Algebraische D-Moduln

Vorlesung im WS 2016/17

Thomas Reichelt

1 Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten

1.1 Filtrierte Ringe

sec:filtRing

Sei D (ein nicht notwendigerweise kommutativer) Ring mit 1 und $(D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine aufsteigende Filtrierung von additiven Untergruppen, s.d. gilt

1. $D_n = \{0\}$ für $n < 0$,
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_n = D$,
3. $1 \in D_0$,
4. $D_n \cdot D_m \subset D_{n+m}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$
5. $[D_n, D_m] = \{PQ - QP \mid P \in D_n, Q \in D_m\} \subset D_{n+m-1}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$

Wegen Eigenschaft 5. ist $GrD := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} Gr_n D := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} D_n/D_{n-1}$ ein graduierter, kommutativer Ring mit 1. Insbesondere ist $D_0 = Gr_0 D$ ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist GrD eine D_0-Algebra. Wir nehmen außerdem an, dass der Ring D die folgenden zusätzlichen Eigenschaften erfüllt

6. GrD ist noethersch
7. $Gr_1 D$ erzeugt GrD als D_0-Algebra

Wegen Lemma lem:RR0 2.1 ist D_0 dann auch ein noetherscher Ring. Außerdem können wir wegen 6., 7. und Lemma lem:MOfinite 2.2 endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_s \in Gr_1 D$ wählen, s.d. GrD als D_0-Algebra von ihnen erzeugt wird. Wegen 7. gilt weiter

$$Gr_{n+1} D = Gr_1 D \cdot Gr_n D \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

und deshalb

$$D_{n+1} = D_n \cdot D_1 \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Sei D° der transponierte Ring von D[1]. Die Filtration $(D^\circ)_n := (D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ hat dann diesselben Eigenschaften 1. - 7.. Die Identität $D \to D^\circ$ induziert einen Isomorphismus von graduierten Ringen $GrD \simeq GrD^\circ$.

Sei M ein D-Modul. Ein aufsteigende Filtrierung $F_\bullet M = (F_n M)_{n\in\mathbb{Z}}$ von M durch aufsteigende Untergruppen heißt D-Modul Filtrierung , falls $D_n \cdot F_m M \subset F_{n+m}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$. Insbesondere sind die $F_n M$ selbst D_0-Moduln.

Eine D-Modul Filtration $F_\bullet M$ heißt **hausdorffsch**, falls $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} F_n M = \{0\}$. Sie heißt **ausschöpfend**, falls $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n M = M$ gilt. Sie heißt **stabil**, falls ein $m_0 \in \mathbb{Z}$ existiert, s.d. $D_n \cdot F_m M = F_{n+m} M$, für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und alle $m \geq m_0$, gilt.

[1] Der transponierte Ring D° hat dieselbe unterliegende abelsche Gruppe wie D. Die Multiplikation ist definiert als $a \circ b := b \cdot a$

Eine D-Modul Filtrierung heißt **gut** falls

1. $F_n M = \{0\}$ für $n \ll 0$
2. $F_\bullet M$ ist ausschöpfend
3. $F_n M$ sind endlich erzeugte D_0-Moduln
4. die Filtrierung $F_\bullet M$ ist stabil

Insbesondere ist eine gute Filtrierung hausdorffsch.

quivChargood

Lemma 1.1. *Sei $F_\bullet M$ eine ausschöpfende, hausdorffsche D-Modul Filtrierung von M. Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $F_\bullet M$ ist eine gute Filtrierung

2. der GrD-Modul GrM ist endlich erzeugt

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.: Da die Filtrierung stabil ist existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, s.d. $D_n F_{m_0} M = F_{n+m_0} M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt, also auch $Gr_n D \cdot Gr_{m_0} M = Gr_{n+m_0} M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Daraus folgt, dass $\bigoplus_{n \leq m_0} Gr_n M$ den GrD-Modul M erzeugt. Da die $F_n M$ per Annahme endlich erzeugte D_0-Moduln sind , ist $Gr_n M$ auch ein endlich erzeugter D_0-Modul. Da für $n \ll 0$ $F_n M = \{0\}$ gilt, folgt, dass auch $\bigoplus_{n \leq m_0} Gr_n M$ ein endlich erzeugter D_0-Modul ist. Daraus folgt, dass $Gr_\bullet M$ ein endlich erzeugter $Gr_\bullet D$-Modul ist.

2. $\Rightarrow$ 1.: Da $Gr_\bullet M$ endlich erzeugt ist und für $k < 0$ $Gr_k D = 0$ gilt, folgt, dass $Gr_n M = \{0\}$ für $n << 0$. Wegen Lemma lem:M0finite 2.2 ist $Gr_n M$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein endlich erzeugter D_0-Modul. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F_{n-1} M \longrightarrow F_n M \longrightarrow Gr_n M \longrightarrow 0$$

zeigt, das für hinreichend kleine n die Gleichung $F_{n-1} M = F_n M$ gilt, d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, s.d $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_n M = F_{n_0} M$. Da die Filtration per Annahme hausdorffsch ist, gilt $F_{n_0} M = \{0\}$. Über Induktion nach n zeigt man dann, dass alle $F_n M$ endlich erzeugte D_0-Moduln sind.
Sei jetzt $m_0 \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $\bigoplus_{n \leq m_0} Gr_n M$ den GrD-Modul GrM erzeugt. Sei $m \geq m_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} Gr_{m+1} M &= \bigoplus_{k \leq m_0} Gr_{m+1-k} D \cdot Gr_k M \\ &= \bigoplus_{k \leq m_0} Gr_1 D \cdot Gr_{m-k} D \cdot Gr_k M \subset Gr_1 D \cdot Gr_m M \subset Gr_{m+1} M \end{aligned}$$

d.h. $Gr_1 D \cdot Gr_m M = Gr_{m+1} M$. Das zeigt

$$F_{m+1} M = D_1 F_m M + F_m M = D_1 \cdot F_m M$$

Per Induktion erhalten wir

$$F_{m+n} = D_1 \cdot \ldots D_1 \cdot F_m M \subset D_n \cdot F_m M \subset F_{m+n} M$$

Also $F_{m+n} M = D_n \cdot F_m M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. d.h. $F_\bullet M$ ist eine gute Filtrierung. $\square$

Insbesondere ist $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine gute Filtrierung von D als D-Modul bezüglich der Links-Multiplikation.

Bemerkung 1.2. *Wir können die Stabilitätsbedingung in der Definition einer guten Filtration durch eine vermeintlich schwächere Bedingung ersetzen:*

4'. Es existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, s.d. $D_n \cdot F_{m_0} M = F_{m_0+n} M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Lemma 1.3. *Sei M ein D-Modul mit einer guten Filtration $F_\bullet M$, dann ist M endlich erzeugt.*

Proof. Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_nM = M$ und $F_{n+m_0}M = D_n \cdot F_{m_0}M$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und ein genügend großes $m_0 \in \mathbb{Z}$. D.h. $F_{m_0}M$ erzeugt M als D-Modul. Da $F_{m_0}M$ ein endlich erzeugter D_0-Modul ist, folgt die Aussage. □

Lemma 1.4. *Sei M ein endlich erzeugter D-Modul. Dann besitzt M eine gute Filtration.*

Proof. Sei U ein endlich erzeugter D_0-Modul, der M als D-Modul erzeugt. Setze $F_nM = 0$ für $n < 0$ und $F_nM = D_n \cdot U$ für $n \geq 0$. Dann ist $U = Gr_0M$ und

$$Gr_nM = F_nM/F_{n-1}M = (D_n \cdot U)/(D_{n-1} \cdot U) \subset Gr_nD \cdot Gr_0M \subset Gr_nM$$

d.h. $Gr_nM = Gr_nD \cdot Gr_0M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Also ist GrM ein endlich erzeugter GrD-Modul. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 1.1. □

Proposition 1.5. *Der Ring D ist links und rechts noethersch.*

Proof. Sei L ein Linksideal von D. Die Filtrierung von D induziert einen Filtrierung $(L_n = L\cap D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. auf L. Man sieht leicht, dass dies eine D-Modul Filtrierung ist. Der graduierte Modul GrL ist natürlicherweise ein Ideal in GrD. Da GrD noethersch ist, ist GrL ein endlich erzeugter GrD-Modul. Wegen Lemma 1.1 ist die Filtrierung $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine gute Filtrierung. Aus Lemma 1.3 folgt dann , dass L endlich erzeugt ist. Das zeigt, dass D links noethersch ist. Für rechts noethersch ersetzen wir D durch D°. □

Proposition 1.6. *Sei M ein endlich erzeugter D-Links-Modul, dann besitzt M eine freie Auflösung $F^\bullet \to M$.*

Proof. Da M endlich erzeugt ist, haben wir eine kurze exkate Sequenz

$$0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow D^{n_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Da D links-noethersch ist, ist ker endlich erzeugt, wir erhalten also eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow D^{n_1} \longrightarrow D^{n_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

indem wir den Prozess immer weiter fortsetzen erhalten wir die gesuchte Auflösung. □

Sei $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ zwei Filtrationen des D-Moduls M. $F_\bullet M$ heißt **feiner** als $F'_\bullet M$, falls ein $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ existiert, s.d. $F_nM \subset F'_{n+k}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Ist $F_\bullet M$ feiner als $F'_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ feiner als $F_\bullet M$, dann sind die beiden Filtrationen **äquivalent**.

Lemma 1.7. *Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung eines endlich erzeugten D-Moduls M. Dann ist $F_\bullet M$ feiner als jede andere ausschöpfende D-Modul Filtrierung auf M.*

Proof. Sei $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ s.d. $D_n \cdot F_{m_0}M = F_{n+m_0}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sei $F'_\bullet M$ eine andere ausschöpfende D-Modul Filtrierung auf M. Da $F_{m_0}M$ ein endlich erzeugter D_0-Modul und $F'_\bullet M$ ausschöpfend ist, existiert ein $p \in \mathbb{Z}$, s.d. $F_{m_0}M \subset F'_pM$. Da $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, s.d $F_{n_0}M = \{0\}$. Setze $k := p + |n_0|$. Für $m \leq n_0$ gilt

$$F_mM = 0 \subset F'_{m+k}M.$$

Für $n_0 < m \leq m_0$ gilt , $-|n_0| \leq n_0 < m$ und $p = -|n_0| + k < m + k$ also

$$F_mM \subset F_{m_0}M \subset F'_pM \subset F'_{m+k}M$$

Für $m > m_0$ gilt schließlich $m - m_0 \leq m$, da m_0 positive ist. Es folgt

$$F_mM = D_{m-m_0} \cdot F_{m_0}M \subset D_m \cdot F'_pM \subset F'_{m+p}M \subset F'_{m+k}M$$

□

Wir erhalten unmittelbar folgendes Korollar.

odFiltequiv **Korollar 1.8.** *Auf einem endlich erzeugten D-Modul sind zwei gute Filtrierungen äquivalent.*

Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Seqeunz von D-Moduln. Wenn M eine D-Modul Filtrierung $F_\bullet M$ hat, dann induziert sie Filtrierungen $F_\bullet M' := (f^{-1}(f(M') \cap F_n M))_{n\in\mathbb{Z}}$ auf M' und $F_\bullet M'' := (g(F_n M))_{n\in\mathbb{Z}}$ auf M''. Es ist leicht zusehen, dass diese D-Modul Filtrationen sind.

em:goodexSeq **Lemma 1.9.** *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von D-Moduln. Wenn $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M ist, dann sind die induzierten Filtrierungen $F_\bullet M'$ und $F_\bullet M''$ auch gut.

Proof. Aus der Definition der Filtrierungen folgt, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow GrM' \overset{Gr(f)}{\longrightarrow} GrM \overset{Gr(g)}{\longrightarrow} GrM'' \longrightarrow 0 \tag{1.1.1}$$ eq:exseqGr

exakt ist. Da $F_\bullet M$ gut ist, ist $Gr_\bullet M$ ein endlich erzeugter $Gr_\bullet D$-Modul. Da GrD noethersch ist, sind $Gr_\bullet M'$ und $Gr_\bullet M''$ auch endlich erzeugte $Gr_\bullet D$-Moduln. Aus Lemma 1.1 folgt dann, dass $F_\bullet M'$ und $F_\bullet M''$ auch gut sind. □

Sei M ein endlich erzeugter D-Modul und $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M. Dann ist GrM ein endlich erzeugter GrD-Modul und wir können die Resultate aus Abschnitt 2.1 anwenden. Sei λ eine additive, nicht-negative Funktion auf endlich-erzeugten D_0-Moduln. Dann ist

$$\lambda(F_n M) - \lambda(F_{n-1}M) = \lambda(Gr_n M)$$

wegen Korollar 2.5 und Bedingung (7) für große n gleich einem Polynom. Wegen Lemma 2.9 ist daher auch $\lambda(F_n)$ für große $n \in \mathbb{Z}$ gleich einem Polynom. Ist $F'_\bullet M$ eine andere gute Filtrierung, dann sind wegen Korollar 1.8 die beiden Filtrierunegn $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ äquivalent, d.h es gibt ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d.

$$F_n M \subset F'_{n+k} \subset F_{n+2k} M$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Da λ additiv ist und nur nicht-negative Werte annimmt, folgern wir

$$\lambda(F_n M) \leq \lambda(F'_{n+k} M) \leq \lambda(F_{n+2k} M)$$

Daraus folgt, dass die Polynome, die $\lambda(F_n M)$ und $\lambda(F'_n M)$ für große n repräsentieren, die gleichen Leitterme haben. Wir bezeichnen den Grad dieser Polynome mit $d_\lambda(M)$ und nennen ihn die **Dimension** des D-Moduls M. Wegen Lemma 2.8 hat der Leitkoeffizient dieser Polynome die Form $e_\lambda(M)/d_\lambda(M)!$ wobei $e_\lambda(M) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Wir nennen $e_\lambda(M)$ die Multiplizität des D-Moduls M (bezüglich λ).

ultnonLocal **Proposition 1.10.** *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten D-Moduln. Dann gilt

1. $d_\lambda(M) = \max(d_\lambda(M'), d_\lambda(M''))$,
2. *Falls* $d_\lambda(M) = d_\lambda(M') = d_\lambda(M'')$, *dann gilt* $e_\lambda(M) = e_\lambda(M') + e_\lambda(M'')$

Proof. Indem man den n-ten homogenen Teil von (eq:exseqGr 1.1.1) nimmt, erhält man

$$\lambda(Gr_n M) = \lambda(Gr_n M') + \lambda(Gr_n M'')$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Per Induktion nach n folgt daraus

$$\lambda(F_n M) = \lambda(F_n M') + \lambda(F_n M'')$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da jeder der drei obigen Terme für große n durch ein Polynom dargestellt wird, dessen Grad die Dimension des D-Moduls ist, folgt die Behauptung. □

Sei ϕ ein Ring-Automorphismus von D mit $\phi(D_0) = D_0$. Wir definieren einen Endofunktor $\widetilde{\phi}$ auf der Kategorie $\mathcal{M}(D)$ der D-Moduln, die jedem D-Modul M einen D-Modul $\widetilde{\phi}(M)$ zuordnet, der dieselbe unterliegende abelsche Gruppenstruktur hat und das externe Produkt mit D durch $(P, m) \mapsto \phi(P)m$ gegeben ist. Es ist klar, dass der Funktor $\widetilde{\phi}$ einen Automorphismus auf der Kategorie $\mathcal{M}(D)$ ist und endlich erzeugte D-Moduln erhält.

prop:AutDim **Proposition 1.11.** *Sei M ein endlich erzeugter D-Modul. Dann gilt*

$$d_\lambda(\widetilde{\phi}(M)) = d_\lambda(M)\,.$$

Proof. Seien $P_1, \dots, P_s \in D_1$ Repräsentanten von Klassen in $Gr_1 D$, die GrD als D_0-Algebra erzeugen. Es existiert ein $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, s.d. $\phi(P_i) \in D_d$ für alle $i = 1, \dots, s$. Da die $P_1, \dots, P_s$ und 1 die Menge D_1 als D_0-Modul erzeugen, gilt $\phi(D_1) \subset D_d$.

Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtration von M. Definiere die Filtration $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$ durch

$$F_p \widetilde{\phi}(M) = F_{dp} M \qquad \text{für } p \in \mathbb{Z}$$

Es ist klar, dass $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$ eine aufsteigende Filtration von $\widetilde{\phi}(M)$ durch endlich erzeugte D_0-Moduln ist. Außerdem gilt

$$D_1 \cdot F_m \widetilde{\phi}(M) = \phi(D_1) \cdot F_{dm} M \subset D_d F_{dm} M \subset F_{d(m+1)} M = F_{m+1} \widetilde{\phi}(M)$$

Durch Induktion erhalten wir $D_n \cdot F_m \widetilde{\phi}(M) \subset F_{m+n} \widetilde{\phi}(M)$, d.h. $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$ ist eine D-Modul Filtrierung. Wegen Lemma lem:fgModexgood 1.4 und Lemma lem:goodFiltfiner 1.7 existiert eine gute Filtrierung $F' \widetilde{\phi}(M)$ die feiner ist als $F_\bullet \widetilde{\phi}(M)$, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. gilt

$$F'_n \widetilde{\phi}(M) \subset F_{n+k} \widetilde{\phi}(M) = F_{d(n+k)} M$$

daraus folgt $\lambda(F'_n \widetilde{\phi}(M)) \leq \lambda(F_{d(n+k)} M)$. Für große $n \in \mathbb{Z}$ ist $\lambda(F_{d(n+k)} M)$ gleich einem Polynom mit Leitterm

$$\frac{e_\lambda(M) d^{d_\lambda(M)}}{d_\lambda(M)!} n^{d_\lambda(M)}$$

Da $\lambda(F'_n \widetilde{\phi}(M))$ für große n gleich einem Polynom vom Grad $d_\lambda(\widetilde{\phi}(M))$ ist, folgern wir $d_\lambda(\widetilde{\phi}(M)) \leq d_\lambda(M)$. Indem wir das Argument für ϕ^{-1} wiederholen, zeigen wir $d_\lambda(M) = d_\lambda(\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{\phi}(M))) \leq d_\lambda(\widetilde{\phi}(M))$. Daraus folgt die Behauptung. □

1.2 Algebren von Differentialoperatoren

sec:AlgDiff

Sei k ein Körper mit $char(k) = 0$ und A eine kommutative Algebra über k. Sein $End_k(A)$ die Algebra der k-linearen Endomorphismen von k mit Kommutator $[S, T] := ST - TS \in End_k(A)$. Die Algebra $End_k(A)$ enthält als Unteralgebra die Menge der A-linearen Endomorphimen $End_A(A)$.

Lemma 1.12. *Der Algebrenhomomorphismus*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow End_A(A) \\ a &\mapsto (b \mapsto ab) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Proof. Die Injektivität folgt, da der Endomorphismus auf 1 den Wert a annimmt. Sie jetzt $T \in End_A(A)$. Es gilt

$$T(b) = b \cdot T(1) = T(1)b$$

d.h. die Abbildung ist durch Multiplikation mit $T(1) \in A$ gegeben. Dies zeigt die Surjektivität. $\square$

Im folgenden identifizieren wir die Unteralgebra $End_A(A)$ mit A.

Eine k-**Derivation** von A ist ein $T \in End_k(A)$, s.d. für $a, b \in A$

$$T(ab) = T(a)b + aT(b)$$

gilt. Insbesondere gilt $[T,a](b) = T(ab) - aT(b) = T(a)b$,d.h. $[T,a] = T(a) \in A \subset End_k(A)$. Daraus folgt,dann $[[T,a_0],a_1] = 0$ für alle $a_0, a_1 \in A$. Dies motiviert folgende Definition:

Ein Element $T \in End_k(A)$ heißt **Differentialoperator der Ordnung** $\leq n$,falls

$$[\dots[[T,a_0],a_1],\dots,a_n] = 0$$

für alle $a_0,\dots,a_n \in A$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Diff}_k(A)$ die Menge aller Differentialoperatoren von A.

