieck $i_{Z!}i_Z^!\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet \rightarrow Rj_*j^{-1}\mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{+1}$. Indem wir j_k^{-1} gefolgt von $R\Gamma$ anwenden und die lange exakte Kohomologiesequenz betrachten erhalten wir

$$\dots \mathbb{H}^k(i_Z^!\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(i_Z^{-1}\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^k(i_Z^{-1}Rj_{Z*}j_Z^{-1}\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Da \mathcal{G}^\bullet \mathfrak{X} -klk ist, ist der mittlere Term für jedes k lokal-konstant. Nach Lemma 6.7 2. ist auch der dritte Term lokal-konstant und damit auch der erste, was zu zeigen war.

Wir beweisen die zweite Aussage. Sei $U \simeq B \times \overset{\circ}{c}L$ eine ausgezeichnete Umgebung von $x \in S_{n-k}$. Sei $i_k : B \times \{v\} \rightarrow U$ die Einbettung des Stratum und $j_k : B \times \overset{\circ}{c}L \setminus \{v\}$ die Einbettung des Komplements. Betrachte das Dreieck $i_{k!}i_k^!\mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet \rightarrow Rj_{k*}j_k^{-1}\mathcal{G}^\bullet \xrightarrow{+1}$ und wende den Funktor $R\Gamma$ an. Wir erhalten

$$\dots \longrightarrow \mathbb{H}^i(B, i_k^!\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^i(U, \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^i(U, Rj_{k*}j_k^{-1}\mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Wir betrachten jetzt das induktive System über offene Umgebungen U von x . Dann ist der erste Term wegen Aussage 4. und Proposition 6.5 1. konstant. Der dritte ist wegen Lemma 6.7 2. konstant. Wegen dem 5-er Lemma ist daher auch der mittlere konstant. Das zeigt die 2. Aussage.

Wir zeigen die fünfte Aussage. Sei also \mathcal{G}^\bullet \mathfrak{X} -cc. Wir beweisen die Aussage über Induktion nach $n = \dim X$. Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Nehme an die Aussage ist für alle stratifizierten Pseudo-Mannigfaltigkeiten X mit $\dim X < n$ bewiesen. Sei X n -dimensional, dann ist die Aussage für alle Links L von X bewiesen, insbesondere impliziert Proposition 6.4, dass $\mathbb{H}^\bullet(L, \mathcal{G}^\bullet)$ endlich erzeugt ist. Aus Formel (6.0.3) folgt, dass $\mathbb{H}_c^\bullet(U \setminus Z, \mathcal{G}^\bullet)$ endlich erzeugt ist. Der Term $\mathbb{H}_c^\bullet(Z, \mathcal{G}^\bullet)$ ist wegen Proposition 6.5 endlich erzeugt und damit ist wegen der langen exakten Sequenz (6.0.2) auch $\mathbb{H}_c^\bullet(U, \mathcal{G}^\bullet)$ endlich erzeugt. Zusammen mit Aussage 1. folgt, dass \mathcal{G}^\bullet (KK1) erfüllt. Um (KK2) zu zeigen reicht es wegen Aussage 2. zu zeigen, dass $\varinjlim_{U \ni x} \mathbb{H}^\bullet(U, \mathcal{G}^\bullet)$ endlich erzeugt ist. Sei \mathcal{I}^\bullet eine injektive Auflösung von \mathcal{G}^\bullet es gilt

$$(\mathcal{H}^\bullet \mathcal{G}^\bullet)_x \simeq (\mathcal{H}^\bullet \mathcal{I}^\bullet)_x \simeq H^\bullet(\mathcal{I}_x) \simeq H^\bullet(\varinjlim_{U \ni x} \Gamma(U, \mathcal{I}^\bullet)) \simeq \varinjlim_{U \ni x} H^\bullet(\Gamma(U, \mathcal{I}^\bullet)) \simeq \varinjlim_{U \ni x} \mathbb{H}^\bullet(U, \mathcal{G}^\bullet)$$

Da die linke Seite endlich erzeugt ist folgt (KK2) und (KK3) folgt aus 3. . □

¹ $S^d * L := S^d \times L \times [0, 1] / ((s_1, l, 0) \equiv (s_2, l, 0), (s, l_1, 1) \equiv (s, l_2, 1))$

Korollar 6.9.

1. Die konstante Garbe \underline{R} ist kk .
2. Die Funktion $x \rightarrow H^\bullet(f_x^! \mathcal{G}^\bullet)$ ist lokal konstant.
3. Ist \mathcal{G}^\bullet \mathfrak{X} - kk auf U_k , dann ist $Rj_{k*} \mathcal{G}^\bullet$ \mathfrak{X} - kk auf U_{k+1} .

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Proposition 6.8. und der Tatsache, dass \underline{R} offensichtlich \mathfrak{X} - kk ist.

Wir beweisen die zweite Aussage. Sei $x \in S_{n-k}$ und sei $g_x : \{x\} \rightarrow S_{n-k}$ die Inklusion. Dann gilt $f_x = j_k \circ g_x$ und daher $f_x^! = g_x^! \circ j_k^! = g_x^{-1}[-(n-k)]j_k^!$ wegen 6.5 2. Wir erhalten also

$$H^u(f_x^! \mathcal{G}^\bullet) \simeq H^{i-n+k}(j_k^! \mathcal{G}^\bullet)_x$$

Da wegen Proposition 6.8 4. $j_k^! \mathcal{G}^\bullet$ kk auf S_{n-k} ist folgt die Aussage.

Wir zeigen die dritte Aussage. Wir wissen bereits, dass $Rj_{k*} \mathcal{G}^\bullet$ \mathfrak{X} - kk ist. Es bleibt zu zeigen, dass $H^\bullet(Rj_{k*} \mathcal{G}^\bullet)_x$ für $x \in S_{n-k}$ endlich erzeugt ist. Wegen Lemma 6.7 1. ist dies die Gleichung $\mathbb{H}^\bullet(L, \mathcal{G}^\bullet|_L)$. Wegen Proposition 6.8 ist \mathcal{G}^\bullet kk und damit sind wegen Proposition 6.4 und der Kompaktheit von L die Moduln $\mathbb{H}^\bullet(L, \mathcal{G}^\bullet|_L)$ endlich erzeugt. Das zeigt die Aussage. \square

Proposition 6.10. Sei (X, \mathfrak{X}) eine stratifizierte Pseudo-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{G}^\bullet \in \mathbf{D}^b(X, R)$ erfülle (AX1) für ein lokales System \mathcal{L} auf U_2 . Dann ist \mathcal{G}^\bullet \mathfrak{X} - kk und kk .

Beweis. Wegen Theorem 5.25 und Proposition 6.8 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})$ \mathfrak{X} - kk ist. Das lokale System \mathcal{L} ist \mathfrak{X} - cc auf U_2 und $\mathcal{P}^\bullet(\mathcal{L})$ wird durch sukzessives Anwenden von Rj_{k*} und $\tau_{\leq p(k)}$ konstruiert. Beide Operationen erhalten aber die \mathfrak{X} - kk Eigenschaft. \square

7 Appendix

7.1 Injektive R -Moduln

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

Lemma 7.1. Ein R -Modul I ist genau dann injektiv, wenn für jedes Ideal \mathfrak{a} von R und jede R -lineare Abbildung $f : \mathfrak{a} \rightarrow I$ eine Erweiterung $\tilde{f} : R \rightarrow I$ existiert.

Beweis. Wenn I injektiv ist, kann per Definition jede Abbildung $f : \mathfrak{a} \rightarrow I$ zu einer Abbildung $\tilde{f} : R \rightarrow I$ erweitert werden.

Wir beweisen die Rückrichtung. Nehme an, wir haben folgendes Diagramm gegeben

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & N \\ & & \downarrow & & \\ & & I & & \end{array}$$

Wir müssen einen Morphismus \tilde{f} finden, der das Diagramm kommutativ macht. Wir können oBdA annehmen, dass $M \subset N$ und α die kanonische Einbettung ist. Betrachte die partielle geordnete Menge P von Paaren (L, g) s.d. $M \subseteq L \subseteq N$ und $g : L \rightarrow I$ mit $g|_M = f$ wobei $(L, g) \leq (L', g')$ wenn $L \subseteq L'$ und

$g'_L = g$. Sei nun $\{(L_i, g_i)\}$ eine aufsteigende Kette in P . Dann ist $L := \bigcup_i L_i$ ein Untermodul von N der M enthält. Definiere $g : L \rightarrow I$ durch $g(l) := g_i(l)$ für ein i mit $l \in L_i$. Das Paar (L, g) ist dann eine obere Schranke für die aufsteigende Kette $\{(L_i, g_i)\}$. Nach Zorns Lemma gibt es daher ein maximales Element (L, g) in P . Wir zeigen $L = N$ durch Widerspruch. Nehme an es existiert ein $x \in N \setminus L$. Definiere das Ideal $\mathfrak{a} = \{r \in R \mid rx \in L\}$ und die Abbildung $h : \mathfrak{a} \rightarrow I$ durch $h(r) := g(r \cdot x)$. Wir können die Abbildung h per Annahme zu einer Abbildung $\tilde{h} : R \rightarrow I$ erweitern.