Lemma 1.13. *Seien T, S zwei Differentialoperatoren der Ordnung $\leq n$ bzw. $\leq m$. Dann ist $T \circ S$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq n \cdot m$.*

Proof. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach $n+m$. Sei $n = m = 0$, dann ist $T, S \in End_A(A)$ und damit ist $T \circ S \in End_A(A)$ und somit ein Differentialoperator der Ordnung 0. Sei jetzt $n + m = p$ und die Aussage sei wahr für alle $q < p$. Es gilt

$$[T \circ S, a] = TSa - aTS = T[S,a] + [T,a]S\,.$$

Aber $[T,a]$ bzw. $[S,a]$ sind Differentialoperatoren der Ordnung $\leq n-1$ bzw. $\leq m-1$. Wegen der Induktionssannahme ist dann $[T \circ S, a]$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq n+m-1$, also hat $T \circ S$ Ordnung $\leq n+m$. $\square$

$\mathrm{Diff}_k(A)$ ist also eine Unteralgebra von $End_k(A)$. Sie heißt die Algebra aller k-lineraen Differentialoperatoren von A. Wir setzen $F_n\mathrm{Diff}_k(A) = \{0\}$ für $n < 0$ und

$$F_n\mathrm{Diff}_k(A) = \{T \in \mathrm{Diff}_k(A) \mid ord(T) \leq n\}$$

für $n \geq 0$. Das gibt eine aufsteigende, ausschöpfende Filtrierung auf $\mathrm{Diff}_k(A)$ durch k-Untervektorräume. Die Filtrierung ist kompatibel mit der Ringstruktur, d.h.

$$F_n\mathrm{Diff}_k(A) \circ F_m\mathrm{Diff}_k(A) \subset F_{n+m}\mathrm{Diff}_k(A)$$

Lemma 1.14.

1. *$F_0\mathrm{Diff}_k(A) = A$,*
2. *$F_1\mathrm{Diff}_k(A) = Der_k(A) \oplus A$,*

3. $[F_n \mathrm{Diff}_k(A), F_m \mathrm{Diff}_k(A)] = F_{n+m-1}\mathrm{Diff}_k(A)$ *für alle* $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Proof. Für $T \in F_0\mathrm{Diff}_k(A)$ gilt $[T, a](b) = T(ab) - aT(b) = 0$, insbesondere gilt fü $b = 1$ $T(a) = aT(1)$, d.h. T ist A-linear.

Wir haben bereits gezeigt, dass $Der_k(A) \subset F_1\mathrm{Diff}_k(A)$ gilt. Für $T \in Der_k(A)$ gilt $T(1) = T(1 \cdot 1) = 2T(1)$, also $T(1) = 0$. Das zeigt $Der_k(A) \cap A = \{0\}$. Sei jetzt $S \in F_1\mathrm{Diff}_k(A)$ und setze $T = S - S(1)$. Dann gilt $T(1) = 0$, also $T(a) = [T, a](1)$ und

$$T(ab) = [T, ab](1) = ([T, a]b)(1) + (a[T, b])(1) = (b[T, a])(1) + (a[T, b])(1) = T(a)b + aT(b) \qquad (1.2.1)$$

also $T \in Der_k(A)$. Das zeigt 2. .

Sei jetzt T, S von der Ordnung $\leq n$ bzw. $\leq m$. Wir wollen zeigen, dass $[T, S]$ von der Ordnung $\leq n+m-1$ ist. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach $n + m$. Im Fall $n = m = 0$ ist nichts zu zeigen. Im allgemeinen gilt wegen der Jacobi-Identiät

$$[[T, S], a] = [[T, a], S] + [T, [S, a]]$$

wobei $[T, a]$ und $[S, a]$ von der Ordnung $\leq n - 1$ bzw. $\leq m - 1$ sind. Aus der Induktionsannahme folgt dann, dass $[[T, S], a]$ von der Ordnung $\leq n + m - 2$ ist, also $[T, S]$ von der Ordnung $\leq n + m - 1$ ist. □

Dies zeigt, dass der graduierte Ring $Gr\mathrm{Diff}_k A$ eine kommutative A-Algebra ist und $\mathrm{Diff}_k(A)$ die Bedingungen 1. - 5. aus Abschnitt sec:filtRing 1.1 erfüllt.

Sei $n \geq 1$ und $T \in \mathrm{Diff}_k(A)$ der Ordnung $\leq n$. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \theta_n(T) : A^n &\longrightarrow A = F_0\mathrm{Diff}_k(A) \\ (a_1, \ldots, a_N) &\mapsto [[\ldots[[T, a_1], a_2], \ldots, a_{n-1}], a_n] \end{aligned} \qquad (1.2.2)$$

Lemma 1.15. *Sei T ein Differentialoperator der Ordnung $\leq n$, dann gilt:*

1. *Die Abbildung $\theta_n(T) : A^n \longrightarrow A$ ist symmetrisch und k-linear.*
2. *T ist von der Ordnung $\leq n - 1$ genau dann wenn $\theta_n(T) = 0$.*

Proof. Die k-Linearität ist klar. Für die erste Aussage bleibt die Symmetrie zu überprüfen. Die Jacobi-Identität liefert für $S \in \mathrm{Diff}_k(A)$ und $a, b \in A$

$$[[S, a], b] = [[S, b], a]$$

Das zeigt

$$\begin{aligned} \theta_n(T)(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n) &= [[\ldots[[\ldots[[T, a_1], a_2], \ldots, a_i], a_{i+1}], \ldots, a_{n-1}], a_n] \\ &= [[\ldots[[\ldots[[T, a_1], a_2], \ldots, a_{i+1}], a_i], \ldots, a_{n-1}], a_n] \\ &= \theta_n(T)(a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_{n-1}, a_n) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage ist klar. □

Wir betrachten jetzt den Speziallfall $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ und setzen $D(n) = \mathrm{Diff}_k(A)$. Wir nennen $D(n)$ die Algebra der Differential-Operatoren auf k^n. Seien $\partial_1, \ldots, \partial_n$ die Standard Derivationen auf $k[X_1, \ldots, X_n]$. Für $I, J \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ setzen wir

$$X^I = X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_n^{i_n} \qquad \text{und} \qquad \partial^J = \partial_1^{j_1} \partial_2^{j_2} \ldots \partial_n^{j_n}$$

Dann ist $X^I\partial^J \in D(n)$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq |J| := j_1 + \ldots + j_n$. Wird der Differentialoperator T durch

$$T = \sum_{|I|\leq p} P_I(X_1,\ldots,X_n)\partial^I$$

mit Polynomen $P_I \in k[X_1,\ldots,X_n]$ gegeben, dann ist T von der Ordnung $\leq p$.

Lemma 1.16. *Die Derivationen $\partial_1,\ldots,\partial_n$ sind eine Basis des freien $k[X_1,\ldots,X_n]$-Moduls $Der_k(k[X_1,\ldots,X_n])$.*

Proof. Sei $T \in Der_k(k[X_1,\ldots,X_n])$. Setzte $P_i = T(X_i)$ für $i = 1,\ldots,n$ und $S = \sum_{i=1}^n P_i\partial_i$. Es gilt

$$S(X_i) = \sum_{j=1}^n P_j\partial_j(X_i) = P_i = T(X_i).$$

Da die $X_1,\ldots,X_n$ die Algebra $k[X_1,\ldots,X_n]$ erzeugen, folgt $T = S$. Daher erzeugen die $\partial_1,\ldots,\partial_n$ den $k[X_1,\ldots,X_n]$-Modul $Der_k(k[X_1,\ldots,X_n])$. Nehme an es gilt $\sum_{i=1}^n Q_i\partial_i = 0$ für $Q_i \in k[X_1,\ldots,X_n]$. Dann gilt $0 = (\sum_{j=1}^n Q_j\partial_j)(X_i) = Q_i$ für $i = 1,\ldots,n$. Das zeigt, dass die $\partial_1,\ldots,\partial_n$ freie Erzeuger von $Der_k(k[X_1,\ldots,X_n]$ sind. $\square$

Sei T ein Differentialoperator der Ordnung $\leq p$ auf $k[X_1,\ldots,X_n]$. Ist $p < 0$, dann ist $T = 0$ und wir definieren $\sigma_p(T) = 0$. Für $p = 0$ ist $T \in A$ und wir definieren $\sigma_p(T) = T$. Sei $p \geq 1$. Wir setzen $B = k[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$. Dann ist $T \in End_k(B)$, indem wir $T(P(x)\xi^J) := T(P(x))\xi^J$ definieren. Insbesondere ist $T \in \mathrm{Diff}_k(B)$. Setze $l_\xi := \sum_{i=1}^n \xi_i X_i$ und definiere

$$\sigma_p(T) := \frac{1}{p!}\tau_\xi^p(T)$$

mit $\tau_\xi(T) = [T, l_\xi]$. Man sieht leicht, dass $\sigma_p(T) \in k[x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$ homogen vom Grad p in $\xi_1,\ldots,\xi_n$ ist und das $\sigma_p(T) = 0$ gilt, falls T Ordnung $< p$ hat. Wir erhalten also eine k-lineare Abbildung $Gr_pD(n) \to k[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$ bzw. eine Abbildung

$$\sigma : GrD(n) \to k[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$$

Das Element $\sigma(P)$ heißt **Symbol** von P.

em:sigmaHomo **Lemma 1.17.** *Seien $T, S \in D(n)$ von der Ordnung $\leq p$ bzw. $\leq q$. Dann gilt*

$$\sigma_{p+q}(TS) = \sigma_p(T)\sigma_q(S)$$

Proof. Es gilt

$$\tau_\xi(TS) = [TS, l_\xi] = TSl_\xi - l_\xi TS = [T, l_\xi]S + T[S, l_\xi] = \tau_\xi(T)S + T\tau_\xi(S)$$

Daraus folgt

$$\tau^{p+q}(TS) = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} \tau_\xi^{p+q-i}(T)\tau_\xi^i(S) = \binom{p+q}{q}\tau_\xi^p(T)\tau_\xi^q(S)$$

wobei die letzte Gleichung aus $\tau_\xi^k(T) = 0$ für $k > p$ folgt. Somit gilt

$$\sigma_{p+q}(TS) = \frac{1}{(p+q)!}\tau_\xi^{p+q}(TS) = \frac{1}{p!q!}\tau_\xi^p(T)\tau_\xi^q(S) = \sigma_p(T)\sigma_q(S)$$

$\square$

Theorem 1.18. *Die Abbildung $\sigma : GrD(n) \to k[X_1,\ldots,X_n,\xi_1,\ldots,\xi_n]$ ist ein k-Algebren Isomorphismus.*

Proof. Wegen Lemma lem:sigmaHomo 1.17 müssen wir nur noch die Injektivität und Surjektivität von σ zeigen. Es gilt $\sigma_0(X_i) = X_i$ und $\sigma_1(\partial_i) = \xi_i$, d.h. $\sigma_p(X^I\partial^J) = X^I\xi^J$ wobei $p = |J|$. Das zeigt die Surjektivität von σ.

Sei jetzt $T \in F_pD(n)$ und $\sigma_p(T) = 0$ um die Injektivität zu beweisen müssen wir zeigen, dass die Ordnung von $T \leq p-1$ ist. Wir beweisen dies per Induktion über die Ordnung p. Der Fall $p = 0$ ist klar. Sei also $p > 0$ und $\lambda \in k$ sowie $\eta \in k^n$. Es gilt

$$\tau_{\xi+\lambda\eta}(T) = [T, l_{\xi+\lambda\eta}] = [T, l_\xi] + \lambda[T, l_\eta] = \tau_\xi(T) + \lambda\tau_\eta(T)$$

Da τ_ξ und τ_η kommutieren gilt

$$\tau^k_{\xi+\lambda\eta}(T) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \tau_\xi^{k-i}(\tau_\eta^i(T))$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Weiterhin ist $\tau_\xi^p(T) = 0$ und somit gilt auch $\tau^p_{\xi+\lambda\eta}(T) = 0$. Da k unendlich viele Elemente besitzt, folgt $\tau_\xi^{p-i}(\tau_\eta^i(T)) = 0$ für $0 \leq i \leq p$. Insbesondere gilt $\tau_\xi^{p-1}(\tau_\eta(T)) = 0$ für $\eta \in k^n$. Also gilt auch $\tau_\xi^{p-1}([T, X_i]) = 0$. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $[T, X_i]$ von der Ordnung $\leq p-2$ ist. Für $P, Q \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt

$$[T, PQ] = TPQ - PQT = [T, P]Q + P[T, Q]$$

d.h. die Ordnung von $[T, PQ]$ ist kleiner gleich dem Maximum der Ordnungen von $[T, P]$ und $[T, Q]$. Da die X_i die Algebra $k[X_1, \ldots, X_n]$ erzeugen, folgt dass $[T, P]$ Ordnung $\leq p-2$ für alle Polynome P hat. Aus der Definition der Ordnung folgt, dass T Ordnung $\leq p-1$ hat. □

Das zeigt insbesondere, dass $D(n)$ die Annahmen 1. – 7. aus Abschnitt sec:filtRing 1.1 erfüllt. Wir bekommen daher unmittelbar folgende Aussage.

Theorem 1.19. *Der Ring $D(n)$ ist rechts und links noethersch.*

kor:BasisDn **Korollar 1.20.** *Die Elemente $\{X^I\partial^J\}_{I,J\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}}$ sind eine k-Vektorraumbasis von $D(n)$.*

Proof. Für $|J| = p$ ist das Symbol von $X^I\partial^J$ gleich $X^I\xi^J$ Da $D(n) \simeq GrD(n) \simeq k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ als k-Vektorräume und die $\{X^I\xi^J\}_{I,J\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}}$ eine Vektorraumbasis bilden, folgt die Aussage. □

thm:relDn **Theorem 1.21.** *Die k-Algebra $D(n)$ ist isomorph zur k-Algebra, die durch $X_1, \ldots, X_n.\partial_1, \ldots, \partial_n$ erzeugt wird und für $1 \leq i, j \leq n$ die Relationen $[X_i, X_j] = 0, [\partial_i, \partial_j] = 0, [\partial_i, X_j] = \delta_{ij}$ erfüllt.*

Proof. Sei B die k-Algebra, die durch $X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$ erzeugt wird und für $1 \leq i, j \leq n$ die Relationen $[X_i, X_j] = 0, [\partial_i, \partial_j] = 0, [\partial_i, X_j] = \delta_{ij}$ erfüllt. Da diese Relationen auch in $D(n)$ erfüllt sind und $D(n)$ von $X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$ erzeugt wird, er halten wir einen surjektiven k-Algebrenhomomorphismus $B \to D(n)$, der die Erzeuger auf die Erzeuger abbildet. B wird als k-Vektorraum von $\{X^I\partial^J\}_{I,J\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}}$ aufgespannt. Wegen Korollar kor:BasisDn 1.20 ist dieser Morphismus dann auch injektiv. □

rop:centerD **Proposition 1.22.** *Das Zentrum von $D(n)$ ist $k \cdot 1$.*

Proof. Sei $T \in D(n)$ ein Element vom Zentrum. Dann gilt $[T, P] = 0$ für jedes Polynom P, d.h. T ist von der Ordnung ≤ 0, d.h. $T \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Andererseits gilt $0 = [\partial_i, T] = \partial_i(T)$ für $i = 0, \ldots, n$. Da zeigt, dass T konstant ist. □

Sei $D(n)^\circ$ die transponierte Algebra von $D(n)$. Dann existiert wegen Theorem thm:relDn 1.21 ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $\phi : D(n)^\circ \to D(n)$ der für $1 \leq i \leq n$ durch $\phi(X_i) \mapsto X_i$ und $\phi(\partial_i) \mapsto -\partial_i$ gegeben ist. Der Morphismus ϕ heißt **kanonischer Anti-Automorphismus** von $D(n)$.

Wegen Theorem 1.21 können wir einen Automorphismus $\mathcal{F}$ von $D(n)$ definieren, der für $1 \leq i \leq n$ durch $\mathcal{F}(X_i) = \partial_i$ und $\mathcal{F}(\partial_i) = -X_i$ gegeben ist. Dieser Automorphismus heißt **Fourier-Transformation** von $D(n)$. Das Quadrat $\mathcal{F}^2$ von $\mathcal{F}$ ist ein Automorphismus ι von $D(n)$, der $\iota(X_i) = -X_i$ und $\iota(\partial_i) = -\partial_i$ erfüllt. Es gilt $\iota^2 = -1$.

Im Gegensatz zu anderen Ringen von Differentialoperatoren, hat $D(n)$ noch eine andere Filtration die mit der Ringstruktur kompatibel ist. Wir setzen für $p \in \mathbb{Z}$

$$D_p(n) := \{\sum a_{IJ} X^I \partial^J \mid |I| + |J| \leq p\}\,.$$

Die Filtrierung $\{D_p(n)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ ist eine aufsteigende, ausschöpfende Filtrierung von endlich-dimensionalen k-Vektorräumen auf $D(n)$.

Lemma 1.23. *Für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt*

1. $D_p(n) \circ D_q(n) \subset D_{p+q}(n)$,
2. $[D_p(n), D_q(n)] \subset D_{p+q-2}(n)$.

Proof. Wegen Korollar 1.20 und der Definition der Filtrierung $\{D_p(n)\}_{p\in\mathbb{Z}}$, reicht es

$$[\partial^I, X^J] \in D_{|I|+|J|-2}$$

zu zeigen. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach $|I|$. Für $|I| = 1$ gilt $\partial^I = \partial_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Es gilt $[\partial_i, X^J] = \partial_i(X^J) \in D_{|J|-1}(n)$. Für $|I| > 1$ schreiben wir $\partial^I = \partial^{I'}\partial_i$ für $I' \in \mathbb{Z}^{n-1}_{\leq 0}$ und $1 \leq i \leq$. Das liefert

$$[\partial^I, X^J] = [\partial^{I'}\partial_i, X^J] = \partial^{I'}\partial_i X^J - X^J\partial^{I'}\partial_i = \partial^{I'}[\partial_i, X^J] + [\partial^{I'}, X^J]\partial_i$$

Wegen der Induktionsannahme ist dann $[\partial^I, X^J] \in D_{|I|+|J|-2}$. □

Das zeigt, dass $\{D_p(n)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ eine Filtrierung ist, die kompatibel mit der Ringtruktur auf $D(n)$ ist. Wir nennen die Filtrierung **Bernstein-Filtrierung**.

Der assozierte, graduierte Ring $Gr^B_\bullet D(n)$ ist eine kommutativen k-Algebra. Wir definiern eine lineare Abbildung Ψ_p vom k-Vektorraum $D_p(n)$ nach $k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ durch

$$\Psi_p(\sum_{|I|+|J|\leq p} a_{IJ} X^I \partial^J) = \sum_{|I|+|J|=p} a_{IJ} X^I \xi^J$$

Dies liefert einen k-linearen Isomorphismus von $Gr^B_p D(n)$ in die homogenen Polynome vom Grad p und damit einen k-Algebrenisomorphismus

$$\Psi : GrD(n) \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$$

Der Ring $D(n)$ zusammen mit der Bernstein-Filtrierung erfüllen damit die Annahmen 1. - 7. aus Abschnitt 1.1. Es ist leicht zu sehen, das der kanonische Anti-Automorphismus und die Fourier-Transformation die Bernstein-Filtrierung erhalten.

1.3 Moduln über Ringen von Differentialoperatoren

Definition 1.24. *Wir bezeichnen mit $M^L(D(n))$ bzw . $M^R(D(n))$ die abelsche Kategorie der links bzw. rechts $D(n)$-Moduln*

Der kanonische Anti-Automorphismus ϕ definiert einen exakten Funktor von der Kategorie $M^R(D(n))$ in die Kategorie $M^L(D(n))$ durch

$$M \mapsto M^t \tag{1.3.1}$$ eq:rightleft

wobei M^t der gleichen additiven Gruppe wie M unterliegt und die Links-Multiplikation auf M^t durch $\phi(T) \cdot m = m \cdot T$ für $m \in M$ und $T \in D(n)$ definiert ist. Analog kann man auch einen Funktor $M^L(D(n)) \to M^R(D(n))$ definieren, s.d. die beiden Funktoren zueinander invers sind.

Wir bezeichnen mit $M^L_{fg}(D(n))$ bzw. $M^R_{fg}(D(n))$ die vollen Unterkategorien der endlich erzeugten $D(n)$-Moduln. Die obigen *Rechts-Links* Funktoren induzieren ebenso zwischen diesen beiden Kategorien eine Äquivalenz.

Da wir im folgenden eher Links-Moduln diskutieren, lassen wir in den obigen Bezeichnungen den Index L zumeist weg.

Da $D(n)$ noethersch ist, ist die volle Unterkategorie $M_{fg}(D(n))$ von $M(D(n))$ abgeschlossen unter der Bildung von Untermoduln, Quotienten und Extensionen.

Sei jetzt $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung versehen. Da $D_0(n) = k$ ist, können wir für Moduln aus $M^L_{fg}(D(n))$ bzw. $M^R_{fg}(D(n))$ mit Hilfe der additiven Funktion k die Bernstein-Dimension $d(M)$ und die Bernstein Multiplizität $e(M)$ definieren. Da der kanonische Anti-Automorphismus die Bernstein-Filtrierung erhält gilt $d(M) = d(M^t)$ für alle endlich erzeugten $D(n)$-Moduln.

Lemma 1.25. *Für einen endlich erzeugten $D(n)$-Modul M gilt $d(M) \leq 2n$.*

Proof. Für einen endlich erzeugten $D(n)$-Modul haben wir eine exakte Sequenz $D(n)^p \to M \to 0$. Aus Proposition 1.10 folgt dann $d(M) \leq d(D(n))$. Wegen dem Vektorraum-Isomorphismus

$$D_p(n) \simeq \bigoplus_{i \leq p} Gr^B_i D(n) \simeq \bigoplus_{i \leq p} k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]_i,$$

wobei $k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]_i$ der Untervektorraum der homogenen Polynome vom Grad i ist, folgt aus Beispiel 2.6 und Lemma 2.9, dass $d(D(n)) = 2n$ gilt. Das zeigt die Aussage. ☐

ernsteinineq **Theorem 1.26** (Bernstein)**.** *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul und $M \neq 0$. Dann gilt $d(M) \geq n$.*

Proof. Da M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul ist, besitzt er nach Lemma 1.4 eine gute Filtration $F_\bullet M$. Nach einer Verschiebung der Indizes können wir annehmen, dass $F_n M = 0$ für $n < 0$ und $F_0 M \neq 0$ gilt. Für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} D_p(n) & \longrightarrow & Hom_k(F_p M, F_{2p} M) \\ T & \mapsto & (m \mapsto Tm) \end{array}$$

Wir wollen per Induktion zeigen, dass diese Abbildung injektiv ist. Für $p = 0$ ist die Aussage klar. Nehme also an die Aussage gilt für $p - 1$ und sei $T \in D_p(N)$, s.d. $Tm = 0$ gilt für alle $m \in F_p M$. Dann gilt für jedes $v \in F_{p-1} M$, dass $v, X_i v, \partial_i v \in F_p M$, also

$$[X_i, T]v = X_i T v - T X_i v = 0 \qquad [\partial_i, T]v = \partial_i T v - T \partial_i v = 0$$

Da $[X_i, T], [\partial_i, T] \in D_{p-1}(n)$ gilt folgt aus der Induktionsannahme, dass $[X_i, T] = [\partial_i, T] = 0$, d.h. T liegt im Zentrum von $D(n)$. Da das Zentrum aber gleich k (siehe Proposition 1.22) ist, folgt $T = 0$. Daher gilt

$$\dim_k(D_p(n)) \leq \dim_k(Hom_k(F_p M, F_{2p} M)) = \dim_k(F_p M) \cdot \dim_k(F_{2p} M)$$

Andererseits ist für große $p \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ die linke Seite gleich einem Polynom in p vom Grad $2n$ mit positivem Leitkoeffizient und die rechte Seite ist gleich einem Polynom in p vom Grad $2d(M)$ mit positiven Leitkoeffizient. Das ist nur möglich, falls $d(M) \geq n$ gilt. $\square$

Sei M ein $D(n)$-Modul. Wir definieren seine **Fourier-Transformation** $\mathcal{F}(M)$ als den Modul, der als abelsche Gruppe gleich M ist und das äußere Produkt mit $D(n)$ ist definiert als

$$(T, m) \mapsto \mathcal{F}(T)m \qquad \text{für} \quad T \in D(n), m \in M$$

Die Fourier-Transformation ist ein Automorphismus in der Kategorie $M(D(n))$ bzw. $M_{fg}(D(n))$.

Lemma 1.27. *Sei M ein endlich erzeuger $D(n)$-Modul. Dann gilt $d(\mathcal{F}(M)) = d(M)$.*

Proof. Das folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die Fourier-Transformation die Bernstein Filtrierung erhält. $\square$

1.4 Charakteristische Varietät

In diesem Kapitel werden wir eine geometrische Invariante eines endlich erzeugten $D(n)$-Moduls studieren. Wir werden dazu die Filtration $F_\bullet D(n)$ (die Filtration nach der Ordnung) benutzen.

Da jeder $D(n)$-Modul M als $k[X_1, \dots, X_n]$-Modul aufgefasst werden kann, können wir seinen Träger $\operatorname{supp}(M) \subset k^n$ betrachten.

Proposition 1.28. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann ist $\operatorname{supp}(M)$ eine abgeschlossene Untervarietät von k^n.*

Proof. Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtration auf M. Sei $x \in k^n$, dann ist $M_x = 0$ äquivalent zu $(F_pM)_x = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Da lokalisieren exakt ist, ist dies äquivalent zu $(GrM)_x = 0$. Sei I_p der Annihilator des endlich erzeugten $k[X_1, \dots, X_n]$-Moduls Gr_pM. Aus Proposition 2.21 folgt, dass $\operatorname{supp}(Gr_pM) = V(I_p)$. Aus Lemma 2.20 folgt dann, dass $\operatorname{supp}(M) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} V(I_p)$. Seien $m_1, \dots, m_s$ homogene Erzeuger des $GrD(n)$-Moduls GrM. Sei $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ der Annihilator von $m_1, \dots, m_s$. Dieser annihiliert dann ganz $Gr_\bullet M$. D.h es existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathbb{Z}$, s.d. $\bigcap_{p \in \mathcal{S}} I_p = I \subset I_q$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt aber $\bigcup_{p \in S} V(I_p) = V(\prod_{p \in S} I_p) = V(\bigcap_{p \in S} I_p) = V(I) \supset V(I_q)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ und damit die Aussage. $\square$

Sei D ein filtrierter Ring mit einer Filtration $F_\bullet D$, die die Eigenschaften 1. - 7. aus Abschnitt 1.1 erfüllen. Sei M ein endlich erzeugter D-Modul und $F_\bullet M$ eine gute Filtration. Dann ist GrM ein graduierter GrD-Modul. Sei $I \subset GrD$ der Annihilator von GrM. Da I ein graduiertes Ideal ist, ist sein Radikal $\operatorname{rad}(I)$ auch graduiert. Im allgemeinen hängt I von der Wahl der guten Filtrierung auf M ab. Wir haben aber folgendes Resultat.

Lemma 1.29. *Sei M ein endlich erzeugter D-Modul und $F_\bullet M$ bzw. $F'_\bullet M$ zwei gute Filtrierungen. Seien I bzw. I' die Annihilatoren der graduierten GrD-Moduln $Gr^F M$ bzw. $Gr^{F'} M$. Dann gilt $\operatorname{rad}(I) = \operatorname{rad}(I')$.*

Proof. Sei $T \in \operatorname{rad}(I) \cap Gr^p D$. Dann existiert ein $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $T^s \in I$. Sei $Y \in F_pD$, s.d. $Y + F_{p-1}D = T$ gilt. Wir erhalten somit $Y^s F_q M \subset F_{q+sp-1} M$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Per Induktion erhalten wir

$$Y^{ms} F_q M \subset F_{q+msp-m} M$$

für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $q \in \mathbb{Z}$. Andererseits wissen wir aus Korollar 1.8, dass $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ äquivalent sind. Es gibt also ein $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,s.d. $F_q M \subset F'_{q+l} M \subset F_{q+2l} M$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt. Daraus folgt

$$Y^{ms} F'_q M \subset Y^{ms} F_{q+l} M \subset F_{q+l+msp-m} \subset F'_{q+2l+msp-m} M$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nehmen wir $m > 2l$, dann folgt daraus $Y^{ms} F'_q M \subset F'_{q+msp-1} M$, d.h. $T^{ms} \in I'$, also $T \in \mathrm{rad}(I')$ und somit $\mathrm{rad}(I) \subset \mathrm{rad}(I')$. Aus Symmetrie folgt dann $\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(I')$. $\square$

Daraus folgt, dass das Radikal des Annihilators von $Gr_\bullet M$ unabhängig von der Wahl der guten Filtrierung auf M ist. Wir bezeichnen dieses Radikalideal mit $J(M)$ und nennen es **charakteristisches Ideal**.

Wir wenden diese Konstruktion auf den Ring $D(n)$ mit der Ordnungsfiltration an. Da $Gr_\bullet D(n) = k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ gilt, erhalten wir eine affine algebraische Varietät

$$Ch(M) := V(J(M)) \subset k^{2n}$$

die sogenannte **charakteristische Varietät** von M.

Da $J(M)$ in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_n$ ein homogenes Ideal ist, erhalten wir folgendes Resultat.

Lemma 1.30. *Die charakteristische Varietät $Ch(M)$ eines endlich erzeugten $D(n)$-Moduls M hat die folgende Eigenschaft: Ist $(x, \xi) \in Ch(M)$ dann ist für jedes $\lambda \in k$ auch $(X, \lambda\xi) \in Ch(M)$.*

Man sagt auch, dass $Ch(M)$ eine **konische Varietät** ist.

Proposition 1.31. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten $D(n)$-Moduln. Dann gilt

$$Ch(M) = Ch(M') \cup Ch(M'')$$

Proof. Sei $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M. Diese Filtrierung induziert gute Filtrierungen $F_\bullet M'$ und $F_\bullet M''$. Aus 1.9 wissen wir, dass die induzierten Filtrierungen auch gut sind. Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Gr_\bullet M' \longrightarrow Gr_\bullet M \longrightarrow Gr_\bullet M'' \longrightarrow 0$$

von endlich erzeugten $k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$-Moduln, deren Träger wegen Proposition 2.21 gleich den charakteristischen Varietäten von M, M' und M'' sind. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 2.20. $\square$

Sei $\pi : k^{2n} \to k^n$ die Projektion definiert durch $\pi(x, \xi) = x$.

Proposition 1.32. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann gilt* $\mathrm{supp}(M) = \pi(Ch(M))$.

Proof. Seien $m_1, \dots, m_s$ homogene Erzeuger von $Gr_\bullet M$. Wir haben im Beweis von Proposition 1.28 gesehen, dass der Annihilator $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ von $m_1, \dots, m_s$ die Gleichung $V(I) = \mathrm{supp}(M)$ erfüllt. Ist nun andererseits J der Annihilator von $m_1, \dots, m_s$ in $k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$, dann gilt $I = k[X_1, \dots, X_n] \cap J$ und $Ch(M) = V(J)$. Das zeigt, dass $x \in V(I) = \mathrm{supp}(M)$ äquivalent zu $(x, 0) \in V(J) = Ch(M)$. Da $CH(M)$ konisch ist zeigt das die Behauptung. $\square$

Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Wir definieren den **singulären Träger** von M als

$$\mathrm{sing\,supp}(M) = \{x \in k^n \mid (x, \xi) \in Ch(M) \text{ for some } \xi \neq 0\}$$

Es gilt $\mathrm{sing\,supp}(M) \subset \mathrm{supp}(M)$.

Lemma 1.33. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann ist* $\mathrm{sing\,supp}(M)$ *eine abgeschlossene Untervarietät von* $\mathrm{supp}(M)$.

Proof. Sei $p : k^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ die natürliche Projektion. Dann projeziert die Abbildung

$$id \times p : k^n \times (k^n \setminus \{0\}) \longrightarrow k^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

die Varietät $Ch(M) \setminus (k^n \times \{0\})$ auf die abgeschlossene Untervarietät von $k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ die dem Ideal $J(M)$, welches homogen in $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist, entspricht. Die Projektion auf den ersten Faktor $q : k^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to k^n$ bildet diese Untervarietät auf $\operatorname{sing\,supp}(M)$ ab. Da q projektiv und damit eigentlich ist, ist $\operatorname{sing\,supp}(M)$, als Bild einer abgeschlossenen Varietät, selbst abgeschlossen. □

Das folgende Resultat liefert eine geometrische Charakterisierung der Bernstein-Dimension.

erneqChardim

Theorem 1.34. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Dann gilt*

$$\dim Ch(M) = d(M)$$

Wir beweisen das Theorem in mehreren Schritten. Als erstes betrachten wir den zyklischen $D(n)$-Modul $M = D(n)/L$ wobei L ein links-Ideal in $D(n)$ ist. Wir erhalten eine exakte Sequenz von D-Moduln

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow D(n) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Die Filtration nach der Ordnung eines Differentialoperators auf $D(n)$ induziert Filtrationen auf L und M. Damit erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Gr_\bullet L \longrightarrow Gr_\bullet D(n) \longrightarrow Gr_\bullet M \longrightarrow 0$$

von $Gr_\bullet D(n)$-Moduln. Das heißt $Gr_\bullet M$ ist isomorph zum Quotienten $Gr_\bullet D(n)/Gr_\bullet L$ und daher ist der Annihilator von $Gr_\bullet M$ isomorph zu $Gr_\bullet L$. Die charakteristische Varietät von M ist also per Definition gleich $V(Gr_\bullet L)$. Um also das Theorem im Spezialfall $M = D(n)/L$ zu bweisen , müssen wir $\dim V(Gr_\bullet L) = d(D(n)/L)$ zeigen.

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Wir definieren zuerst eine Familie von Graduierungen auf R. Sei $s \in \mathbb{Z}_{>1}$ Wir definieren $Gr_m^{(s)} R$ als linearen Span der Monome $X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_n^{j_n}$, s.d. $\sum_{k=1}^n (i_k + s \cdot j_k) = m$ gilt. Das macht R für jedes $s \in \mathbb{Z}_{>1}$ zu einem graduierten Ring. Zusätzlich definieren wir eine entsprechende Filtrierung $F_p^{(s)} R := \bigoplus_{m \leq p} Gr_m^{(s)} R$.

Ist $F_\bullet R$ die natürliche Filtration nach dem Grad der Polynome (also $F_\bullet R = F_\bullet^{(1)} R$) dann gilt

$$F_p^{(s)} R \subset F_p R \qquad \text{und} \qquad F_p R \subset F_{sp}^{(s)} R$$

Sei $I \subset R$ ein Ideal. Betrachte die kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ mit den dazugehörigen induzierten Filtrierungen. Dann gilt

$$F_p^{(s)}(R/I) \subset F_p(R/I) \qquad \text{und} \qquad F_p(R/I) \subset F_{sp}^{(s)}(R/I)$$

und insbesondere

$$\dim_k F_p^{(s)}(R/I) \leq \dim_k F_p(R/I) \qquad \text{und} \qquad \dim_k F_p(R/I) \leq \dim_k F_{sp}^{(s)}(R/I) \tag{1.4.1}$$

eq:eq1charVa

Sei $s \in \mathbb{Z}_{>1}$. Wir definieren eine Filtrierung $F^{(s)} D(n)$ durch

$$F_m^{(s)} D(n) = \left\{ T \in D(n) \mid T = \sum_{|I|+s|J| \leq m} c_{IJ} X^I \partial^J, c_{IJ} \in k \right\}$$

Für $s = 1$ ist $F_\bullet^{(1)}D(n)$ die Bernstein-Filtrierung. Die Filtrierung $F_\bullet^{(s)}D(n)$ erfüllt die Bedingungen $1. - 3.$ aus Abschnitt 1.1. Um Bedingung 4. zu zeigen bemerken wir folgendes: Sei $T \in D(n)$ von der Ordnung $\leq q$. Dann gilt

$$T \in F_m^{(s)}D(n) \Leftrightarrow T \in F_p^{(1)}D(n)$$

für $m = p + (s-1)q$. Sei also $T \in F_m^{(s)}D(n)$ und $S \in F_{m'}^{(s)}D(n)$ von der Ordnung $\leq q$ bzw. $\leq q'$. Dann ist $T \in F_p^{(1)}D(n)$ bzw. $S \in F_{p'}^{(1)}D(n)$ für $p = m - (s-1)q$ bzw. $p' = m' - (s-1)q'$. Die Ordung von TS ist $\leq q + q'$ und es gilt $TS \in F_{p+p'}^{(1)}D(n)$. Daraus folgt $TS \in F_{m+m'}^{(s)}D(n)$. Der Beweis der Eigenschaft 5. ist ähnlich. Das heißt der graduierte Ring $Gr_\bullet^{(s)}D(n)$ ist isomorph zum graduierten Ring $Gr_\bullet^{(s)}R$. Wie weiter oben bezeichen wir die assozierte Filtrierung mit $F_\bullet^{(s)}R$. Insbesondere gilt

$$F_p^{(s)}D(n) \subset F_p^{(1)}D(n) \qquad \text{and} \qquad F_p^{(1)}D(n) \subset F_{sp}^{(s)}D(n)$$

Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow D(n) \longrightarrow D(n)/L \longrightarrow 0 \tag{1.4.2}$$

von $D(n)$-Moduln mit den induzierten Filtrierungen $F_\bullet^{(s)}$. Dann gilt

$$F_p^{(s)}(D(n)/L) \subset F_p^{(1)}(D(n)/L) \qquad \text{und} \qquad F_p^{(1)}(D(n)/L) \subset F_{sp}^{(s)}(D(n)/L)$$

Insbesondere gilt

$$\dim_k F_p^{(s)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) \qquad \text{und} \qquad \dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) \tag{1.4.3}$$

Lemma 1.35. *Sei L ein Links-Ideal von $D(n)$. Dann gilt*

$$d(D(n)/L) = \dim V(Gr_\bullet^{(s)}L)$$

für alle $s \in \mathbb{N}$.

Proof. Aus der kurzen exakten Sequenz (1.4.2) und den induzierten Filtrierungen $F_\bullet^{(s)}$ erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Gr_\bullet^{(s)}L \longrightarrow Gr_\bullet^{(s)}D(n) \longrightarrow Gr_\bullet^{(s)}(D(n)/L) \longrightarrow 0$$

Wir haben weiter oben bereits gesehen, dass $Gr_\bullet^{(s)}D(n) \simeq Gr_\bullet^{(s)}R$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\dim_k F_p^{(s)}(D(n)/L) &= \sum_{q=0}^{p}(\dim_k F_q^{(s)}(D(n)/L) - \dim_k F_{q-1}^{(s)}(D(n)/L)) \\
&= \sum_{q=0}^{p} \dim_k Gr_q^{(s)}(D(n)/L) \\
&= \sum_{q=0}^{p}(\dim_k Gr_q^{(s)}D(n) - \dim_k Gr_q^{(s)}L) \\
&= \sum_{q=0}^{p}(\dim_k Gr_q^{(\mathbf{s})}R - \dim_k Gr_q^{(s)}L) \\
&= \sum_{q=0}^{p} \dim_k Gr_q^{(\mathbf{s})}(R/Gr_\bullet^{(s)}L) \\
&= \dim_k F_p^{(\mathbf{s})}(R/Gr_\bullet^{(s)}L)
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

eq:eq1charVar eq:eq2charVar

Indem wir (1.4.1) und (1.4.3) benutzen erhalten wir

$$\dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) = \dim_k F^{(\mathbf{s})}(R/Gr^s_\bullet L) \leq \dim_k F_{sp}(R/Gr^{(s)} L)$$

und

$$\dim_k F_p(R/Gr^s_\bullet L) \leq \dim_k F_{sp}^{(\mathbf{s})}(R/Gr_\bullet^{(s)} L) = \dim_k F_{sp}^{(s)}(D(n)/L) \leq \dim_k F_{sp}^{(1)}(D(n)/L)$$

Da die Funktionen $p \mapsto \dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L)$ bzw. $p \mapsto \dim_k F_p(R/Gr_\bullet^{(s)} L)$ für große $p \in \mathbb{Z}$ als Polynome dargestellt werden können, müssen diese Polynome den gleichen Grad haben. Das heißt es gilt $d((D(n)/L) = d(R/Gr_\bullet^{(s)} L)$. Da $Gr_\bullet^{(s)} L$ der Annihilator von $R/Gr_\bullet^{(s)} L$ ist, folgt die Aussage aus Theorem thm:deqdim 2.24. $\square$

Wir bezeichnen mit $\sigma_p^{(s)}(T)$ die Projektion von $T \in F_p^{(s)} D(n)$ nach $Gr_p^{(s)} D(n) = R$. Für $R = k[X_1, \dots, X_n, \xi_1, \dots, \xi_n]$ mit der natürlichen Filtrierung bezeichnen wir mit $Symb_p$ die Abbildung, die jedes Polynom vom Grad p auf ihren homogenen Anteil vom Grad p abbildet.

Beispiel 1.36. *Sei $T \in D(1)$ mit $T = x^3\partial + \partial^2 + x\partial^2$. Dann ist die Ordnung von T kleiner gleich 2 und es gilt $\sigma_2(T) = \xi^2 + x\xi^2$ sowie $Symb_3(\sigma_2(T)) = x\xi^2$. Andererseits gilt $\sigma_4^{(1)}(T) = x^3\xi$, $\sigma_5^{(2)}(T) = x^3\xi + x\xi^2$ und $\sigma_{2s+1}^{(s)}(T) = x\xi^2$ für $s \geq 2$.*

Dies gillt allgemein: Für große s ist $\sigma^{(s)}(T)$ gleich $Symb(\sigma(T))$.

lem:GreqGrs **Lemma 1.37.** *Sei T ein Differentialoperator in $D(n)$ von der Ordnung $\leq m$, s.d. sein Symbol ein Polynom vom Grad p ist. Dann existiert ein s_0, s.d. für $s \geq s_0$*

$$\sigma_p(Symb_m(T)) = \sigma_{p+(s-1)m}^{(s)}(T)$$

gilt.