Sei $\langle x \rangle$ der von $x \in N$ erzeugte R -Modul. Definiere $j : L + \langle x \rangle \rightarrow I$ durch $j(l + rx) = g(l) + r\tilde{h}(1)$. Wir müssen zeigen, dass j wohldefiniert ist. Für $l + rx = l' + rx$ gilt $l - l' = (r' - r)x$ und damit $r' - r \in \mathfrak{a}$. Daraus folgt

$$g(l - l') = g((r' - r)x) = h(r' - r) = \tilde{h}(r' - r) = (r' - r)\tilde{h}(1).$$

Dies zeigt, dass die Abbildung j wohl-definiert ist. Da $L \subsetneq L + \langle x \rangle$ und j die Abbildung g erweitert widerspricht dies der Maximalität von L , d.h. $L = N$. \square

Korollar 7.2. *Sei R ein nullteilerfreier Ring mit Quotientenkörper K , dann ist K ein injektiver R -Modul.*

Beweis. Wegen Lemma 7.1 reicht es zu zeigen, dass eine R -lineare Abbildung $f : \mathfrak{a} \rightarrow K$ zu einer R -linearen Abbildung $R \rightarrow K$ erweitert werden kann. Wir können oBdA $\mathfrak{a} \neq (0)$ annehmen. Wir definieren die Erweiterung durch $\tilde{f}(r) := f(ra)a^{-1}$ für irgendein $a \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$. Es bleibt zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist. Sei $a' \in \mathfrak{a}$. Es gilt $a'f(ra) = f(a'ra) = af(ra')$, also $f(ra)a^{-1} = f(ra')a'^{-1}$. \square

Definition 7.3. *Sei R nullteilerfrei. Ein R -Modul M heißt **divisibel** wenn für jedes $m \in M$ und $r \in R$ ein $m' \in M$ mit $rm' = m$ existiert.*

Proposition 7.4. *Sei R ein Hauptidealring. Ein R -Modul M ist genau dann injektiv wenn M divisibel ist.*

Beweis. Sei M injektiv, $r \in R$ und $m \in M$. Dies liefert die R -lineare Abbildung $f : (r) \rightarrow M$, $r'r \mapsto r'm$. Da M injektiv ist kann die f zu einer Abbildung $\tilde{f} : R \rightarrow M$ ausgedehnt werden. Es ist dann $m = f(r) = \tilde{f}(r) = r \cdot \tilde{f}(1)$. Das Element $\tilde{f}(1)$ liefert dann das gesuchte m' .

Sei umgekehrt M divisibel. Aufgrund von Lemma 7.1 und der Tatsache das R ein Hauptidealring ist, reicht es zu zeigen, dass jede R -lineare Abbildung $f : (r) \rightarrow M$ zu einer Abbildung $\tilde{f} : R \rightarrow M$ erweitert werden kann. Sei $m = f(r)$. Da M divisibel ist, existiert ein $m' \in M$ mit $m = rm'$. Die R -lineare Abbildung $\tilde{f} : R \rightarrow M$ mit $1 \mapsto m'$ liefert dann die gesuchte Erweiterung. \square

Lemma 7.5. *Die Kategorie \mathfrak{Ab} hat genügend viele injektive Objekte.*

Beweis. Sei ein \mathbb{Z} -Modul M gegeben. Konstruiere eine Surjektion $\mathbb{Z}^{\oplus I} \twoheadrightarrow M$ (indem man ein (im allgemeinen nicht-endliches) Erzeugendensystem $(m_i)_{i \in I}$ wählt). Sei K der Kern dieser Surjektion. Es gilt $M \simeq \mathbb{Z}^{\oplus I}/K \subset \mathbb{Q}^{\oplus I}/K$. Wegen Korollar 7.2 ist \mathbb{Q} ein injektiver, also divisibler \mathbb{Z} -Modul. Es ist leicht zu sehen, dass sowohl beliebige direkte Summen von divisiblen \mathbb{Z} -Moduln als auch Quotienten von divisiblen \mathbb{Z} -Moduln wieder divisibel sind. Dies zeigt, dass $\mathbb{Q}^{\oplus I}/K$ divisibel ist. Die Abbildung $M \rightarrow \mathbb{Q}^{\oplus I}/K$ liefert dann die gesuchte Einbettung von M in ein injektives Objekt. \square

Lemma 7.6. *Sei M ein divisibler \mathbb{Z} -Modul. Dann ist $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ mit $(rf)(x) = f(rx)$ ein injektiver R -Modul.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\text{Hom}_R(-, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M))$ ein exakter Funktor ist. Dies folgt aus

$$\text{Hom}_R(-, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R -, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, M)$$

und der Tatsache, dass M divisibel also injektiv ist. \square

Proposition 7.7. *Die Kategorie der R -Moduln hat genügend viele injektive Objekte.*