Proof. Sei $T = \sum_{|J| \leq m} c_{IJ} X^I \partial^J$. Da die Summe endlich ist, existiert ein $q_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,s.d. für $c_{IJ} \neq 0$ die Ungleichung $|I| \leq q_0$ gilt. Per Annahme ist

$$\sigma_m(T) = \sum_{|J|=m} c_{IJ} X^I \xi^J$$

ein Polynom vom Grad p und sein Leitterm ist

$$Symb_p(\sigma_m(T)) = \sum_{|I|=p-m, |J|=m} c_{IJ} X^I \xi^J$$

Andererseits sind die Monome $X^I \partial^J \in F_{|I|+s|J|}^{(s)} D(n)$. Für $c_{IJ} \neq 0$ ergeben sich daher folgende Möglichkeiten:

1. $|J| = m$ und $|I| = p - m$: $X^I \partial^J \in F_{p+(s-1)m}^{(s)} D(n)$
2. $|J| = m$ und $|I| < p - m$: $X^I \partial^J \in F_{p+(s-1)m-1}^{(s)} D(n)$
3. $m \geq 1$, $|J| < m$ und $|I| \leq q_0$: $X^I \partial^J \in F_{q_0+s(m-1)}^{(s)} D(n)$. Außerdem gilt

$$q_0 + s(m-1) = q_0 + sm - s = q_0 + m - s + (s-1)m$$

   Das heißt, wenn $s \geq s_0 = q_0 + m - p + 1$, dann gilt $q_0 + s(m-1) \leq p + (s-1)m - 1$, also ist in diesem Fall $X^I \partial^J \in F_{p+(s-1)m-1}^{(s)} D(n)$. Daraus folgt im Fall $s \geq s_0$, dass

$$\sigma_{p+(s-1)m}^{(s)}(T) = \sum_{|I|=p-m, |J|=m} c_{IJ} X^I \xi^J = Sigma_p(\sigma_m(T)).$$

□

Wir wählen jetzt endlich viele $T_i \in L$, s.d. die $Symb(\sigma(T_i))$ das Ideal $Gr_\bullet(Gr_\bullet L)$ erzeugen. Wegen Lemma 1.37 existiert ein s, s.d. $Symb(\sigma(T_i)) = \sigma^{(s)}(T_i)$ simultan für alle T_i. Daraus folgt $Gr_\bullet(Gr_\bullet L) \subset Gr_\bullet^{(s)} L$ bzw. $V(Gr_\bullet(Gr_\bullet L)) \supset V(Gr_\bullet^{(s)} L)$ und somit $\dim V(Gr_\bullet(Gr_\bullet L)) \geq \dim V(Gr^{(s)} L)$. Aus Lemma 2.26 folgt aber $\dim(V(Gr_\bullet L)) = \dim V(Gr_\bullet(Gr_\bullet L))$. Aus Lemma 1.35 folgt dann $\dim V(Gr_\bullet L) \geq d(D(n)/L)$.

Wir beweisen jetzt die umgekehrte Richtung. Sei $T \in F_p^{(1)}(D(n))$, dann gilt $ord(T) \leq p$ und $\sigma(T)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq p$. Daher gilt $Gr_\bullet F_p^{(1)} L \subset F_p(Gr_\bullet L)$[2] Da $F_p^{(1)}(L)$ endlich dimensional und hausdorffsch ist, gilt

$$\dim_k F_p^{(1)}(L) = \dim_k Gr_\bullet F_p^{(1)}(L) \leq \dim_k F_p(Gr_\bullet L)$$

und damit

$$\dim_k F_p^{(1)}(D(n)/L) = \dim_k D_p(n) - \dim_k F_p^{(1)}(L) \geq \dim_k F_p R - \dim_k F_p(Gr_\bullet L) = \dim_k F_p(R/Gr_\bullet L)$$

Dies impliziert $d(D(n)/L) \geq d(R/Gr_\bullet L)$. Da $Gr_\bullet L$ der Annihilator von $R/Gr_\bullet L$ ist folgt aus Proposition 2.21 und Theorem 2.24, dass $d(D(n)/L) \geq \dim V(GrL)$ gilt. Wir haben somit gezeigt, dass

$$d(D(n)/L) = \dim V(Gr_\bullet L)$$

gilt.

Im allgemeinen Fall beweisen wir das Theorem per Induktion nach der Anzahl der Erzeuger. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

wobei wir annehmen, dass M q Erzeuger, M' $q-1$ Erzeuger hat und M'' zyklisch ist. as heißt M'' ist isomorph zu $D(n)/L$ für ein geeignetes Links-Ideal L. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt dann $d(M'') = \dim Ch(M'')$. Aus der Induktionsannahme folgt $d(M') = \dim Ch(M')$. Aus Proposition 1.10 und Proposition 1.31 folgt

$$d(M) = \max(d(M'), d(M'')) = \max(\dim Ch(M'), \dim Ch(M'')) = \dim(CH(M') \cup \dim Ch(M'')) = \dim Ch(M).$$

Damit ist der Beweis des Theorems fertig.

Aus dem Theorem und Theorem 1.26 folgt

Korollar 1.38. *Sei M ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul und $M \neq 0$. Dann gilt $\dim Ch(M) \geq n$.*

1.5 Holonome D-Moduln

Definition 1.39. *Ein endlich erzeugter D-Modul heißt* ***holonom*** *falls die Dimension seiner charakteristischen Varietät $\leq n$ ist. Das heißt, M ist holonom falls entweder $M = 0$ oder $\dim Ch(M) = n$ gilt.*

thm:propHol **Theorem 1.40.**

1. *Holonome D-Moduln haben endliche Länge*
2. *Unter-Moduln, Quotienten und Extensionen von holonomen Moduln sind holonom.*

[2] Die Inklusion ist i. a. strikt. Betrachte $L = (x\partial^{p-1} + x^{p+1})$. Dann ist $x\xi^{p-1} \in F_p Gr_\bullet L$ aber $x\partial^{p-1} + x^{p+1} \notin F_p^{(1)}(L)$.

Proof. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus Proposition prop:charVarshortex 1.31. Um die erste Aussage zu beweisen betrachten wir einen holonomen $D(n)$-Modul M der ungleich null ist. Wegen Theorem thm:BerneqChardim 1.34 ist seine Bernstein Dimension gleich n. Da M endlich erzeugt und $D(n)$ noethersch ist, existiert eine maximaler $D(n)$-Untermodul $M' \subsetneq M$. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

Wegen der zweiten Aussage ist M' und M/M' holonom und M/M' ist ein irreduzibler $D(n)$-Modul. Ist $M' \neq 0$ dann folgt aus Proposition prop:exSeqDimMultnonLocal 1.10, dass $e(M') < e(M)$ gilt. Die Behauptung folgt dann per Induktion nach der Multiplizität $e(M)$. □

Wir bezeichnen mit $Hol(D(n))$ die volle Unterkategorie von $M_{fg}(D(n))$ der holonomen D-Moduln.

Beispiel 1.41. *Sei $O_n = k[X_1, \ldots, X_n]$, dann ist $O_n \simeq D(n)/(D(n)(\partial_1, \ldots, \partial_n))$ ein endlich erzeugter $D(n)$-Modul. Wir definieren eine Filtrierung*

$$F_pO_n = \begin{cases} O_n & \text{für } p \geq 0 \\ 0 & \text{für } p < 0 \end{cases}$$

Die Filtrierung $F_\bullet O_n$ ist eine gute Filtrierung bzgl. der Ordnungsfiltration auf $D(n)$. Für den graduierten Modul $Gr_\bullet O_n$ gilt

$$Gr_pO_n = \begin{cases} k[X_1, \ldots, X_n] & \text{für } p = 0 \\ 0 & \text{für } p \neq 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Annihilator von $Gr_\bullet O_n$ als Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ erzeugt wird. Daraus folgt, dass $Ch(O_n) = k^n \times \{0\} \subset k^{2n}$ gilt. Insbesonders gilt $\dim Ch(O_n) = n$, also ist O_n ein holonomer $D(n)$-Modul. Durch Ableiten sehen wir, dass jeder $D(n)$-Untermodul von O_n die 1 enthält, d.h. O_n ist irreduzibel.

prop:holFL **Proposition 1.42.** *Sei M ein holonomer $D(n)$-Modul, dann ist die Fourier-Transformation $\mathcal{F}(M)$ auch holonom. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ ein Automorphismus der Kategorie $Hol(D(n))$.*

Proof. Aus Lemma lem:dimFourier 1.27 folgt, dass $d(M) = d(\mathcal{F}(M))$. Die Proposition folgt dann aus Theorem thm:BerneqChardim 1.34. □

bsp:delMod **Beispiel 1.43.** *Betrachte $\Delta_n = \mathcal{F}(O_n) \simeq k[\partial_1, \ldots, \partial_n]$. Aus Proposition prop:holFL 1.42 wissen wir, dass Δ_n holonom ist. Da die Fourier-Transformation ein Automorphismus der Kategorie $Hol(D(n))$ ist, folgt aus dem obigen Beispiel, dass Δ_n irreduizibel ist. Wir definieren eine Filtrierung $F_\bullet\Delta_n$ durch*

$$F_p\Delta_n = \begin{cases} span(\{\partial^I \mid |I| \leq p\}) & \text{für } p \geq 0 \\ 0 & \text{für } p < 0 \end{cases}$$

Sei ϵ_i der Multi-Index $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ mit einer 1 an der i-ten Stelle. Dann gilt

$$\partial_j \cdot \partial^I = \partial^{I+\epsilon_j} \qquad \text{und} \qquad X_j \cdot \partial^I = -i_j\partial^{I-\epsilon_j}$$

Das zeigt, dass die $F_p\Delta_n$ $k[X_1, \ldots, X_n]$-Untermoduln von Δ_n sind. Außerdem gilt $F_qD(n) \cdot F_p\Delta_n = F_{p+q}\Delta_n$. Somit ist die Filtration $F_\bullet D(n)$ ein gute Filtration bzgl. der Ordnungsfiltrierung auf $D(n)$. Für den graduierten Modul $Gr_\bullet\Delta_n$ gilt

$$Gr_\bullet\Delta_n = \begin{cases} span(\{\partial^I \mid |I| = p\}) & \text{für } p \geq 0 \\ 0 & \text{für } p < 0 \end{cases}$$

Die X_i operieren auf $Gr_\bullet\Delta_n$ durch 0. Das zeigt, dass der Annihilator von $Gr_\bullet\Delta_n$ als Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ durch $X_1, \ldots, X_n$ erzeugt wird. Daraus folgt $Ch(\Delta_n) = \{0\} \times k^n \subset k^{2n}$.

Wir beweisen jetzt ein einfaches Kriterium für die Holonomizität.

em:holDchara **Lemma 1.44.** *Bertrachte $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung. Sei M ein $D(n)$-Modul und $F_\bullet M$ eine ausschöpfende $D(n)$-Modul Filtrierung. Falls*

$$\dim_k F_pM \leq \frac{c}{n!}p^n + (\textit{Terme niedrigerer Ordnung in } p)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt, dann ist M ein holonomer $D(n)$-Modul mit Länge $\leq c$. Insbesondere ist M endlich erzeugt.

Proof. Sei N ein endlich erzeugter $D(n)$-Untermodul von M. Die Filtrierung $F_\bullet M$ induziert eine ausschöpfende $D(n)$-Modul Filtrierung auf N. Wegen Lemma 1.4 lem:fgModexgood besitzt N eine gute Filtrierung $F'_\bullet N$. Es existiert daher ein $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. s.d $F'_pN \subset F_{p+s}N$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Es gilt

$$\dim_k F'_pN \leq \dim_k F_{p+s}N \leq \dim_k F_{p+s}M \leq \frac{c}{n!}p^n + (\text{Terme niedrigerer Ordnung in } p)$$

Daraus folgt $d(N) \leq n$ und daher ist N holonom. Ist $N \neq 0$ dann gilt außerdem $e(N) \leq c$. Das zeigt, dass die Länge von N kleiner gleich $e(N) \leq c$ ist. Daraus können wir schlußfolgern, dass jede aufsteigende Sequenz von endlich erzeugten $D(n)$-Untermoduln von M stationär wird, d.h. M ist selbst auch endlich erzeugt. □

Beispiel 1.45. *Sei $D = D(1)$ und betrachte die D-Moduln $M_\alpha = D/D(x\partial - \alpha)$. Setze $E = x\partial$. Es ist leicht zusehen, dass die Operatoren $\{z^pE^q, \partial^pE^q \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ eine Basis von D als k-Vektorraum bilden. Das Links-Ideal $D(x\partial - \alpha)$ wird von den Elementen $\{x^pE^q(E-\alpha), \partial^pE^q(E-\alpha) \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ aufgespannt. Daraus folgt unmittelbar,dass M_α von den Klassen $\{x^p, \partial^p \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ aufgespannt wird. Es gilt*

$$Ex = x(E+1) \qquad \textit{und} \qquad E\partial = \partial(E-1) \qquad \textit{in } D(1)\,.$$

Daher ist die Klasse von x^n in M_α ein Eigenvektor von E zum Eigenwert $\alpha + n$ und die Klasse von ∂^n ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha - n$. Das heißt das Spektrum von E ist $\{\alpha + n \mid m \in \mathbb{Z}\}$ und jeder Eigenwert hat Multiplizität 1.

Nehme jetzt an, dass $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Dann ist $E = x\partial$ ein linearer Isomorphismus und die Links- Multiplikation mit x ist surjektiv. Sie ist aber auch injektiv, da der Eigenraum zum Eigenwert $\alpha + n$ in den Eigenraum zum Eigenwert $\alpha + n + 1$ abgebildet wird [3]. Da zeigt aber auch, dass Links-Multiplikation mit ∂ ein Isomorphismus ist. Da E jeden nichttrivialen D-Untermodul von M_α stabilisiert, enthält dieser einen nicht-trivialen Eigenvektor von E. Aus den obigen Argumenten folgt dann, dass der Untermodul jeden Eigenraum enthält und somit M_α irreduzibel ist. Die D-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} M_\alpha &\longrightarrow M_{\alpha+p} \\ T &\mapsto Tx^p \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, da sie den Eigenraum zum Eigenwert $\alpha + n$ in den Eigenraum zum Eigenwert $(\alpha + p) + n$ abbildet.

Wir definieren eine Filtrierung auf M_α durch

$$F_nM_\alpha = \begin{cases} span(\{x^p, \partial^q \mid p, q \leq n\} & \textit{für } n \geq 0 \\ 0 & \textit{für } n < 0 \end{cases}$$

Die Filtrierung ist eine hausdorffsche, ausschöpfende Filtrierung durch endlich dimensionalen Vektorräume. Es gilt $z \cdot F_nM_\alpha \subset F_{n+1}M_\alpha$ und $\partial F_nM_\alpha \subset F_{n+1}M_\alpha$. Das heißt $F_\bullet M$ ist eine D-Modul Filtrierung bzgl. D ausgestattet mit der Bernsteinfiltrierung. Da $\dim_k F_pM_\alpha = 2p + 1$ gilt, folgt, dass M_α holonom ist.

[3] Es gilt $x\partial^n \equiv (\alpha + n - 1) \cdot \partial^{n-1}$ in M_α

Um die charakteristische Varietät auszurechnen betrachte wir die Filtrerung $F'_\bullet M_\alpha$. Sie ist durch

$$F'_n M_\alpha = \begin{cases} span(\{x^p, \partial^q \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \leq n\}) & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

gegeben. Dies ist eine hausdorffsche, ausschöpfende Filtration durch endlich erzeugte $C[x]$-Moduln. Es gilt $\partial F'_n M_\alpha \subset F'_{n+1} M_\alpha$ und dies liefert eine gute D-Modul Filtrierung bzgl. D ausgestattet mit der Filtrierung nach der Ordnung von Differentialoperatoren. Der graduierte Modul $Gr_\bullet M_\alpha$ ist durch

$$Gr_n M_\alpha = \begin{cases} span(\partial^n) & \text{fürn } > 0 \\ span(\{x^p \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) & \text{fürn } = 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Daraus folgt, dass das Element $x \in Gr_\bullet D$ den homogenen Teil $Gr_n M_\alpha$ für $n > 0$ und $\xi \in Gr_\bullet D$ den homogenen Teil $Gr_0 M_\alpha$ annihiliert. Daraus folgt, dass der annihilator von $Gr_\bullet M_\alpha$ von $x\xi \in k[x, \xi]$ erzeugt wird. Daraus folgt, dass die charakteristische Varietät $Ch(M_\alpha)$ die Vereinigung der beiden Hyperebenen $\{x = 0\}$ und $\{\xi = 0\}$ ist.

Sei M ein $D(n)$-Modul und $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Auf der Lokalisierung M_P[4] können wir k-linerae Abbildungen $\partial_i : M_P \to M_P$ durch

$$\partial_i(\frac{m}{P^k}) = -k\partial_i(P)\frac{m}{P^{k+1}} + \frac{\partial_i m}{P^k}$$

definieren. Durch nachrechnen überprüft man, dass

$$[\partial_i, \partial_j](\frac{m}{P^k}) = 0 \qquad \text{und} \qquad [\partial_i, x_j](\frac{m}{P^k}) = \delta_{ij}\frac{m}{P^k}$$

gilt. Aus Theorem thm:relDn 1.21 folgt, dass dies eine $D(n)$-Modulstruktur liefert.

p:holModloc **Proposition 1.46.** *Sei M ein holonomer $D(n)$-Modul und $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist M_P auch ein holonomer $D(n)$-Modul.*

Proof. Sei $D(n)$ mit der Bernstein-Filtrierung versehen. Wir können oBdA annehmen, dass $P \neq 0$ gilt. Sei $m = \deg P$ und $F_\bullet M$ eine gute Filtrierung auf M, s.d. $F_k M = 0$ für $k \leq 0$ gilt. Wir definieren eine Filtrierung auf M_P durch $F_k M_P = 0$ für $k < 0$ und

$$F_k M_P = \left\{ \frac{v}{P^k} \mid v \in F_{(m+1)k} M \right\}$$

für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Die Filtrationsschritte $F_k M_P$ sind Untervektorräume von M_P. Sei $w = \frac{v}{P^k} \in F_k M_P$ für ein $v \in F_{(m+1)k} M$. Dann gilt $w = \frac{Pv}{P^{k+1}}$ sowie $Pv \in F_{(m+1)k+m} M \subset F_{(m+1)(k+1)} M$. Daraus folgt $w \in F_{k+1} M_P$. Das zeigt, dass $F_\bullet M_P$ eine aufsteigende Filtrierung ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Filtration ausschöpfend ist. Dafür müssen wir zeigen, dass für jedes $v \in M$ und $k \geq 0$ das Element $\frac{v}{P^k}$ in einem der Filtrationsschritte liegt. Sei $v \in F_q M$ und $k \geq 0$. Dann gilt $\frac{v}{P^k} = \frac{P^s v}{P^{k+s}}$ für alle $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Da $P^s v \in F_{q+sm} M$ und $(m+1)(k+s) - (q+sm) = s + (m+1)k - q \geq 0$ für $s \geq q - (m+1)k$ gilt, folgt

$$P^s v \in F_{q+sm} M \subset F_{(m+1)(k+s)} M$$

und damit $\frac{v}{P^k} \in F_{k+s} M_P$.

Es bleibt zu zeigen, dass $F_\bullet M$ eine $D(n)$-Modul Filtrierung ist. Für $v \in F_{(m+1)k} M$ gilt $x_i P v \in F_{(m+1)(k+1)} M$ und somit $x_i \frac{v}{P^k} = \frac{x_i P v}{P^{k+1}} \in F_{k+1} M_P$. Ebenso gilt

$$\partial_i \left(\frac{v}{P^k} \right) = \frac{-k\partial_i(P)v + P\partial_i v}{P^{k+1}}$$

[4] M_P ist die Lokalisierung des unterliegenden $k[X_1, \ldots, X_n]$-Moduls

und $-k\partial_i(P)v + P\partial_i v \in F_{(m+1)(k+1)}M$. Damit gilt $\partial_i\left(\frac{v}{P^k}\right) \in F_{p+1}M$. Wir wenden jetzt Lemma lem:holDchara 1.44 auf die ausschöpfende $D(n)$-Modul Filtrierung $F_\bullet M_P$ anwenden. Es gilt

$$\dim_k F_k M_P \leq \dim_k F_{(m+1)k}M \leq e(M)\frac{((m+1)k)^n}{n!} + (\text{Terme niedrigerer Ordnung in } k)$$

Daraus folgt, dass M_P holonom ist. □

Korollar 1.47. *Sei $P \in k[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist $k[X_1, \dots, X_n]_P$ ein holonomer $D(n)$-Modul.*

Beispiel 1.48. *Sei $D = D(1)$ und betrachte $M_0 = k[x]_x$. Man kann leicht zeigen, dass $k[x]_x \simeq D/D(\partial x)$ gilt. Wir haben nämlich die D-lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} k[x]_x &\longrightarrow D/D(\partial x) \\ x^n &\mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \textit{für } n \geq -1 \\ (-1)^{n-1}(n-1)!\,\partial^{-n-1} & \textit{für } n < -2 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

1.6 Äußere Tensorprodukte

Sei $X = k^n$ und $Y = k^m$. Im folgenden bezeichnen wir mit D_X bzw. D_Y die zugehörigen Algebren von Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten. Wir betrachten die Algebra $D_X \boxtimes D_Y$, die gleich $D_X \otimes_k D_Y$ als Vektorraum ist und die, für $T, T' \in D_X$ bzw. $S, S' \in D_Y$ mit der Multiplikation $(T \otimes S)(T' \otimes S') = TT' \otimes SS'$ versehen ist. Wir nennen $D_X \boxtimes D_Y$ das **äußere Tensorprodukt** von D_X und D_Y.

Lemma 1.49. *Es gilt $D_X \boxtimes D_Y = D_{X\times Y}$*

Ist M ein D_X-Modul und N ein D_Y-Modul, dann können wir den $D_{X\times Y}$-Modul $M \boxtimes N$ definieren. Er ist isomorph zu $M \otimes_k N$ als k Vektorraum und die Wirkung von $D_{X\times Y}$ auf $M \boxtimes N$ ist geben durch $(T \otimes S)(m \otimes n) := Tm \otimes Sn$.

n:boxtimesfg **Lemma 1.50.** *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul und N ein endlich erzeugter D_Y-Modul, dann ist $M \boxtimes N$ ein endlich erzeugter $D_{X\times Y}$-Modul*

Proof. Seien $e_1, \dots, e_p$ Erzeuger von M und $f_1, \dots, f_q$ Erzeuger von N, dass sind die $e_i \otimes f_j$ für $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq q$ Erzeuger von $M \boxtimes N$. □

Definiere die Abbildung

$$\begin{gathered} q : k^{2n} \times k^{2m} \longrightarrow k^{2(n+m)} \\ (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n, y_1, \dots, y_m, \eta_1, \dots, \eta_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m) \end{gathered}$$

Wir möchten jetzt folgende Aussage beweisen.

:charVarprod **Theorem 1.51.** *Seien M und N endlich erzeugte D_X bzw. D_Y-Moduln. Dann gilt*

$$Ch(M \boxtimes N) = q(Ch(M) \times Ch(N))$$

Wir versehen jetzt D_X bzw. D_Y mit der Ordnungs-Filtrierung. Seien M bzw. N endlich erzeugte D_X- bzw. D_Y-Moduln mit guten Filtrierungen $F_\bullet M$ bzw. $F_\bullet N$. Wir definieren die Produkt-Filtrierung durch

$$F_j(M \boxtimes N) = \sum_{p+q=j} F_p M \otimes_k F_q N$$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Produktfiltrierung auf $D_X \boxtimes D_Y = D_{X\times Y}$ mit der Ordnungs-Filtrierung übereinstimmt. Das heißt $F_\bullet(M \boxtimes N)$ ist eine ausschöpfende, hausdorffsche $D_{X\times Y}$-Filtrierung. Wir wollen zeigen, dass $F_\bullet(M \boxtimes N)$ eine gute Filtrierung ist. Dafür brauchen wir einige vorbereitende Lemmata.

rProdLinAlg **Lemma 1.52.** *Seien M, M', N und N' k-Vektorräume und $\phi : M \to M'$ und $\psi : N \to N'$ k-lineare Abbildungen. Diese definieren eine lineare Abbildung $\psi \otimes \phi : M \otimes_k N \to M' \otimes_k N'$. Es gilt*

1. $\operatorname{Im}(\phi \otimes \psi) = \operatorname{Im} \phi \otimes \operatorname{Im} \psi$
2. $\ker(\phi \otimes \psi) = \ker \phi \otimes N + M \otimes \ker \psi$.

Proof. Die erste Aussage ist klar, da dass Bild von Elementen der Form $(\phi \otimes \psi)(m \otimes n) = \phi(m) \otimes \psi(n)$ erzeugt wird. Um die zweite Aussage zu beweisen, können wir oBdA annehmen, dass die beiden Abbildung ϕ und ψ surjektiv sind. Wir erhalten die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} M' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N'' \longrightarrow N \xrightarrow{\psi} N' \longrightarrow 0$$

wobei $M'' = \ker \phi$ und $N'' = \ker \psi$ ist. Es gilt $\phi \otimes \psi = (\phi \otimes id_{N'}) \circ (id_M \otimes \psi)$. Da tensorien mit N' exakt ist erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M'' \otimes N' \longrightarrow M \otimes N' \xrightarrow{\phi \otimes id_{N'}} M' \otimes N' \longrightarrow 0$$

Das heißt $\ker(\phi \otimes id_{N'}) = M'' \otimes N' = \ker \phi \otimes N'$. Also ist jedes Element $z \in M \otimes N$ im Kern von $\phi \otimes \psi$ genau dann wenn $(id_M \otimes \psi)(z)$ in $\ker \phi \otimes N'$ liegt. Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow M \otimes N'' \longrightarrow M \otimes N \xrightarrow{id_M \otimes \psi} M \otimes N' \longrightarrow 0$$

kurz exakt ist, wird $\ker \phi \otimes N$ surjektiv auf $\ker \phi \otimes N'$ abgebildet und $\ker(id_M \otimes \psi) = M \otimes N'' = M \otimes \ker \psi$. Das heißt, t ist im Kern von $\phi \otimes \psi$ genau dann wenn $z \in ker\phi \otimes N + M \otimes \ker \psi$. ☐

spaceLinAlg **Lemma 1.53.** *Seien $X_1, \ldots, X_n$ lineare Unterräume eines k-Vektorraumes X, die X aufspannen. Gilt*

$$X_i \cap \sum_{j \neq i} X_j = \{0\}$$

für $1 \leq i \leq n$, dann ist X die direkte Summe von $X_1, \ldots, X_n$.

Proof. Sei $x_i \in X_i$ für $1 \leq i \leq n$, s.d. $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Dann gilt $x_i = -\sum_{j \neq i} x_j \in X_i \cap \sum_{j \neq i} X_j$ und damit ist x_i gleich 0. Daraus folgt die Behauptung. ☐

Wir möchten jetzt $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ beschreiben. Sei $j, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p + q = j$. Wir erhalten eine Abbildung

$$F_pM \otimes F_qN \longrightarrow F_j(M \boxtimes N) \longrightarrow Gr_j(M \boxtimes N)$$

Wegen Lemma lem:tensorProdLinAlg 1.52 ist der Kern der Abbildung

$$F_pM \otimes F_qN \longrightarrow Gr_pM \otimes Gr_qN$$

gleich $F_{p-1}M \otimes F_qN + F_pM \otimes F_{q-1}N$, d.h. sein Bild ist in $F_{j-1}(M \boxtimes N)$ enthalten. Daraus folgt, dass die lineare Abbildung $F_pM \otimes F_qN \to Gr_j(M \boxtimes N)$ über $Gr_pM \otimes Gr_qN$ faktorisiert. Dies liefert die lineare Abbildung

$$\pi : \bigoplus_{p+q=j} Gr_pM \otimes Gr_qN \longrightarrow Gr_j(M \boxtimes N)$$

Die Abbildungen π ist per Konstruktion surjektiv. Wir haben ebenso gezeigt, dass die Restriktion auf jeden Summanden $Gr_pM \otimes Gr_qM$ injektiv ist. Sei jetzt $X_{p,q}$ das Bild von $Gr_pM \otimes Gr_qN$ in $Gr_j(M \boxtimes N)$. Wir haben

$$(F_pM \otimes F_qN) \cap \left(\sum_{\substack{p'+q'=j \\ p' \neq p, q' \neq q}} F_{p'}M \otimes F_{q'}N \right) = F_{p-1}M \otimes F_qN + F_pM \otimes F_{q-1}N \subset F_{j-1}(M \boxtimes N)$$

daraus folgt

$$X_{p,q} \cap \left(\sum_{\substack{p'+q'=j \\ p' \neq p, q' \neq}} X_{p',q'} \right) = \{0\} \, .$$

Wegen Lemma 1.53 folgt dann, dass π ein Isomorphismus ist. Insbesondere folgt, daraus dass $Gr_\bullet D_X \boxtimes Gr_\bullet D_Y = Gr_\bullet D_{X \times Y}$. Damit wird $Gr_\bullet M \boxtimes Gr_\bullet N$ ein graduierter $GrD_{X\times Y}$-Modul der isomorph zu $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ ist. Da die Filtrierung $F_\bullet M$ und $F_\bullet N$ gut sind, sind $Gr_\bullet M$ und $Gr_\bullet N$ endlich erzeugte $Gr_\bullet D_X$- bzw. $Gr_\bullet D_Y$-Moduln. Analog zu Lemma 1.50 ist dann $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ ein endlich erzeugter $Gr_\bullet D_{X\times Y}$-Modul. Somit ist nach Lemma 1.1 die Produktfiltrierung auf $M \boxtimes N$ gut.

Seien jetzt $I \subset Gr_\bullet D_X$ bzw. $J \subset Gr_\bullet D_Y$ die Annihilatoren von $Gr_\bullet M$ bzw. $Gr_\bullet N$. Seien $m_1, \ldots, m_s$ bzw. $n_1, \ldots, n_r$ die Erzeuger von $Gr_\bullet M$ bzw. $Gr_\bullet N$. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi : Gr_\bullet D_X &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} Gr_\bullet M \\ T &\mapsto Tm_1 \oplus \ldots \oplus Tm_s \\ \psi : Gr_\bullet D_Y &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} Gr_\bullet N \\ T &\mapsto Tn_1 \oplus \ldots \oplus Tn_r \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Dann ist $I = \ker \phi$ und $J = \ker \psi$. Die Erzeuger von $Gr_\bullet M \boxtimes Gr_\bullet N = Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ sind die $m_i \otimes n_j$ für $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r$. Daher ist der Kern der Abbildung

$$\phi \otimes \psi : Gr_\bullet D_{X\times Y} = Gr_\bullet D_X \boxtimes Gr_\bullet D_Y \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{s} Gr_\bullet M \right) \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{r} Gr_\bullet N \right)$$

der Annihilator von $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$. Nach Lemma 1.52 ist er gleich $I \otimes Gr_\bullet D_Y + Gr_\bullet D_X \otimes J$.

Wir identifizieren $Gr_\bullet D_X$ mit $k[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, $Gr_\bullet D_Y$ mit $k[y_1, \ldots, y_m, \eta_1, \ldots, \eta_m]$ und $Gr_\bullet D_{X\times Y}$ mit $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m]$. Da der Annihilator von $Gr_\bullet(M \boxtimes N)$ von den Bildern von I und J in $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m]$ erzeugt wird, folgt der Beweis von Theorem 1.51.

Aus Theorem 1.34 folgt

Korollar 1.54. *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul und N ein endlich erzeugter D_Y-Modul. Dann gilt*

$$d(M \boxtimes N) = d(M) + d(N).$$

Insbesondere gilt:

Korollar 1.55. *Sei M ein holonomer D_X-Modul und N ein holonomer D_Y-Modul. Dann ist $M \boxtimes N$ ein holonomer $D_{X\times Y}$-Modul.*

Aus Proposition 1.32 folgt:

Korollar 1.56. *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul und N ein endlich erzeugter D_Y-Modul. Dann gilt*

$$\mathrm{supp}(M \boxtimes N) = \mathrm{supp}(M) \times \mathrm{supp}(N)$$

1.7 Inverse Bilder

Sei $X = k^n$ und $Y = k^m$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_m$. Wir bezeichnen mit $O_X = k[x_1, \dots, x_n]$ und $O_Y = k[y_1, \dots, y_n]$ die Koordinatenringe. Betrachte die polynomiale Abbildung

$$\begin{aligned} F : X &\mapsto Y \\ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (y_1, \dots, y_m) = (F_1(\underline{x}), \dots, F_m(\underline{x})) \end{aligned}$$

gegeben durch einen Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi_F : O_Y &\longrightarrow O_X \\ P &\mapsto P \circ F \end{aligned}$$

Damit können wir jeden O_X als O_Y-Modul auffassen. Wir definieren den rechts-exakten Funktor F^* von der Kategorie $M(O_Y)$ der O_Y-Moduln zur Kategorie $M(O_X)$ der Kategorie der O_X-Moduln:

$$F^*(N) := O_X \otimes_{O_Y} N$$

Wir nennen diesen Funktor **inverses Bild** unter der Abbildung F. Wir möchten diesen Funktor auf D-Moduln ausdehnen. Ist N ein D_Y-Links-Modul dann möchten wir $F^*(N)$ mit einer D_X-Links-Modul Struktur versehen. (Da der Transpositions-Funktor aus Abschnitt subsec:ModRingDiff 1.3 eine Äquivalenz von der Kategorie der Links-Moduln zur Kategorie der Rechts-Moduln liefert, behandelt dass auch den Fall von Rechts-Moduln). Wir betrachten zuerst die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} O_X \times N &\longrightarrow O_X \otimes_{O_Y} N \\ (P, v) &\mapsto \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes v + \sum_{j=1}^{n} P \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j} v \end{aligned}$$

Damit dies eine wohl-definierte Abbildung $O_X \otimes_{O_Y} N \to O_X \otimes_{O_Y} N$ wird, müssen wir zeigen, dass das Bild von $(P(Q \circ F), v)$ gleich dem Bild von (P, Qv) ist:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P(Q \circ F)}{\partial x_i} \otimes v + \sum_{j=1}^{n} P(Q \circ F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j} v \\ = & \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes Qv + \sum_{j=1}^{n} P \left(\frac{\partial Q}{\partial y_j} \circ F \right) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes v + \sum_{j=1}^{n} P(Q \circ F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j} v \\ = & \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes Qv + \sum_{j=1}^{n} P \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \left(\frac{\partial Q}{\partial y_j} v + Q \partial_{y_j} v \right) \\ = & \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes Qv + \sum_{j=1}^{n} P \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \otimes \partial_{y_j} (Qv) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diesen k-linearen Endomorphismus von $F^*(N)$ mit ∂_{x_i}. Man kann folgendes direkt nachrechnen

$$[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}](P \otimes v) = 0 \qquad \text{und} \qquad [\partial_{x_i}, x_j](P \otimes v) = \delta_{ij}(P \otimes v)$$

Aus Theorem thm:relDn 1.21 folgt dann, dass $F^*(N)$ eine natürliche links D_X-Modulstruktur trägt. Sei

$$D_{X \to Y} := F^*(D_Y) = O_X \otimes_{O_Y} D_Y$$

Wie wir gerade gesehen haben hat $D_{X \to Y}$ eine links D_X-Modulstruktur, es hat aber auch eine rechts D_Y-Modulstruktur durch Rechtsmultiplikation auf D_Y. Da die beiden Multiplikationen offensichtlich kommutieren[5] hat $D_{X \to Y}$ eine (D_X, D_Y)-Bimodulstruktur. Wir nennen ihn auch Transfer-Modul. Es gilt

$$F^*(N) = O_X \otimes_{O_Y} N = (O_X \otimes_{O_Y} D_Y) \otimes_{D_Y} N = D_{X \to Y} \otimes_{D_Y} N$$

[5] d.h. es gilt $(T(P \otimes v))Q = T((P \otimes v)Q)$

Der Funktor $F^* : M^L(D_Y) \to M^L(D_X)$ ist rechts-exakt. Wir bezeichnen den zugehörigen derivierten Funktor

$$F^+(N) := D_{X\to Y} \overset{L}{\otimes} N$$

als **inverses Bild** von N. Sei For der Vergißfunktor von der Kategorie der D-Moduln in die Kategorie der O-Moduln. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} M(D_Y) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d, "For"'] & M(D_X) \arrow[d, "For"] \\ M(O_Y) \arrow[r, "F^*"] & M(O_X) \end{tikzcd}$$

Eine analoge Aussage gilt für die derivierten Funktoren

Proposition 1.57. *Das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} D^-(D_Y) \arrow[r, "F^+"] \arrow[d, "For"'] & D^-(D_X) \arrow[d, "For"] \\ D^-(O_Y) \arrow[r, "LF^*"] & D^-(O_X) \end{tikzcd}$$

Proof. Sei $N \in D^-(D_Y)$ und sei $K \to N$ eine D_Y-freie Auflösung. Dann gilt

$$For(F^+N) = For(D_{X\to Y} \overset{L}{\otimes} N) = For(D_{X\to Y} \otimes K) = For(O_X \otimes_{O_Y} K) = O_X \otimes_{O_Y} For(K) = O_X \overset{L}{\otimes}_{O_Y} For(N)$$

wobei die letzte Gleichung aus der Tatsache folgt, dass $For(K)$ eine O_Y-freie Auflösung von $For(N)$ ist (beachte D_Y ist ein freier O_Y-Modul). $\square$

Wir möchten jetzt die funktoriellen Eigenschaften von F^+ untersuchen.

em:invImProj **Lemma 1.58.** *Sei P ein projektiver links D_Y-Modul. Dann ist $F^*(P)$ ein projektiver O_X-Modul.*

Proof. Seien $(p_i)_{I\in I}$ Erzeuger von von P. Dann existiert eine surjektive D_X-lineare Abbildung $\phi : D_X^{(I)} \to P$, wobei $D_X^{(I)}$ ein freier D_X-Modul ist. Die universelle Eigenschaft von projektiven Objekten zeigt, dass P ein direkter Summand von $D_X^{(I)}$ ist. Daraus folgt, dass $F^*(P)$ ein direkter Summand von $F^*(D_Y^{(I)})$ ist. Da D_Y ein freier O_Y-Modul ist, ist $For(F^*(D_Y^{(I)})) = O_X \otimes_{O_Y} D_Y^{(I)}$ ein freier O_X-Modul. Damit ist aber $F^*(P)$ als direkter Summand eines freien Moduls projektiv. $\square$

m:PropInvIm **Theorem 1.59.** *Seien $X = k^n, Y = k^m, Z = k^p$ und $F : X \to Y$ bzw. $G : Y \to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt*

1. *Der inverse Bild Funktor $(G \circ F)^*$ von $M^L(D_Z)$ nach $M^L(D_X)$ ist isomorph zu $F^* \circ G^*$.*
2. *Es gilt $(G \circ F)^+ = F^+ \circ G^+$.*

Proof. In der Kategorie der O_Z-Moduln gilt

$$(G \circ F)^*(N) = O_X \otimes_{O_Z} N = O_X \otimes_{O_Y} (O_Y \otimes_{O_Z} N) = F^*(G^*(N))$$

Für die D_X-Modulstruktur auf $(G \circ F)^*(N)$ gilt

$$\partial_{x_i}(P \otimes v) = \frac{\partial P}{\partial x_i} \otimes v + \sum_{k=1}^{p} P \frac{\partial(G_k \circ F)}{\partial x_i} \otimes \partial_{z_k} v$$

für die D_X-Modulstruktur auf $(F^*(G^*(N))$ gilt

$$\partial_{x_i}(P\otimes(1\otimes v)) = \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes(1\otimes v)+\sum_{j=1}^{m} P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\otimes\partial_{y_j}(1\otimes v) = \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes(1\otimes v)+\sum_{j=1}^{m} P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\otimes\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_k}{\partial y_j}\otimes\partial_{z_k}v\right)$$

Wir müssen zeigen, dass die beiden rechten Seiten unter der Identifizierung $P\otimes(Q\otimes v)\mapsto P(Q\circ F)\otimes v$ gleich sind. Dies folgt jedoch unmittelbar aus der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes(1\otimes v)+\sum_{j=1}^{m} P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\otimes\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_k}{\partial y_j}\otimes\partial_{z_k}v\right) &\mapsto \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes v+\sum_{j=1}^{m} P\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_k}{\partial y_j}\circ F\right)\otimes\partial_{z_k}v\\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes v+\sum_{k=1}^{p} P\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial G_k}{\partial y_j}\circ F\right)\otimes\partial_{z_k}v\\ &= \frac{\partial P}{\partial x_i}\otimes v+\sum_{k=1}^{p} P\frac{\partial(G_k\circ F)}{\partial x_i}\otimes\partial_{z_k}v \qquad (1.7.1)\end{aligned}$$

das heißt die D_X-Wirkungen stimmen überein. Das zeigt den ersten Punkt.