Beweis. Sei N ein R -Modul. Betrachte die Einbettung

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, N) \\ n &\mapsto \varphi_n := (r \mapsto rn) \end{aligned}$$

Wegen Lemma 7.5 finden wir einen injektiven \mathbb{Z} -Modul M und eine injektive Abbildung $N \rightarrow M$. Da $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ links exakt ist, ist die induzierte Abbildung $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ ebenfalls injektiv. Wegen Lemma 7.6 liefert die zusammengesetzte Abbildung $N \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M)$ die gewünschte Einbettung in ein injektives Objekt. \square

7.2 Direkter Limes von R -Moduln

Sei (I, \leq) eine teilgeordnete Menge, d.h. die Relation \leq erfüllt

1. $a \leq a$ für alle $a \in I$
2. $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Die teilgeordnete Menge (I, \leq) heißt gerichtet, falls für jedes $a, b \in I$ ein $c \in I$ mit $a \leq c$ und $b \leq c$ existiert.

Ein gerichtetes System von R -Moduln über I ist eine Familie von R -Moduln $(M_a)_{a \in I}$ und R -linearen Abbildungen $f_{ba} : M_a \rightarrow M_b$ für $a, b \in I$ mit $a \leq b$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f_{cb} \circ f_{ba} = f_{ca}$ für $a \leq b$ und $b \leq c$
2. $f_{aa} = \text{id}_{M_a}$ für $a \in I$.

Für $a \in I$ bezeichne i_a die kanonische Abbildung $M_a \rightarrow \bigoplus_{b \in I} M_b$. Wir definieren den **direkten Limes** des gerichteten Systems von R -Moduln als

$$\varinjlim_{a \in I} M_a := \frac{\bigoplus_{a \in I} M_a}{\langle i_b f_{ba} x_a - i_a x_a \mid a \leq b, x_a \in M_a \rangle}$$

Sei p die Projektion von $\bigoplus_{b \in I} M_b$ auf $\varinjlim_{a \in I} M_a$. Wir definieren

$$f_a := p \circ i_a : M_a \longrightarrow \varinjlim_{a \in I} M_a$$

dann gilt für $a \leq b$

$$f_b \circ f_{ba} = f_a$$

Lemma 7.8. Sei $(M_a)_{a \in I}$ ein gerichtetes System.

1. Jedes Element $x \in \varinjlim M_a$ ist gleich einem Element $f_a(x_a)$ für geeignetes $a \in I$ und $x_a \in M_a$.
2. Gilt $f_a(x_a) = 0$, dann existiert ein $b \geq a$ mit $f_{ba}(x_a) = 0$.

Beweis. Jedes Element x aus $\varinjlim M_a$ kann als endliche Linearkombination $\sum_b f_b(x_b)$ dargestellt werden. Wähle ein $a \in I$, dass größer als alle b ist, welche in der endlichen Summe vorkommen. Dann gilt

$$\sum_b f_b(x_b) = \sum_b f_a f_{ab}(x_b) = f_a \left(\sum_b f_{ab}(x_b) \right) = f_a(x_a)$$

für $x_a = \sum_b f_{ab}(x_b)$.

Nehme jetzt an, dass $f_a(x_a) = 0$ gilt. Dann können wir $i_a(x_a)$ als folgende endliche Summe schreiben:

$$i_a(x_a) = \sum_c i_{b_c} f_{b_c c} y_c - i_c y_c$$

Wähle ein $d \in I$ welches größer als alle Indizes b_c ist, welche in der endlichen Summe oben vorkommen. Es gilt

$$i_d f_{da} x_a = i_d f_{da} x_a - i_a x_a + \sum_c i_{b_c} f_{b_c c} y_c - i_c y_c$$

Die Summanden der endlichen Summe können folgendermaßen geschrieben werden:

$$i_{b_c} f_{b_c c} y_c - i_c y_c = i_d f_{dc} y_c - i_c y_c + i_d f_{db_c} (-f_{b_c c} y_c) - i_{b_c} (-f_{b_c c} y_c)$$

Daraus folgt

$$i_d f_{da} x_a = \sum_b i_d f_{db} z_b - i_b z_b$$

für endlich viele $b \in I$ und geeignete z_b . Aus der Eigenschaft der direkten Summe folgt daraus aber $z_b = 0$ für alle $b \in I$ und damit $f_{da} x_a = 0$. \square

Der direkte Limes erfüllt folgende universelle Eigenschaft:

Proposition 7.9. Sei ein R -Modul N und für jedes $a \in i$ eine R -lineare Abbildung $g_a : M_a \rightarrow N$ mit

$$g_b \circ f_{ba} = g_a \quad \text{für } a \leq b$$

gegeben. Dann existiert eine eindeutige bestimmte R -lineare Abbildung $g : \varinjlim M_a \rightarrow N$ mit

$$g \circ f_a = g_a \quad \text{für } a \in I \tag{7.2.1}$$

Beweis. Jedes Element x aus $\varinjlim M_a$ kann als endliche Linearkombination $\sum_a f_a(x_a)$ dargestellt werden. Wähle ein $c \in I$, dass größer als alle a ist, welche in der endlichen Summe vorkommen. Dann gilt

$$\sum_a f_a(x_a) = \sum_a f_c f_{ca}(x_a) = f_c \left(\sum_a f_{ca}(x_a) \right) = f_c(y)$$

für $y = \sum_a f_{ca}(x_a) \in M_c$. Die Bedingung (7.2.1) erzwingt die Definition

$$g \left(\sum_a f_a(x_a) \right) = g \circ f_c(y) := g_c(y)$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Definition wohldefiniert (also unabhängig von der Wahl von c ist) und dass die so erhaltene Abbildung R -linear ist. \square

Seien (M_a, f_{ba}) und (N_a, g_{ba}) zwei gerichtete Systeme von R -Moduln über I . Ein Morphismus von gerichteten Systemen ist ein Familie von R -lineare Abbildungen $\varphi_a : M_a \rightarrow N_a$ für $a \in I$, s.d.

$$g_{ba} \circ \varphi_a = \varphi_b \circ f_{ba} \quad \text{für } a \leq b$$

Die universelle Eigenschaft des direkten Limes zeigt, dass es genau eine Abbildung

$$\varphi : \varinjlim M_a \rightarrow \varinjlim N_a$$

mit

$$\varphi \circ f_a = g_a \circ \varphi_a \quad \text{für } a \in I$$

gibt.

Proposition 7.10. Seien folgende Morphismen von gerichteten Systemen von R -Moduln über I gegeben

$$(M_a, f_{ba}) \longrightarrow (N_a, g_{ba}) \longrightarrow (P_a, h_{ba})$$

so dass die Sequenzen

$$M_a \xrightarrow{\varphi_a} N_a \xrightarrow{\psi_a} P_a \quad (7.2.2)$$

für alle $a \in I$ exakt sind. Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\varinjlim M_a \xrightarrow{\varphi} \varinjlim N_a \xrightarrow{\psi} \varinjlim P_a$$

Beweis. Sei $x \in \varinjlim M_a$. Aus Lemma 7.8 folgt, dass ein $x_a \in M_a$ mit $f_a(x_a) = x$ und $\varphi(x) = \varphi \circ f_a(x) = g_a \circ \varphi_a(x)$ existiert. Es gilt

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi \circ g_a \circ \varphi_a(x) = h_a \circ \psi_a \circ \varphi_a(x) = 0,$$

d.h. $\text{Im } \varphi \subset \ker \psi$.

Sei jetzt $y \in \ker \psi$. Es existiert ein $y_b \in N_b$ mit $y = g_b(y_b)$ und $h_b \circ \psi_b(y_b) = \psi \circ g_b(y_b) = 0$. Aus Lemma 7.8 2. folgt, dass es ein $c \in I$ gibt mit $h_{cb} \circ \psi_b(y_b) = 0$. Das bedeutet aber, dass $\psi_c g_{cb}(y_b) = 0$. Da die Sequenzen (7.2.2) exakt sind, existiert ein $x_c \in M_c$ mit $\varphi_c(x_c) = g_{cb}(y_b)$. Es gilt dann für $x := f_c(x_c)$:

$$\varphi(x) = \varphi \circ f_c(x_c) = g_c \circ \varphi_c(x_c) = g_c \circ g_{cb}(y_b) = y$$

d.h. $\ker \psi \subset \text{Im } \varphi$. Das zeigt die Behauptung. \square

Proposition 7.11. Limes vertauscht mit Tensorprodukt.

7.3 PL-Topologie

Im folgenden versehen wir \mathbb{R}^n mit der Produkt-Metrik $d(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$. Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren $AB := \{\lambda a + \mu b \mid a \in A, b \in B, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$. Ist $A = \emptyset$, dann definieren wir $AB = B$. Ist $A = \{a\}$, dann schreiben wir aB und sagen aB ist ein Kegel, falls jedes Element in aB eindeutig als $\lambda a + \mu b$ dargestellt werden kann.

Definition 7.12.

1. Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}^n$ heißt Polyeder, falls jeder Punkt $a \in P$ eine Kegel-Umgebung $N = aL$, für L kompakt, besitzt. Die Umgebung $N_a P := N$ heißt Stern und $L_a P := L$ heißt Link.
2. Ein Unter-Polyeder ist eine Teilmenge eines Polyeders, welche selbst ein Polyeder ist.