Um den zweiten Punkt zu zeigen, sei $N\in D^-(D_Z)$ und $P\to N$ eine projektive Auflösung. Dann gilt

$$F^+\circ G^+(N) = F^+(G^*P) = F^*(G^*P) = (G\circ F)^*P = (G\circ F)^+N$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aus Lemma lem:invImProj 1.58 und der Tatsache das ein D_Y-Modul der ein projektiver O_X-Modul ist, F^+-injektiv ist. □

ropTransfmod **Korollar 1.60.** *Sei $X=k^n, Y=k^m, Z=k^p$ und $F: X\to Y$ bzw. $Y\to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt:*

1. $D_{X\to Z}\simeq D_{X\to Y}\otimes_{D_Y} D_{Y\to Z}$
2. $Tor_j^{D_Y}(D_{X\to Y}, D_{Y\to Z}) = H^{-j}(D_{X\to Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\to Z}) = 0$ *für* $j\geq 1$.

Insbesondere gilt daher $D_{X\to Z}\simeq D_{X\to Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\to Z}$.

Proof. Die erste Aussage folgt aus Theorem thm:PropInvIm 1.59, es gilt

$$D_{X\to Z} = (G\circ F)^*(D_Z) = F^*(G^*(D_Z)) = F^*(D_{Y\to Z}) = D_{X\to Y}\otimes_{D_Y} D_{Y\to Z}$$

Wir beweisen die zweite Aussage. Da D_Z frei ist, ist D_Z insbesondere projektiv und damit ist $D_{Y\to Z} = G^+(D_Z)$ ein F^*-injektiver Modul. Also gilt

$$0 = H^{-j}F^+(D_{Y\to Z}) = H^{-j}(D_{X\to Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\to Z}) = Tor_j^{D_Y}(D_{X\to Y}, D_{Y\to Z})$$

□

Wir wollen jetzt zwei verschiedene Beispielklassen von Abbildungen studieren. Die erste sind Projektionen. Sei $p: X\times Y\to Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Es gilt $O_{X\times Y}\simeq O_X\otimes_k O_Y$. Betrachte den D_Y-Modul N als O_Y-Modul, dann gilt

$$p^*(N) = O_{X\times Y}\otimes_{O_Y} N = (O_X\otimes_k O_Y)\otimes_{O_Y} N = O_X\otimes_k N$$

Betrachten wir jetzt N als D_Y-Modul und $p^*(N)$ mit der dazugehörigen D_X-Modulstruktur. Es ist leicht zu sehen, dass unter dem obigen Isomorphismus ∂_{x_i} auf dem rechten Term $O_X\otimes_k N$ als Ableitung auf dem linken Faktor wirkt und ∂_{y_i} wirkt auf N. Somit gilt $p^*N\simeq O_X\boxtimes N$.

pProjaffine **Proposition 1.61.** *Sei $X = k^n, Y = k^m$ und $p : X \times Y \to Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor.*

1. *p^* ist ein exakter Funktor von $M^L(D_Y)$ nach $M^L(D_{X\times Y})$ und somit gilt*
$$p^+N = p^*N = O_X \boxtimes N$$
2. *Falls N ein endlich erzeugter D_Y-Modul ist, dann ist p^*N ein endlich erzeugter $D_{X\times Y}$-Modul.*
3. *Es gilt $d(p^*(N)) = d(N) + n$ für jeden endlich erzeugten D_Y-Modul N. Insbesondere ist ein endlich erzeugter D_Y-Modul N genau dann holonom wenn $p^+(N)$ holonom ist.*

Wir betrachten jetzt ein zweites Beispiel. Sei $i : X \to X \times Y$ mit $i(x) = (x, 0)$ die kanonische Injektion. Dann gilt (beachte, dass $(y_1, \dots, y_m)D_Y$ ein Rechts-Ideal ist):

$$D_{X\to X\times Y} = i^*(D_{X\times Y}) = O_X \otimes_{O_{X\times Y}} (D_{X\times Y}) = O_X \otimes_{O_X \otimes_k O_Y} (D_X \boxtimes D_Y) = D_X \boxtimes D_Y/((y_1, \dots, y_m)D_Y$$

wobei D_X auf dem rechten Term $D_X \boxtimes D_Y/((y_1, \dots, y_m)D_Y$ von links auf dem linken Faktor operiert und $D_X \boxtimes D_Y$ von rechts operiert.

Wir betrachten jetzt den Fall $m = 1$ als $Y = k$. Wir haben folgende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow D_Y \xrightarrow{y_1\cdot} D_Y \longrightarrow D_Y/y_1D_Y \longrightarrow 0$$

wobei die linke Abbildung Links-Multiplikation mit y_1 ist und die rechte Abbildung die Quotientenabbildung ist. Indem wir mit D_X tensorieren erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow D_{X\times Y} \xrightarrow{y_1\cdot} D_{X\times Y} \longrightarrow D_{X\to X\times Y} \longrightarrow 0$$

von links D_X und rechts $D_{X\times Y}$-Moduln. Das heißt wir haben eine links Auflösung von $D_{X\to X\times Y}$ durch (links-D_X, rechts $D_{X\times Y}$)-Bimoduln konstruiert, die frei als rechts $D_{X\times Y}$-Moduln sind. Wir erhalten also

$$i^+(N) = D_{X\to X\times Y} \overset{L}{\otimes}_{D_{X\times Y}} N = (0 \to D_{X\times Y} \xrightarrow{y_1\cdot} D_{X\times Y} \to 0) \otimes_{D_{X\times Y}} N = (0 \to N \xrightarrow{y_1\cdot} N \to 0)$$

vImHypersurf **Lemma 1.62.** *Sei $Y = k$ und i die kanonische Injektion von X in $X \times Y$. Dann gilt für jeden $D_{X\times Y}$-Modul N*

$$H^{-k}i^+(N) = \begin{cases} Kokern(y_1\cdot) & \text{für } k = 0 \\ Ker(y_1\cdot) & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das heißt die links kohomologische Dimension von i^+ ist ≤ 1.

Im Fall $m = 2$ ist

$$0 \to D_{X\times Y} \xrightarrow{\binom{y_2\cdot}{-y_1\cdot}} D^2_{X\times Y} \xrightarrow{(y_1\cdot, y_2\cdot)} D_{X\times Y} \longrightarrow D_{X\to X\times Y} \to 0$$

eine Auflösung von $D_{X\to X\times Y}$. Im allgemeinen Fall liefert dann der Koszul-Komplex der kommutierenden Elemente y_i eine Auflösung von $D_{X\to X\times Y}$:

$$Kos((y_1\cdot, \dots, y_m\cdot), D_{X\times Y}) \longrightarrow D_{X\to X\times Y}$$

ddimInvImAff **Korollar 1.63.** *Sei $Y = k^m$ und $i : X \to X \times Y$ die kanonische Injektion. Dann ist für i^+ die links kohomologische Dimension $\leq \dim Y$.*

Sei jetzt $F : X \to X$ ein Isomorphismus von X und G der inverse Morphismus. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : O_X &\longrightarrow O_X \\ f &\mapsto f \circ F \end{aligned}$$

Die inverse Abbildung β von α ist dann durch $\beta(f) = f \circ G$ gegeben.

Ist M ein O_X-Modul, dann ist F^*M isomorph zu M als k-Vektorraum mit der Abbildung $\phi : m \mapsto 1 \otimes m$. Für $f \in O_X$ gilt
$$f\phi(m) = f \otimes m = f \circ G \circ F \otimes m = 1 \otimes (f \circ G)m = \phi(\beta(f)m)$$
d.h. der O_X-Modul $F^*(M)$ ist isomorph zu M mit O_X-Modulstruktur gegeben durch $(f, m) \mapsto \beta(f)m$.

Wir möchten jetzt eine anolge Beschreibung von $F^*(M)$ als D_X-Modul geben. Dafür müssen wir den Automorphismus β auf D_X ausdehnen. Ist $T \in D_X$, dann definieren wir $\widetilde{\beta}(T)(f) = \beta(T\alpha(f))$. Es ist klar, dass $\widetilde{\beta}(T)$ ein k-linear Endomorphismus von O_X ist und dass $T \mapsto \widetilde{\beta}(T)$ linear ist. Außerdem gilt für $T, S \in D_X$:

$$\widetilde{\beta}(TS)(f) = \beta(TS\alpha(f)) = \beta(T\alpha(\beta(S\alpha(f)))) = \beta(T\alpha(\widetilde{\beta}(S)(f))) = \widetilde{\beta}(T)(\widetilde{\beta}(S)(f))$$

für alle $f \in O_X$, d.h. $\widetilde{\beta}$ ist ein Homomorphismus der k-Algebra D_X nach $End_k(O_X)$. Für $g \in O_X \subset D_X$ gilt
$$\widetilde{\beta}(g)f = \beta g\alpha(f)) = \beta(g \cdot (f \circ F)) = (g \circ G) \cdot (f \circ F \circ G) = \beta(g)f$$
das heißt die Restriktion $\widetilde{\beta}$ auf O_X ist β. Das wiederum impliziert (siehe Abschnitt subsec:AlgDiff 1.2), dass $\beta(T) \in D_X$ für $T \in D_X$ gilt. Wir benutzen daher ab jetzt nur noch die Notation β.

Für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}\beta(\partial_i)(f) = \beta(\partial_i\alpha(f)) = \beta(\partial_i(f \circ F)) &= \beta\left(\sum_{j=1}^{n}((\partial_i f) \circ F)\partial_i F_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}((\partial_i F_j) \circ G)\partial_j f = \left(\sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i F_j)\partial_j\right)(f)\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt den Bi-Modul $D_{X\to X} = O_X \otimes_{O_X} D_X$ bezüglich der Abbildung F, d.h. für $f \in O_X, T \in D_X$ gilt $f \otimes T = 1 \otimes \beta(f)T$. Die Abbildung $\varphi : (f \otimes T) \to \beta(f)T$ identifiziert somit $D_{X\to X}$ mit D_X als k-Vektorraum. Die Rechts D_X-Modulstrukturen stimmen unter dieser Identifizierung über ein. Andererseits gilt

$$\varphi(\partial_i(1 \otimes T)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_i F_j \otimes \partial_j T\right) = \sum_{j=1}^{n}\beta(\partial_i F_j)\partial_j T = \beta(\partial_i)\varphi(1 \otimes T)\,.$$

Das heißt die Linksmultplikation von $D_{X\to X}$ mit $T \in D_X$ geht via φ über in Linksmultiplikation mit $\beta(T)$. Das bedeutet, dass $F^*(M)$ isomorph zu M mit der D_X-Modulstruktur $(T, m) \mapsto \beta(T)m$ ist.

propIsoInvIm **Proposition 1.64.** *1. Der Funktor $F^* : M^L(D_X) \to M^L(D_X)$ ist exakt.*

2. Der Funktor F^* bildet endlich erzeugte D_X-Moduln auf endlich erzeugte D_X-Moduln ab.

3. Ist M ein endlich erzeugter D_X-Modul, dann gilt $d(F^*M) = d(M)$

4. Der Funktor F^* bildet holonome Moduln auf holonome Moduln ab.

Proof. Bis auf den dritten Punkt sind alle Aussagen klar. Die dritte Aussage folgt aber aus Proposition prop:AutDim 1.11. □

Wir wollen jetzt für endlich erzeugte D_X-Moduln M die charakteristische Varietät von $Ch(F^+M)$ genauer beschreiben. Der Automorphismus β von D_X induziert einen Automorphismus $Gr(\beta)$ von $GrD_X =$

$k[X_1, \ldots, X_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Dieser ist folgendermaßen gegeben

$$X_i \mapsto \beta(X_i) = G_i \qquad \text{und} \qquad \xi_i \mapsto \sum_{j=1}^{n} \beta(\partial_i F_j)\xi_j = \sum_{j=1}^{n}((\partial_i F_j) \circ G)\xi_j$$

Betrachte den Pullback von Differentialformen auf X bzgl. der Abbildung F

$$(x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i) \mapsto (G(x), \sum_{i,j} \xi_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j)$$

Wir definieren einen Isomorphismus γ von T^*X der durch den Pullback induziert wird

$$\begin{aligned} \gamma : T^*X &\longrightarrow T^*X \\ (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i) &\mapsto (G(x), \sum_{i,j} \xi_i (\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \circ G) dx_j) \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

Indem wir eine globale Trivialisierung des Kotangentialbündel benutzen

$$\begin{aligned} T^*X &\longrightarrow k^{2n} \\ (x, \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i) &\mapsto (x, \xi_1, \ldots, \xi_n) \end{aligned}$$

folgt, dass $Gr(\beta)(P) = P \circ \gamma$ gilt.

Lemma 1.65. *Sei M ein endlich erzeugter D_X-Modul. Dann gilt*

$$Ch(F^*(M)) = \gamma(Ch(M))$$

Proof. Wir versehen den endlich erzeugten D_X-Modul M mit einer guten Filtrierung $F_\bullet M$. Wir haben weiter oben gezeigt, dass F^+M isomorph zu M als k-Vektorraum ist. Die gute Filtrierung auf M induziert damit eine gute Filtrierung auf F^+M. Daraus folgt aber, dass GrM isomorph zu GrF^+M ist, wobei hier GrM mit der Modulstruktur $(Q, m) \mapsto Gr(\beta)(Q)m$, für $Q \in k[x, \xi] \in GrD_X, m \in M$, versehen ist. Das heißt Q ist im Annihilator von $GrF^+(M)$ enthalten genau dann wenn $Gr(\beta)(Q)$ im Annihilator von GrM enthalten ist oder anders ausgedrückt, wenn I der Annihilator von $GrF^+(M)$ dann ist $Gr(\beta)(I)$ der Annihilator von GrM. Das heißt $(x, \xi) \in Ch(F^+(M))$ genau dann wenn $\gamma^{-1}(x, \xi) \in Ch(M)$. □

:cohDimInvIm **Theorem 1.66.** *Sei $X = k^n$, $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. Dann ist für F^+ die links kohomologische Dimension $\leq \dim(Y)$.*

Proof. Um die Aussage zu beweisen, faktorisieren wir F über seinen Graphen. Betrachte die Einbettung $i : X \to Y \times Y$ mit $i(x) = (x, 0)$, den Isomorphismus $\Phi : X \times Y \to X \times Y$ mit $\Phi(x, y) = (x, y + F(x))$ und die Projektion $p : X \times Y \to Y$ mit $p(x, y) = y$. Dann gilt $F = p \circ \Phi \circ i$ und wegen Theorem thm:PropInvIm 1.59 2. dann $F^+ = i^+ \circ \Phi^+ \circ p^+$. Da Φ^+ und p^+ exakt sind (siehe Proposition prop:propProjaffine 1.61) folgt, dass $L^{-q}F^+ = L^{-q}i^+ \circ \phi^+ \circ i^+$. Die Aussage folgt dann aus Korollar kor:leftCohdimInvImAff 1.63. □

1.8 Direkte Bilder

Sei $X = k^n$, $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. Die Abbildung F induziert einen Ringhomomorphismus $\phi_F : O_Y \to O_X$. Dieser Homomorphismus definert einen Funktor F_* von der Kategorie der O_X-Moduln in die Kategorie der O_Y-Moduln. Für einen O_X-Modul M ist $F_*(M)$ isomorph zu M als k-Vektorraum und die O_Y Struktur ist gegeben durch $(f, m) \mapsto \phi_F(f) \cdot m$.

Ist M ein D_X-Modul, dann besitzt das direkte Bild $F_*(M)$ im Allgemeinen keine D_Y-Modul Struktur. Beachte z.b. die Inklusion $X = \{0\} \to Y = k$. Dann ist $D_X = O_X = k$ und $D_Y = D(1)$. Die Kategorie der D_X-Moduln ist dann äquivalent zur Kategorie der k-Vektorräume. Das direkte Bild eines endlich dimensionalen Vektorraums wäre dann selbst ein endlich dimensionaler Vektorraum und hätte daher Bernsteindimension 0, das steht aber im Widerspruch zu Theorem thm:affBernsteinineq 1.26. Das heißt, dass das direkte Bild für D-Moduln nicht kompatibel mit dem Vergißfunktor sein wird, wie im Fall des inversen Bildes.

Um das direkte Bild für links D-Moduln zu erklären, wenden wir auf sowohl auf die links D_X-Struktur als auch auf die rechts D_Y-Struktur des Transfer-Moduls $D_{X\to Y}$ die Transposition an und erhalten einen (links D_Y, rechts D_Y)-Bimodul $D_{Y\leftarrow X}$. Das erlaubt uns den rechtsexakten Funktor

$$F_\diamond(M) := D_{Y\leftarrow X} \otimes_{D_X} M$$

zu definieren. Der zugehörige derivierte Funktor

$$F_+(M) := D_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\otimes} M$$

wird als **direktes Bild** von M bezeichnet.

pTransfmodRL **Lemma 1.67.** *Sei $X = k^n, Y = k^m, Z = k^p$ und $F : X \to Y$ bzw. $Y \to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt:*

1. $D_{Z\leftarrow X} \simeq D_{Z\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} D_{Y\leftarrow X}$
2. $Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, D_{Y\leftarrow X}) = H^{-j}(D_{Z\leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\leftarrow X}) = 0$ *für* $j \geq 1$.

Insbesondere gilt daher $D_{Z\leftarrow Y} \simeq D_{Z\leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{D_Y} D_{Y\leftarrow X}$.

Proof. Das folgt direkt aus Korollar kor:propTransfmod 1.60 indem man mittels Transposition die Rechts- bzw. Links-Strukturen vertauscht. □

n:fdiaAcyclc **Lemma 1.68.** *Sei P ein projektiver links D_X-Modul. Dann gilt*

$$Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, F_\diamond(P)) = 0$$

Proof. Seien $(p_i)_{I\in I}$ Erzeuger von von P. Dann existiert eine surjektive D_X-lineare Abbildung $\phi : D_X^{(I)} \to P$, wobei $D_X^{(I)}$ ein freier D_X-Modul ist. Die universelle Eigenschaft von projektiven Objekten zeigt, dass P ein direkter Summand von $D_X^{(I)}$ ist, d.h. es existiert ein D_X-Modul Q mit $D_X^{(I)} = P \oplus Q$. Es gilt $F_\diamond(P) \oplus F_\diamond(Q) = F_\diamond(D_X^{(I)}) = D_{Y\leftarrow X}^{(I)}$ und somit

$$Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, P) \oplus Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, Q) = Tor_j^{D_Y}(D_{Z\leftarrow Y}, D_{X\leftarrow Y}^{(I)}) = 0$$

□

Theorem 1.69. *Sei $X = k^n, Y = k^m, Z = k^p$ und $F : X \to Y$ bzw. $Y \to Z$ polynomiale Abbildungen. Dann gilt*

1. *Der direkte Bild Funktor $(G \circ F)_\diamond$ von $M^L(D_X)$ nach $M^L(D_Y)$ ist isomorph zu $G_\diamond \circ F_\diamond$.*
2. *Es gilt $(G \circ F)_+ = G_+ \circ F_+$.*

Proof. Für jeden links D_X-Modul gilt

$$\begin{aligned}(G\circ F)_\diamond(M) &= D_{Z\leftarrow X}\otimes_{D_X} M = (D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y} D_{Y\leftarrow X})\otimes_{D_X} M\\ &= D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y}(D_{Y\leftarrow X}\otimes_{D_X} M)\\ &= D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y} F_\diamond(M)\\ &= G_\diamond(F_\diamond(M))\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus Lemma lem:fdiaAcyclc 1.68. Sei $P\to M$ eine projektive Auflösung:

$$\begin{aligned}G_+(F_+M) &\simeq G_+F_\diamond(P)\simeq D_{Z\leftarrow Y}\overset{L}{\otimes}_{D_Y} F_\diamond(P)\simeq D_{Z\leftarrow Y}\otimes_{D_Y} F_\diamond(P)\\ &\simeq G_\diamond F_\diamond(P)\simeq (G\circ F)_\diamond(P)\simeq (G\circ F)_+(M)\end{aligned}$$

□

Wir betrachten jetzt das Beispiel $i: X\to X\times Y$ mit $i(x)=(x,0)$ die kanonische Injektion. Es gilt

$$D_{X\to X\times Y} = i^*(D_{X\times Y}) = i^*(D_X\boxtimes D_Y) = D_X\boxtimes D_Y/((y_1,y_2,\dots,y_m)D_Y)$$

Durch vertauschen der Rechts-/Links-Struktur erhalten wir

$$D_{X\times Y\leftarrow Y} = D_X\boxtimes D_Y/(D_Y(y_1,y_2,\dots,y_m)) \tag{1.8.1}$$ eq:transMod

Das zeigt

$$i_+(M)\simeq i_*(M) = M\boxtimes D_Y/(D_Y(y_1,y_2,\dots,y_m)) \tag{1.8.2}$$ eq:dirImemb

propdirImemb **Proposition 1.70.** *Sei $i: X\to X\times Y$ die Injektion $i(x)=(x,0)$. Dann gilt*

1. *$i_\diamond$ ist ein exakter Funktor von $M^L(D_X)$ nach $M^L(D_{X\times Y})$*
2. *Ist M endlich erzeugt, dann ist auch $i_\diamond M$ endlich erzeugt*
3. *$d(i_\diamond M) = d(M)+m$ für jeden endlich erzeugten D_X-Modul M.*

Insbesondere ist M holonom genau dann wenn $i_\diamond(M)$ holonom ist.

Proof. Der erste Punkt folgt aus Formel (eq:dirImemb 1.8.2). Wie wir in Beispiel bsp:delMod 1.43 gesehen haben, ist $\Delta_m = D_Y/(D_Y(y_1,y_2,\dots,y_m))$ ein irreduzibler holonomer D_Y-Modul. Aus Lemma lem:boxtimesfg 1.50 folgt dann die zweite Aussage. Die dritte Aussage folgt aus thm:charVarprod 1.51 und der Tatsache, dass Δ_m holonom ist. □

Wir studieren jetzt das direkte Bild einer Projektion $p: X\times Y\to Y$ mit $p(x,y)=y$. Betrachte den Fall $\dim X = 1$. Es gilt

$$D_{X\times Y\to Y} = p^*(D_Y) = D_X/D_X(\partial_1)\boxtimes D_Y$$

Nach vertauschen der Rechts-/Links-Struktur erhalten wir $D_{Y\leftarrow X\times Y} = D_X/((\partial_1)D_X)\boxtimes D_Y$. Wir haben eine kurze exakte Sequenz

$$0\longrightarrow D_{X\times Y}\xrightarrow{\partial_1\cdot} D_{X\times Y}\longrightarrow D_{Y\leftarrow X\times Y}\longrightarrow 0$$

von (links D_X, rechts $D_{X\times Y}$)-Moduln, wobei der zweite Pfeil Links-Multiplikation mit ∂_1 ist. Dies liefert eine links Auflösung von $D_{Y\leftarrow X\times Y}$ durch freie rechts $D_{X\times Y}$-Moduln, d.h. die Kohomologie des Komplexes

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\partial_1\cdot} M\longrightarrow 0$$

ist $H^\bullet(p_+M)$. Wir erhalten folgendes Resultat.

Lemma 1.71. *Sei $\dim X = 1$ und $p: X\times Y\to Y$ die Projektion. Dann gilt für jeden $D_{X\times Y}$-Modul M*

1. $H^0(p_+M) = coker(\partial_1)$

2. $H^{-1}(p_+M) = ker(\partial_1)$

3. $H^k(p_+M) = 0$ *für* $k \neq 0, -1$.

Im Fall $\dim X > 1$ ist eine Links-Auflösung von $D_{Y \leftarrow X \times Y}$ durch den Koszul-Komplex $Kos(D_{X\times Y}, (\partial_1 \cdot, \dots, \partial_n \cdot))$ gegeben. Wir erhalten folgendes Resultat.

Lemma 1.72. *Sei p die kanonische Projektion $p : X \times Y \to Y$. Dann ist die links kohomologische Dimension von $p_+ \leq \dim(X)$.*

Sei jetzt $F : X \to X$ ein Isomorphismus und G sein Inverses. Im letzten Kapitel haben wir die Automorphismen α und β von D_X definiert. Außerdem haben wir den Bi-Modul $D_{X\to X}$ (bzgl. F) mit dem Bi-Modul D_X identifiziert, wobei D_X mit der üblichen Rechts-multiplikation versehen war und die Links-Multiplikation durch $(T, P) \mapsto \beta(T)P$ gegeben war. Indem wir α auf D_X mit der gegebenen D-Modulstruktur anwenden, sehen wir, dass $D_{X\to X}$ isomorph zu D_X mit der üblichen Links-Modulstruktur ist und die Rechts-modulstruktur durch $(T, P) \mapsto P(\alpha(T)$ gegeben ist. Vetrauschen wir nun die Links- und Rechts-Modulstruktur, so sehen wir, dass $D_{X\leftarrow X}$ isomorph zu D_X mit der üblichen Rechts-Modulstruktur ist und die Links-Modulstruktur ist durch $(T, P) \mapsto \alpha(T)P$ gegeben.

Daraus folgt, dass für einen D_X-Modul M das direkte Bild $F_+(M)$ isomorph zu M ist mit der Links-Modulstruktur $(T, m) \mapsto \alpha(T)m$. Insbesondere gilt $F_+(M) \simeq G^+(M)$.

em:IsoDirIm **Lemma 1.73.** 1. *Der Funktor $F_\diamond$ ist exakt.*

2. *$F_\diamond$ bildet endlich erzeugte D_X-Moduln auf endlich erzeugte D_X-Moduln ab.*

3. *Ist M ein endlich erzeugter D_X-Modul, dann gilt $d(F_\diamond M) = d(M)$.*

4. *Der Funktor $F_\diamond$ bildet holonome Moduln auf holonome Moduln ab.*

Theorem 1.74. *Sei $X = k^n$, $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. Dann ist die links kohomologische Dimension von $F_+ \leq dimX$.*

Proof. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem thm:cohDimInvIm 1.66. □

1.9 Kashiwaras Theorem

Sei $X = k^n$, $Y = \{x_n = 0\}$ und $Z = \{x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0\}$. Sei M ein D_X-Modul und definiere

$$\Gamma_{[Y]}(M) = \{m \in M \mid x_n^p m = 0 \text{ für ein } p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

n:locCohprop **Lemma 1.75.** *Sei M ein D_X-Modul. Dann gilt*

1. *$\Gamma_{[Y]}(M)$ ist ein D_X-Untermodul von M,*

2. $\mathrm{supp}(\Gamma_{[Y]}(M)) \subset Y$,

3. *ist N ein D_X-Untermodul von M mit $supp(N) \subset Y$, dann gilt $N \subset \Gamma_{[Y]}(M)$.*

Proof. 1.) Sei $m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Dann gilt für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n-1$, dass $x_i m \in \Gamma_{[Y]}(M)$ und $\partial_j m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\partial_n m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. Sei $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben, s.d. $x_n^p m = 0$. Dann gilt

$$x_n^{p+1}\partial_n m = [x_n^{p+1}, \partial_n]m + \partial_n x_n^{p+1} m = -(p+1)x_n^p m + \partial_n x_n^{p+1} m = 0$$

2.) Für $x \notin Y$ gilt $x_n \notin \mathfrak{m}_x$ und daher $\Gamma_{[Y]}(M)_x = 0$.
3.) Sei N ein D_X-Untermodul von M mit $\mathrm{supp}(N) \subset Y$. Sei $m \in N$ und N' der O_X-Untermodul, der durch m erzeugt wird. Es gilt $\mathrm{supp}(N') \subset Y$. Da N' endlich erzeugt ist, gilt wegen Proposition prop:suppMisVI 2.21, dass der Support von N' gleich der Verschwindungsmenge von $Ann(N')$ ist. Aus dem Nullstellensatz folgt $r(Ann(N')) \supset (x_n)$. Das zeigt, dass ein $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existiert, s.d. x_n^p den Modul N' annihiliert. Insbesondere gilt $m \in \Gamma_{[Y]}(M)$. □

Das obige Lemma zeigt, dass $\Gamma_{[Y]}(M)$ der größte D_X-Untermodul von M ist, der Träger auf Y hat.

Die Multiplikation mit x_n definiert einen Endomorphismus auf M. Sei

$$M_0 = \mathrm{Ker} x_n \subset \Gamma_{[Y]} M \qquad \text{bzw.} \qquad M_1 = \mathrm{Kokern}\, x_n = M/x_n M\,.$$

In Lemma lem:invImHypersurf 1.62 haben wir gezeigt, dass $H^{-1}i^+M = M_0$ und $H^0 i^+ M = M_1$ gilt.

Betrachte die Abbildung $D_X \otimes_{D_Y} M_0 \to M$. Dieser Morphismus verschwindet auf dem Bild von $D_X x_n \otimes_{D_Y} M_0$ in $D_X \otimes_{D_Y} M_0$, aufgrund der Definition von M_0. Wie wir in Formel (eq:transMod 1.8.1) gesehen haben, gilt

$$D_{X\leftarrow Y} = D_Y \boxtimes D_Z / D_Z x_n = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \partial_n^j D_Y \tag{1.9.1}$$

eq:transModd

Wir erhalten somit einen D_X-linearen Morphismus

$$i_+ M_0 = D_{X\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} M_0 \longrightarrow M$$

Wegen dem ersten Gleichheitszeichen in (eq:transModdim1 1.9.1) ist sein Bild in $\Gamma_{[Y]}(M)$ enthalten. Man kann außerdem leicht zeigen, dass $i_+ \circ H^{-1} i^+ \to \Gamma_{[Y]}$ eine natürliche Transformation von Funktoren ist.

dirImlocCoh **Lemma 1.76.** *Der Morphismus $i_+(M_0) \longrightarrow \Gamma_{[Y]}(M)$ ist eine Isomorphismus von D_X-Moduln.*

Proof. Wir zeigen zuerst, dass der Morphismus surjektiv ist. Es gilt

$$\{m \in M \mid x_n^p m = 0\} \subset D_X \cdot M_0$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Für $p = 0, 1$ ist das klar. Ist $p > 1$ und $x_n^p m = 0$ dann gilt

$$0 = \partial_n (x_n^p m) = x_n^{p-1}(pm + x_n \partial_n m)$$

Per Induktion können wir annehmen, dass sowohl $pm + x_n \partial_n m$ als auch $x_n m$ in $D_X \cdot M_0$ liegen. Das zeigt

$$(p-1)m = pm + [x_n, \partial_n] m = pm + x_n \partial_n m - \partial_n x_n m \in D_X \cdot M_0$$

und somit auch $m \in D_X \cdot M_0$. Also ist die Abbildung surjektiv.

Wir beweisen jetzt die Injektivität. Weiter oben haben wir gezeigt, dass

$$i_+(M_0) = D_{X\leftarrow Y} \otimes_{D_Y} M_0 = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \partial_n^j M_0$$

Sei $0 \neq (m_0, \partial_n m_1, \ldots, \partial_n^q m_q)$ ein Element dieser direkten Summe, dass auf 0 in M abgebildet wird, d.h.

$$m_0 + \partial_n m_1 + \ldots + \partial_n^q m_q = 0$$

Wir wählen ein solches Element mit minimalem q. Dann gilt

$$0 = x_n \left(\sum_{j=0}^{q} \partial_n^j m_j \right) = \sum_{j=1}^{q} [x_n, \partial_n^j] m_j = -\sum_{j=1}^{q} j \partial_n^{j-1} m_j$$

Das ist aber nicht möglich, aufgrund der Wahl von q. Somit ist der Morphismus auch injektiv. □

Korollar 1.77. *Es gilt*

$$x_n\Gamma_{[Y]}(M) = \Gamma_{[Y]}(M)$$

Proof. Wie wir in Lemma (1.76) gesehen haben, hat jedes Element von $\Gamma_{[Y]}(M)$ die Gestalt $\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \partial_n^j m_j$ wobei $m_j \in M_0$ gilt. Es gilt aber andererseits:

$$x_n \sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{1}{j+1}\partial_n^{j+1} m_j = -\sum_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \partial_n^j m_j$$

□

Korollar 1.78. *Sei M ein D_X-Modul. Dann gilt*

1. $\Gamma_{[Y]}(M)$ *ist ein endlich erzeugter D_X-Modul genau dann wenn M_0 ein endlich erzeugter D_Y-Modul ist;*
2. $d(\Gamma_{[X]}(M)) = d(M_0) + 1$.

Insbesondere ist $\Gamma_{[Y]}(M)$ holonom genau dann wenn $H^{-1}i^+(M) = M_0$ holonom ist.

Proof. 1.) Aus Lemma 1.76 und Proposition 1.70 folgt, dass $\Gamma_{[Y]}(M)$ endlich erzeugt ist, wenn M_0 endlich erzeugt ist. Um die Rückrichtung zu beweisen, nehmen wir an, dass $\Gamma_{[Y]}(M)$ ein endlich erzeugter D_X-Modul ist. Sei N_j eine aufsteigende Folge von D_Y-Untermodul von M_0. Diese erzeugen eine aufsteigende Folge von D_X-Untermoduln $i_+(N_j) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \partial_n^p N_j$ in $\Gamma_{[Y]}(M)$. Da $\Gamma_{[Y]}(M)$ ein endlich erzeugter D_X-Modul ist, wird die aufsteigende Folge $i_+(N_j)$ irgendwann stabil. Wir beachten jetzt, dass N_j der Kern von x_n in $i_+(N_j)$ ist und damit die Folge N_j auch stabil wird. Also ist M_0 auch endlich erzeugt.

2.) Die Aussage folgt direkt aus Lemma 1.76 und Proposition 1.70. □

Korollar 1.79. *Sei M ein holonomer D_X-Modul. Dann ist M_0 ein holonomer D_Y-Modul.*

Proof. Ist M holonom, dann ist auch $\Gamma_{[Y]}(M)$ holonom. Die Aussage folgt dann aus Korollar 1.78. □

Sei $M_Y(D_X)$ die volle Unterkategorie von $M(D_X)$ bestehend aus D_X-Moduln mit Träger in Y. Die entsprechenden Unterkategorien von endlich erzeugten bzw. holonomen D_X-Moduln mit Träger in Y bezeichnen wir mit $M_{fg,Y}(D_X)$ bzw. $Hol_Y(D_X)$.

Theorem 1.80 (Kashiwara)**.** *Der direkte Bild Funktor i_+ liefert einen Kategorienäquivalenz zwischen $M(D_Y)$ (bzw. $M_{fg}(D_Y)$, $Hol(D_Y)$ und der Kategorie $M_Y(D_X)$ (bzw. $M_{fg,Y}(D_X)$, $Hol_Y(D_X)$).*

Proof. Für D_X-Moduln mit Träger in Y gilt wegen Lemma 1.75 das $\Gamma_{[Y]}(M) = M$. Wegen Lemma 1.62 und Korollar 1.77 folgt $H^0(i^+M) = 0$ und daher ist $H^{-1}(i^+M)$ ein exakter Funktor. Andererseits ist i_+ auch ein exakter Funktor und die Kompositionen $i_+ \circ H^{-1}i_+$ und $H^{-1}i^+ \circ i_+$ sind isomorph zum Identitätsfuntor. Die Behauptung für endlich erzeugte bzw. holonome Moduln folgt aus Korollar 1.78. □

1.10 Direkte und inverse Bilder von holonomen Moduln

Sei $X = k^n$ und $Y = k^m$ und $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung. In diesem Kapitel möchten wir das Verhalten von holonomen D-Moduln unter dem direkten und inversen Bild analysieren. Wir benutzen dazu die Graph-Konstruktion um das Problem auf spezielle Abbildungen zu reduzieren. Betrachte:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X \times Y \arrow[r, "\Phi"] & X \times Y \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

wobei $i(x) = (x, 0)$, $p(x, y) = y$ und $\Phi(x, y) = (x, y + F(x))$. Proposition prop:propProjaffine 1.61 zeigt, dass p^+ exakt ist und holonome Moduln auf holonome Moduln abbildet. Aus Proposition prop:propdifImemb 1.70 folgt, dass i_+ exakt ist und holonome Moduln auf Holonome Moduln abbildet. Wegen Proposition prop:propIsoInvIm 1.64 und Lemma lem:IsoDirIm 1.73 ist Φ_+ und Φ^+ exakt und bildet holonome Moduln auf holonome Moduln ab.

Wir brauchen also nur noch die derivierten Funktoren i^+ und p_+ zu untersuchen. Wir bezeichnen mit $D_h^-(D_X)$ die volle triangulierte Unterkategorie von $D^-(D_X)$ von Komplexen mit holonomer Kohomologie.

lem:iplushol **Lemma 1.81.** *Sei $N \in D_h^-(D_{X\times Y})$, dann ist $i^+N \in D_h^-(D_X)$.*

Proof. Wegen Theorem thm:PropInvIm 1.59 reicht es den Fall $\dim Y = 1$ zu studieren. Sei jetzt $N \in D_h^-(D_{X\times Y})$ ein Komplex mit $H^k N = 0$ für $k \notin [-p, 0]$. Wir beweisen das Lemma über Induktion nach p. Wir beachten zuerst, dass N quasi-isomorph zu einem Komplex ist mit $N_k = 0$ für $k \notin [-p, 0]$. Wir können daher oBdA annehmen, dass N selbst diese EIgenschaft erfüllt. Sei also

$$N = \left(0 \longrightarrow N_{-p} \xrightarrow{d_{-p}} N_{-p+1} \xrightarrow{d_{-p+1}} \ldots \longrightarrow N_0 \longrightarrow 0\right)$$

und

$$\tau_{\geq -p+1} N = (0 \longrightarrow \operatorname{coker} d_{-p} \longrightarrow N_{-p+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow N_0 \longrightarrow 0)$$

bzw.

$$\tau_{\leq -p} N = (0 \longrightarrow \ker d_{-p} \longrightarrow 0)$$

Wir erhalten ein Dreieck

$$\tau_{\leq -p} N \longrightarrow N \longrightarrow \tau_{\geq -p+1} N \xrightarrow{+1}$$

Wir wenden i^+ auf dieses Dreieck an. Per Induktionsannahme hat sowohl $i^+\tau_{\geq -p+1}N$ als auch $i^+\tau_{\leq -p}N$ holonome Kohomologie. Aus der zugehörigen lange exakte Kohomologiesequenz und Theorem thm:propHol 1.40 folgt, dass auch $i^+N \in D_h^-(D_X)$. Es reicht also das Lemma für den Fall eines holonomen Moduls zu beweisen. Wir bezeichnen mit y die Koordinate auf Y. Wir haben gesehen, dass i^+N durch den Komplex $N \xrightarrow{y\cdot} N$ repräsentiert wird, d.h. $H^0(i^+N) = \operatorname{coker}(y\cdot)$ und $H^{-1}(i^+N) = \ker(y\cdot)$ und alle anderen Kohomologien sind 0. Aus Korollar kor:MholMOhol 1.79 folgt, dass $H^{-1}i^+(M)$ holonom ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $H^0(i^+N) = i^*N$ holonom ist.

Setze $\overline{N} = N/\Gamma_{[X]}(N)$ und betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_{[X]}(N) \longrightarrow N \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0$$

Da i^* rechts excakt ist, erhalten wir die exakte Sequenz

$$i^*(\Gamma_{[X]}(N)) \longrightarrow i^*(N) \longrightarrow i^*(\overline{N}) \longrightarrow 0$$

Andererseits gilt wegen Korollar kor:multLocCoh 1.77, dass $i^*\Gamma_{[X]}(N) = \operatorname{coker}(y\cdot) = 0$, d.h. $i^*(N) \to i^*(\overline{N})$ ist ein Isomorphismus. Sei $\overline{v} \in \Gamma_{[X]}(\overline{N}) \subset \overline{N}$ und sei $v \in N$ ein Repräsentant von v. Dann gilt $y^p\overline{v} = 0$ für genügend große $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Das heißt aber, dass $y^p v \in \Gamma_{[X]}(N)$ und daher gilt $y^{p+q}v = 0$ für genügend große $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Also gilt schon $v \in \Gamma_{[X]}(N)$ und damit ist $\overline{v} = 0$. Wir haben also $\Gamma_{[X]}(\overline{N}) = 0$ gezeigt. Wegen $i^*(N) = i^*(\overline{N}$, reicht es also die Aussage für holonome Moduln N mit $\Gamma_{[X]}(N) = 0$ zu beweisen. Das bedeutet insbesondere, dass die Multiplikation mit y injektiv ist und N in seine Lokalisierung N_y einbettet. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N_y \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Da N holonom ist, folgt aus Proposition prop:holModloc 1.46, dass auch N_y holonom ist und damit ist auch L holonom. Insbesondere ist auch $H^{-1}i^+(L)$ holonom. Wir wenden auf die kurze exakte Sequenz den Funktor i^+ an un erhalten

$$\ldots \longrightarrow H^{-1}i^+(N_y) \longrightarrow H^{-1}i^+(L) \longrightarrow i^*N \longrightarrow i^*N_y \longrightarrow i^*L \longrightarrow 0$$

Da die Multiplikation mit y auf N_y invertierbar ist gilt $i^+(N_y) = 0$, d.h. $i^*(N) = H^{-1}i^+L$, d.h. $i^*(N)$ ist selbst holonom. $\square$

Wegen Theorem thm:PropInvIm 1.59 gilt dann folgende Aussage.