Bemerkung 7.13. Für N kann man die Umgebung $N_\epsilon(a, P) = \{x \in P \mid d(a, x) \leq \epsilon\}$ nehmen, der Link L ist dann $\dot{N}(a, P) = \{x \in P \mid d(a, x) = \epsilon\}$.

Lemma 7.14. 1. Eine offene Teilmenge eines Polyeders ist ein Polyeder

2. Der Schnitt von endlich vielen Polyedern ist ein Polyeder
3. Seien für eine beliebige Indexmenge I kompakte Polyeder $P_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i \in I$ gegeben. Wenn die Vereinigung $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ lokal endlich ist, dann ist P ein Polyeder.
4. Seien $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ Polyeder, dann ist $P_1 \times P_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ein Polyeder.
5. Ein Kegel über einem kompakten Polyeder ist selbst ein Polyeder.

Beweis. Die ersten drei Punkte folgen direkt aus Bemerkung 7.13. Der vierte Punkt folgt aus $N_\epsilon(a_1, P_1) \times N_\epsilon(a_2, P_2) = N_\epsilon((a_1, a_2), P_1 \times P_2)$. Wir beweisen den fünften Punkt. Sei $x = \lambda a + \mu y \in aP$ für $y \in P$. Für $x = a$ können wir $N_x(aP) = aP$ nehmen. Ist $x \neq a$, dann können wir $N_x(aP) = aN_y(P)$ nehmen. Im Fall $x \neq y$ gilt nämlich $aN_y(P) = x(N_y(P) \cup aL_y(P))$ und im Fall $x = y$ gilt $aN_y(P) = y(aL_y(P))$.

□

Definition 7.15. Eine Abbildung $f : P \rightarrow Q$ zwischen Polyedern heißt *stückweise-linear (PL)*, falls jeder Punkt $x \in P$ einen Stern $N = xL$ hat, s.d. für $y \in L, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda + \mu = 1$ die Gleichung $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ gilt, d.h. dass f auf jedem Strahl $\lambda x + \mu y$ linear ist.

Beispiel 7.16.

1. Jede lineare Abbildung ist PL
2. Die Einschränkung einer PL-Abbildung auf ein Unter-Polyeder ist PL
3. Wir sagen die Abbildung $f : P \rightarrow Q$ ist linear, falls sie die Einschränkung einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist. Aus (1) und (2) folgt dann, dass f PL ist.
4. Sei $P = \bigcup P_\alpha$ eine lokal endliche Zerlegung von P in kompakte Unterpolyeder. Wenn $f : P \rightarrow Q$ eine Abbildung ist, s.d. $f|_{P_\alpha}$ PL für jedes α ist, dann ist f PL.
5. Das kartesische Produkt von zwei PL-Abbildungen ist PL
6. Die Verknüpfung von zwei PL-Abbildungen ist PL

Seien aP, bQ Kegel und $f : P \rightarrow Q$. Der Kegel über f , den wir mit cf bezeichnen, ist folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} cf : aP &\longrightarrow bQ \\ \lambda a + \mu z &\mapsto \lambda b + \mu f(z) \end{aligned}$$

wobei $z \in P$.

Lemma 7.17. Sei $f : P \rightarrow Q$ eine PL-Abbildung, dann ist $cf : aP \rightarrow bQ$ auch PL.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es für jedes $x \in aP$ einen Stern $N = xL$ gibt, s.d. $cf(\lambda x + \mu y) = \lambda cf(x) + \mu cf(y)$ für jedes $y \in L$ gilt. Ist $x = a$, dann setzen wir $N = aP$ und es gilt $cf(\lambda a + \mu y) = \lambda b + \mu cf(y) = \lambda cf(a) + \mu cf(y)$ für $y \in P$. Sei jetzt $x \neq a$, dann setzen wir $N = aN_z(P)$ (dies ist ein Stern für x wegen Lemma 7.14 5.), wobei $z \in P$ durch $x = \rho a + \theta z$ definiert ist. Sei $y \in N$ durch $y = \kappa a + \gamma z'$ für $z' \in N_z(P)$ gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned} cf(\lambda x + \mu y) &= cf(\lambda(\rho a + \theta z) + \mu(\kappa a + \gamma z')) \\ &= cf((\lambda\rho + \mu\kappa)a + \lambda\theta z + \mu\gamma z') \\ &= cf\left((\lambda\rho + \mu\kappa)a + \omega\left(\frac{1}{\omega}(\lambda\theta z + \mu\gamma z')\right)\right) \\ &= (\lambda\rho + \mu\kappa)b + \omega f\left(\frac{1}{\omega}(\lambda\theta z + \mu\gamma z')\right) \\ &= (\lambda\rho + \mu\kappa)b + f(\lambda\theta z + \mu\gamma z') \end{aligned}$$

wobei $\omega = 1 - (\lambda\rho + \mu\kappa)$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \lambda cf(x) + \mu cf(y) &= \lambda cf(\rho a + \theta z) + \mu cf(\kappa a + \gamma z') \\ &= \lambda(\rho b + \theta f(z)) + \mu(\kappa b + \gamma f(z')) \\ &= (\lambda\rho + \mu\kappa)b + \lambda\theta f(z) + \mu\gamma f(z') \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

□

Lemma 7.18. Eine stetige Abbildung $f : P \rightarrow Q$ ist genau dann PL wenn der Graph von f

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in P\}$$

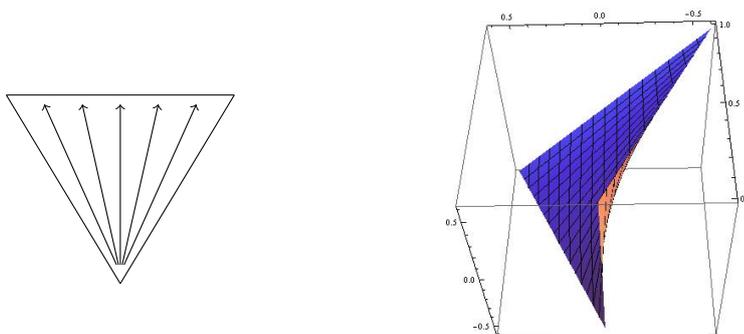
ein Polyeder ist.

Beweis. \Rightarrow : Sei f PL, dann existiert für jedes $x \in P$ ein Stern $N = xL$, s.d. $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ für alle $y \in L$ gilt. Daraus folgt aber, dass $f(N) = f(x)f(L)$ gilt. Da $P \approx \Gamma(f)$ ist $N \times f(N) = (x, f(x))(L \times f(L))$ eine Kegel-Umgebung für $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$.

\Leftarrow : Sei jetzt $\Gamma(f)$ ein Polyeder und $N' = (x, f(x))L'$ eine Stern Umgebung für $(x, f(x))$. Setze $N := pr_1(N')$ und $L := pr_1(L')$ wobei pr_1 die Einschränkung der Projektion auf \mathbb{R}^n ist. Wir zeigen, dass N eine Stern Umgebung von x ist. Sei $y \in L$ und $\lambda, \mu \geq 0$ mit $\lambda + \mu = 1$ gegeben. Da N' eine Stern Umgebung ist, existiert ein $(z, f(z)) \in N'$, s.d. $(z, f(z)) = \lambda(x, f(x)) + \mu(y, f(y)) = (\lambda x + \mu y, \lambda f(x) + \mu f(y))$ ist, somit gilt $z = \lambda x + \mu y \in N$. Beachte, dass die letzte Kette von Gleichungen auch zeigt, dass f PL ist. \square

Korollar 7.19. Die inverse Abbildung eines PL-Homöomorphismus ist PL.

Bemerkung 7.20 (The standard mistake). Sei P ein Polyeder und aP ein Stern, dann ist die natürliche Projektion von $aP \setminus \{v\} \rightarrow P$ im allgemeinen nicht PL.



Der Graph der Funktion, der rechts abgebildet ist, ist kein Polyeder.

Definition 7.21. Ein Polyeder M ist eine PL-Mannigfaltigkeit der Dimension n falls jeder Punkt $x \in m$ eine Umgebung hat, die PL-homöomorph zu einer offenen Menge im \mathbb{R}^n ist.

Theorem 7.22. Ein kompakter Polyeder ist eine endliche Vereinigung von Simplicies. Im allgemeinen ist ein Polyeder eine lokal endliche Vereinigung von Simplicies.

Beweis. Sei P ein kompakter Polyeder in \mathbb{R}^m und sei $\langle P \rangle \subset \mathbb{R}^m$ der Untervektorraum der von P aufgespannt wird. Wir beweisen die Aussage über Induktion nach $n = \dim \langle P \rangle$. Wir können oBdA annehmen, dass $P \subset \mathbb{R}^n$. Sei $a \in P$ und $N_\epsilon(a, P)$ eine ϵ -Umgebung (siehe Bemerkung 7.13). Sei F eine echte Seite von $N_\epsilon(a, P)$. Dann gilt $\dim \langle F \rangle < n$ und daher ist F eine endliche Vereinigung von Simplicies. Das bedeutet aber, dass $\dot{N}_\epsilon(a, P)$ eine endliche Vereinigung von Simplicies ist und daher auch $N_\epsilon(a, P) = a\dot{N}_\epsilon(a, P)$. Die Aussage folgt nun aus der Kompaktheit von P .

Im allgemeinen Fall betrachten wir die abzählbare Basis von ϵ -Umgebungen $\{N_\epsilon(a, \frac{1}{n}) \mid a \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ für \mathbb{R}^n . Sei $\{U_1, U_2, \dots\} = \{N_\epsilon(a, \frac{1}{n}) \mid N_\epsilon(a, \frac{1}{n}) \cap P \neq \emptyset \text{ und kompakt}\}$. Wir setzen $A_0 := \emptyset$ und $A_1 := U_1$. Wir definieren jetzt induktiv kompakte Polyeder A_2, A_3, \dots , s.d. $P = \bigcup A_i$ und $A_i \subset \text{int}(A_{i+1})$ gilt. Sei also A_i mit $i \leq k$ bereits konstruiert. Da A_k kompakt ist, ist auch ∂A_k kompakt. Sei U_{k_1}, \dots, U_{k_l} so gewählt, so dass $\bigcup_{i=1}^s \dot{U}_{k_i}$ eine endliche Überdeckung von ∂A_k ist. Definiere $A_{k+1} := A_k \cup \bigcup_{i=1}^s U_{k_i} \cup U_k$. Dann gilt $A_k \subset \text{int}(A_{k+1})$ und $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$, da $U_k \subset A_k$.

Sei jetzt A_k als endliche Vereinigung von Simplizes gegeben. Sei jetzt $\bigcup_i N_{\epsilon_i}(a_i, A_{k+1})$ eine endliche Überdeckung der kompakten Menge $A_{k+1} \setminus \text{int}(A_k)$ mit $N_{\epsilon_i}(a_i, A_{k+1}) \cap A_{k-1} = \emptyset$. Dies liefert eine endliche Überdeckung von A_{k+1} und somit eine Überdeckung von $P = \bigcup_i A_i$. Die Überdeckung ist lokalendlich, da es für jeden Punkt $x \in P$ ein k gibt mit $x \in A_k$ und eine Umgebung U_x von x die in A_{k+1} enthalten ist. Nach Konstruktion können nur endlich viele Simplizes U_x treffen (nämlich nur die, die in A_{k+2} enthalten sind). \square

Korollar 7.23. *Sei $f : P \rightarrow Q$ eine PL-Abbildung, dann existiert eine lokale endliche Zerlegung von P in Simplices $P = \bigcup_i A_i$, s.d. Die Einschränkung $F|_{A_i}$ linear ist.*

Beweis. Wende Theorem 7.22 auf den Graph Γ_f an. \square

Sei $P \subset \mathbb{R}^m$ ein Polyeder, dann ist $\langle O \rangle$ der kleinste Untervektorraum von \mathbb{R}^m in dem P enthalten ist.

Lemma 7.24. *Das Bild eines Simplex unter einer linearen Abbildung ist ein Polyeder.*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}^m$ ein n -Simplex und sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ linear. Entweder $f|_{\langle A \rangle}$ ist injektiv, dann ist $f(A)$ ein n -Simplex, oder $f(\langle A \rangle)$ ist ein Untervektorraum von niedrigerer Dimension. In diesem Fall gilt $f(A) = f(\partial A)$, da für $x \in f(A)$ das Urbild $f^{-1}(x) \cap \langle A \rangle$ ein Untervektorraum mit Dimension > 0 ist und somit den Rand von A treffen muss. In diesem Fall folgt das Resultat durch Induktion nach n , da ∂A eine Vereinigung von Simplices mit Dimension $< n$ ist. \square

Korollar 7.25. *Das Bild eines kompakten Polyeders unter einer PL-Abbildung ist ein kompakter Polyeder.*

Beweis. Wegen Korollar 7.23 und Lemma 7.24 ist das Bild eine endliche Vereinigung von kompakten Polyedern. \square

Definition 7.26. *Ein kompakter, konvexer Polyeder mit $\langle P \rangle = n$ heißt n -Zelle (oder auch nur Zelle).*

Bemerkung 7.27.

1. Ein n -Simplex ist eine n -Zelle, $[0, 1]^n$ ist eine n -Zelle.
2. Das Bild einer n -Zelle unter einer linearen Abbildung ist eine n -Zelle.
3. Sei $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{R}^m$ endlich. Dann ist $a_1 \dots a_r := \{\sum \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$ eine Zelle.
4. Der Schnitt und das Produkt von zwei Zellen ist eine Zelle.
5. Der Schnitt einer Zelle mit einem Untervektorraum oder einem Halbraum ist eine Zelle.