Theorem 1.82. *Sei $F : X \to Y$ eine polynomiale Abbildung und $M \in D_h^-(D_Y)$, dann ist $F^+(M) \in D_h^-(D_X)$.*

Lemma 1.83. *Sei $p : X \times Y \to Y$ die Projektion und $M \in D_h^-(D_{X\times Y})$, dann ist $p_+ M \in D_h^-(D_Y)$.*

Proof. Wie im Beweis von Lemma lem:iplushol 1.81 können wir den Beweis auf den Fall $\dim X = 1$ sowie eines einzelnen holonomen D-Moduls reduzieren. □

2 Appendix

2.1 Hilbert Polynome

sec:Hilb

Sei $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ ein graduierter, noetherscher, kommutativer Ring mit $1 \in R_0$.

lem:RR0 **Lemma 2.1.**

1. *R_0 ist noethersch.*
2. *R ist eine endlich erzeugte R_0-Algebra.*

Beweis. (1):Sei $R_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} R_n$. Dann ist R_+ ein Ideal in R und $R_0 \simeq R/R_+$. Da R noethersch ist, ist somit auch der Quotient R_0 noethersch.
(2): Das Ideal R_+ ist endlich erzeugt. Sei $x_1, \dots, x_s$ eine Menge von homogenen Erzeugern von R_+ und sei $d_i = \deg x_i$. Sei S die R_0-Unteralgebra die durch $x_1, \dots, x_s$ erzeugt wird. Wir zeigen per Induktion, dass $R_n \subset S$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Es ist klar, dass $R_0 \subset S$ gilt. Sei jetzt $n > 0$ und $y \in R_n$. Dann ist $y \in R_+$ und daher gilt $y = \sum_{i=1}^{s} y_i x_i$ wobei $y_i \in R_{n-d_i}$. Aus der Induktionsannahme folgt $y_i \in S$ und damit $y \in S$. □

Sei $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter R-Modul. Dann ist jedes M_n ein R_0-Modul und es gibt ein $N \in \mathbb{Z}$, s.d $M_n = 0$ für $n < N$.

lem:M0finite **Lemma 2.2.** *Die R_0-Moduln M_n $(n \in \mathbb{Z})$ sind endlich erzeugt.*

Proof. Seien $m_1, \dots, m_k$ homogene Erzeuger von M und $\deg m_i = r_i$. Für $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seien $z_i(j)$ für $1 \leq i \leq l(j)$ alle homogenen Monome in $x_1, \dots, x_s$ vom Grad j. Für $m \in M_n$ gilt $m = \sum_{i=1}^{k} y_i m_i$ mit $y_i \in R_{n-r_i}$ und $y_i = \sum_{k=1}^{l(n-r_i)} a_{ik} z_k(n-r_i)$, also $m = \sum_{i,k} a_{ik} z_k(n-r_i) m_i$, d.h. M_n wird durch die Menge $\{z_k(n-r_i)m_i \mid 1 \leq k \leq l(n-r_i), 1 \leq i \leq k\}$ erzeugt. □

Sei $\mathcal{M}_{fg}(R_0)$ die Kategorie der endlich erzeugten R_0-Moduln. Sei λ eine Funktion auf $\mathcal{M}_{fg}(R_0)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$. Die Funktion λ heißt additiv falls für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

folgende Gleichung gilt

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$$

Bemerkung 2.3.

1. $\lambda(0) = 0$

2. Für eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0$$

Sei M ein endlich erzeugter, graduierter R-Modul. Die Poincaré-Reihe $P(M,t)$ von M (bezüglich λ) ist

$$P(M,t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M_n)t^n \in \mathbb{Z}((t))^6$$

Theorem 2.4. *Sei R ein graduierter, noetherscher , kommutativer Ring mit 1 und $x_1, \ldots, x_s$ homogene Erzeuger von R als R_0-Algebra mit $d_i = \deg x_i$. Für jeden endlich erzeugten graduierten R-Modul M gilt*

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{d_i})}$$

mit $f(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Proof. Wir beweisen das Theorem über Induktion nach der Anzahl s der Erzeuger $x_1, \ldots, x_s$ von R. Sei $s = 0$, dann gilt $R = R_0$ und M ist ein endlich erzeugter R_0-Modul. Es gilt daher $M_n = 0$ für $n >> 0$, also ist nur für endlich viele n der Term $\lambda(M_n) \neq 0$. Daraus folgt $P(M,t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Nehme jetzt $s > 0$ an. Die Multiplikation mit x_s induziert einen R-Modul Endomorphismus mit Kern K und Kokern L. Dann sind K, L gaduierte R-Moduln und wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{x_s\cdot} M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Im Grad n erhalten wir

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_s\cdot} M_{n+d_s} \longrightarrow L_{n+d_s} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R_0-Moduln. Insbesondere gilt

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+d_s}) - \lambda(L_{n+d_s}) = 0$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(1-t^{d_s})P(M,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M_n)t^n - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(M_n)t^{n+d_s} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\lambda(M_{n+d_s}) - \lambda(M_n)\right) t^{n+d_s} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\lambda(L_{n+d_s}) - \lambda(K_n)\right) t^{n+d_s} \\
&= P(L,t) - P(K,t)t^{d_s} \qquad (2.1.1)
\end{aligned}$$

Aus der Konstruktion folgt, dass x_s auf L und K als 0 operiert, sie tragen also die Struktur von $A/(x_s)$-Moduln und daher können wir die Induktionsannahme auf sie anwenden. Das zeigt die Behauptung. □

Wir bezeichnen mit $d_\lambda(M)$ die Polordnung von $P(M,t)$ bei 1.

kor:HilbPol **Korollar 2.5.** *Sei $d_i = \deg(x_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, s$. Für genügend große n ist die Funktion $n \mapsto \lambda(M_n)$ gleich einem Polynom vom Grad $d_\lambda(M) - 1$ mit rationalen Koeffizienten.*

[6] $\mathbb{Z}((t))$ ist die Lokaliserung von $\mathbb{Z}[[t]]$ nach dem multiplikativen System $\{t^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$

Proof. Sei p der Grad der Nullstelle vonf f bei 1. Dann existiert ein $g(z) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ mit $f(t) = (1-t)^p g(t)$ und $g(1) \neq 0$. Setzte $d := d_\lambda(M) = s - p$, es gilt also

$$P(M,t) = \frac{g(t)}{(1-t)^d}$$

Es gilt

$$(1-t)^{-d} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(d+1)\dots(d+k-1)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k-1}{d-1} t^k$$

Wir schreiben $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k t^k$ und erhalten

$$\lambda(M_n) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \binom{d+n-k-1}{d-1}$$

für alle $n \geq N$. Dies ist aber

$$\sum_{k=-N}^{N} a_k \frac{(d+n-k-1)!}{(d-1)!(n-k)!} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-k+d-1)}{(d-1)!}$$

also ist $\lambda(M_n)$ ein Polynom in n mit Leitkoeffizient

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\right) \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} = g(1) \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} \neq 0$$

□

Wir nennen das Polynom welches für große n die Werte $\lambda(M_n)$ annimmt, das Hilbertpolynom von M.

PolyPoiHilb **Beispiel 2.6.** *Sei $R = k[X_1, \dots, X_s]$ der Polynomring in s Variablen mit Grundkörper k. Dieser ist durch den Totalgrad eines Polynoms graduiert (jedes X_i hat Grad 1). Es gilt $R_0 = k$ und für jeden endlich erzeugten graduierten R-Modul M gilt $\dim_k M_n < \infty$. Daher können wir die Poincaré-Reihe für $\lambda = \dim_k$ definieren. Im Fall $R = M$ gilt*

$$P(M,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim_k M_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} t^n = \frac{1}{(1-t)^s}$$

Das Hilbertpolynom ist

$$\dim_k R_n = \binom{s+n-1}{s-1} = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + \dots$$

Wir beweisen jetzt eine Charakterisierung von Polynomen (mit Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik 0) das ganzzahlige Werte für große positive Zahlen hat. Zuerst bemerken wir aber folgendes.

bem:Pbinom **Bemerkung 2.7.** *Für $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $q \geq s$ gilt*

$$q^s = s! \binom{q}{s} + Q(q)$$

wobei Q ein Polynom vom Grad $s-1$ ist. Daher kann jedes Polynom vom Grad d für große q folgendermaßen eindeutig geschrieben werden:

$$P(q) = c_0 \binom{q}{d} + c_1 \binom{q}{d-1} + \dots c_{d-1} \binom{q}{1} + c_d$$

wobei die c_i geeignete Koeffizienten sind. Falls die c_i ganzzahlig sind hat das Polynom P für ganzzahlige Argumente $q \geq d$ ganzzahlige Werte.

Wir beweisen die Umkehrung.

PoylbinomInt **Lemma 2.8.** *Falls das Polynom*

$$q \mapsto P(q) = c_0\binom{q}{d} + c_1\binom{q}{d-1} + \ldots c_{d-1}\binom{q}{1} + c_d$$

ganzzahlige Werte für große $n \in \mathbb{Z}$ annimmt, dann sind alle Koeffizienten c_i ganzzahlig.

Proof. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach d. Der Fall $d = 0$ ist klar. Es gilt

$$\begin{aligned} P(q+1) - P(q) &= \sum_{i=0}^{d} c_i\binom{q+1}{d-i} - \sum_{i=0}^{d} c_i\binom{q}{d-i} \\ &= \sum_{i=0}^{d} c_i\left(\binom{q+1}{d-i} - \binom{q}{d-i}\right) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i\binom{q}{d-i-1} \end{aligned}$$

wobei wir die Identität $\binom{q+1}{s} = \binom{q}{s} + \binom{q}{s-1}$ benutzen. Das heißt $q \mapsto P(q+1) - P(q)$ ist ein Polynom mit Koeffizienten in $c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}$ und ist ganzzahlige für große n, da P ganzzahlig für große n ist. Die Induktionsannahme liefert dann, dass die $c_0, \ldots c_{d-1}$ ganzzahlig sind und daraus folgt, dass c_d ebenfalls ganzzahlig ist. □

Sei F ein Polynom vom Grad d mit Leitkoeffizient a_0. Dann ist

$$\begin{aligned} G(n) &= F(n) - F(n-1) \\ &= (a_0 n^d + a_1 n^{d-1} + \ldots) - (a_0(n-1)^d + a_1(n-1)^{d-1} + \ldots) = a_0 d n^{d-1} + \ldots \end{aligned}$$

ein Polynom vom Grad $d-1$ mit Leitkoeffizient da_0. Das nächste Lemma liefert die Umkehrung.

em:DifftoAc **Lemma 2.9.** *Sei F eine Funktion auf $\mathbb{Z}$, s.d.*

$$G(n) = F(n) - F(n-1)$$

gleich einem Polynom vom Grad $d-1$ für große $n \in \mathbb{Z}$ ist. Dann ist F für große $n \in \mathbb{Z}$ gleich einem Polynom vom Grad d.

Proof. Nehme an, dass $G(n) = P(n-1)$ für $n \geq N \geq d$ für ein geeignetes Polynom P vom Grad $d-1$ gilt. Dann können wir P nach Bemerkung bem:Pbinom 2.7 folgendermaßen schreiben:

$$P(n) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i\binom{n}{d-i-1}$$

Wir erhalten für $n \geq N+1$:

$$F(n) = \sum_{k=N+1}^{n} (F(k) - F(k-1)) + F(N) = \sum_{k=N+1}^{n} G(k) + F(N) = \sum_{k=d}^{n} P(k-1) + C$$

wobei C eine Konstante ist. Es gilt

$$\binom{q}{s} = \sum_{j=s+1}^{q}\left(\binom{j}{s} - \binom{j-1}{s}\right) + 1 = \sum_{j=s+1}^{q}\binom{j-1}{s-1} + 1 = \sum_{j=s}^{q}\binom{j-1}{s-1} \qquad (2.1.2)$$ eq.binomid1

für $q > s \geq 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=d}^{n} P(k-1) &= \sum_{k=d}^{n}\sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{k-1}{d-i-1} = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left(\sum_{k=d}^{n} \binom{k-1}{d-i-1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} c_i \left(\sum_{k=d-i}^{n} \binom{k-1}{d-i-1}\right) - \sum_{i=1}^{d-1} c_i \left(\sum_{k=d-i}^{d-1} \binom{k-1}{d-i-1}\right) \\
&\overset{\substack{\text{eq.binomid1} \\ (2.1.2)}}{=} \sum_{i=0} c_i \binom{n}{d-i} + C'
\end{aligned}$$

□

Insbesondere ist die Summe $\sum_{n \leq N} \lambda(M_n)$ für große N gleich einem Polynom vom Grad $d_\lambda(M)$. Setzen wir,

$$\sum_{n \leq N} \lambda(M_n) = a_0 N^d + a_1 N^{d-1} + \ldots + a_{d-1} N + a_d$$

für große N, dann ist $d! a_0$ ganzzahlig.

2.2 Lokale Ringe

Im folgenden ist $(R, \mathfrak{m})$ ein kommutativer, noetherscher, lokaler Ring und $k = R/\mathfrak{m}$ sein Restklassenkörper.

lem:Nak **Lemma 2.10** (Nakayama Lemma). *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul mit $\mathfrak{m}M = M$, dann gilt $M = 0$.*

Proof. Nehme an $M \neq 0$ und sei $m_1, \ldots, m_s$ ein minimales System von Erzeugern für M als R-Modul. Dann gilt nach Voraussetzung $v_s = \sum_{i=1}^{s} r_i m_i$ für $r_i \in \mathfrak{m}$. also $(1 - r_s)m_s = \sum_{i=1}^{s-1} r_i m_i$. Da $(1 - r_s)$ invertierbar ist, erzeugen schon die $v_1, \ldots, v_{s-1}$ M im Widerspruch zur Annahme der Minimalität. □

Da R noethersch ist, ist $\dim_(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ endlich.

Lemma 2.11. *Die Anzahl der minimalen Erzeuger von $\mathfrak{m}$ ist gleich $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.*

Proof. Sei $s = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Dann können wir $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{m}$ finden, s.d. die Restklassen $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s$ eine basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sind. Sei I das Ideal was von $a_1, \ldots, a_s$ erzeugt wird. Dann gilt $I + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ also $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}/I) = \mathfrak{m}/I$, nach dem Nakayama-Lemma also $\mathfrak{m}/I = 0$. □

Ein minimales Erzeugendensystem $(a_1, \ldots, a_s)$ heißt Koordinatensystem von R.

Sei $GrR = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p/\mathfrak{m}^{p+1}$. Aus der Tatsache, dass $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$ mit $X_i \mapsto \overline{a}_i$ surjektiv ist, folgt dass GrR eine endlich erzeugte k-Algebra und daher ein noetherscher Ring ist.

Sei M ein endlicher erzeuger R-Modul. Wir definieren eine absteigende Filtration $\mathfrak{m}^p M$ auf M und betrachten den graduierten GrR-Modul $GrM := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1} M$.

Lemma 2.12. *Sei M ein endlich erzeugeter R-Modul, dann ist GrM ein endlich erzeugter GrR-Modul.*

Proof. Aus der Definition von GrM folgt $\mathfrak{m} \cdot Gr^p M = Gr^{p+1} M$ für $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Daher erzeugt $Gr^0 M = M/\mathfrak{m}M$ den Modul GrM. Die Behauptung folgt jetzt aus der Tatsache, dass $M/\mathfrak{m}M$ ein endlich dimensionaler k-Vektorraum ist. □

Aus Lemma 2.2 folgt, dass $\dim_k /\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1}M) < \infty$ gilt. Insbesondere haben die R-Moduln $\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1}M$ endliche Länge. Da die Länge eine additive Funktion ist, folgt aus Korollar 2.5 dass, für große $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, die Funktion $p \mapsto length_R(\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1}M) = \dim_k(\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1}M)$ gleich einem Polynom mit rationalen Koeffizienten ist. Außerdem ist die Funktion

$$p \mapsto length_R(M/\mathfrak{m}^p M) = \sum_{q=0}^{p-1} length_R(\mathfrak{m}^q M/\mathfrak{m}^{q+1}M)$$

für große p gleich einem Polynom mit rationalen Koeffizienten und der Leitterm ist von der Form $e\frac{p^d}{d!}$ mit $e, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Die Zahlen $d(M) := d$ bzw. $e(M) = e$ heißen Dimension bzw. Multiplizität von M.

lem:AR **Lemma 2.13** (Artin-Rees Lemma)**.** *Sei M ein endlich erzeuhter R-Modul und N ein Untermodul. Dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d.*

$$\mathfrak{m}^{p+m_0}M \cap N = \mathfrak{m}^p(\mathfrak{m}^{m_0}M \cap N)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Proof. Setze $R^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n$. Dann ist R^* in natürlicher Weise ein graduierter Ring. Sei $a_1, \ldots, a_s$ ein Koordinatensystem von R. Dann existierz ein kanonisher surjektiver Morphismus $R[a_1, \ldots, a_s] \to R^*$, d.h. A^* ist ein graduierter noetherscher Ring. Sei $M^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n M$. Dann ist M^* eine graduierter R^*-Modul, der von $M_0^* = M$ als R^*-Modul erzeugt wird. Da M ein endlich erzeugter R-Modul ist, folgt, dass M^* ein endlich erzeugter R^*-Modul ist.

Wir setzen $N^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(N \cap \mathfrak{m}^n M) \subset M^*$. Dann gilt

$$\mathfrak{m}^p(N \cap \mathfrak{m}^n M) \subset \mathfrak{m}^p \cap \mathfrak{m}^{n+p}M \subset N \cap \mathfrak{m}^{n+p}M$$

Dies zeigt, dass N^* ein R^*-Untermodul von M^* ist. Da R^* ein noetherscher Ring ist, ist N^* endlich erzeugt, d.h. es existiert ein $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $\bigoplus_{n=0}^{m_0}(N \cap \mathfrak{m}^p M)$ den Modul M erzeugt. Dann gilt für jedes $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dass

$$N \cap \mathfrak{m}^{p+m_0}M = \sum_{s=0}^{m_0} \mathfrak{m}^{p+m_0-s}(N \cap \mathfrak{m}^s M) \subset \mathfrak{m}^p(N \cap \mathfrak{m}^{m_0}M) \subset N \cap \mathfrak{m}^{p+m_0}M$$

$\square$

thm:Krull **Theorem 2.14** (Durchschnittsatz von Krull)**.** *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt*

$$\bigcap_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p M = \{0\}.$$

Proof. Setze $E = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathfrak{m}^p M$. Dann gilt nach dem Artin-Rees Lemma 2.13

$$E = \mathfrak{m}^{p+m_0}M \cap E = \mathfrak{m}^p(\mathfrak{m}^{m_0}M \cap E) = \mathfrak{m}^p E$$

Insbesondere gilt $\mathfrak{m}E = E$ und daher $E = 0$ nach dem Nakayama-Lemma 2.10. $\square$

lem:dMexseq **Lemma 2.15.** *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten R-Moduln. Dann gilt

1. *$d(M) = \max(d(M'), d(M''))$*
2. *Falls $d(M) = d(M') = d(M'')$, dann gilt $e(M) = e(M') + e(M'')$.*

Proof. Wir versehen M mit der Filtrierung $\mathfrak{m}^p M$ für $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und M' bzw. M'' mit den induzierten Filtrierungen $M' \cap \mathfrak{m}^p M$ bzw. $\mathfrak{m}^p M''$. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow GrM' \longrightarrow GrM \longrightarrow GrM'' \longrightarrow 0$$

Das zeigt für alle $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dass

$$length_R(\mathfrak{m}^p M/\mathfrak{m}^{p+1}M) = length_R((M' \cap \mathfrak{m}^p M)/(M' \cap \mathfrak{m}^{p+1}M)) + length_R(\mathfrak{m}^p M''/\mathfrak{m}^{p+1}M'')$$

bzw. nachdem wir aufsummiert haben

$$length_R(M/\mathfrak{m}^p M) = lenght_R(M'/(M' \cap \mathfrak{m}^p M)) + length_R(M''/\mathfrak{m}^p M'') \qquad (2.2.1)$$ eq:addlen

Daraus folgt, dass die Funktion $p \mapsto length_R(M'/(M' \cap \mathfrak{m}^p M))$ für große p glein einem Polynom ist. Andererseit gilt wegen dem Artin-Rees Lemma 2.13, dass

$$\mathfrak{m}^{p+m_0}M' \subset \mathfrak{m}^{p+m_0}M \cap M' \subset \mathfrak{m}^p M'$$

d.h. für große $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sind die Funktionen $p \mapsto length_R(M'/(M' \cap \mathfrak{m}^p M))$ und $p \mapsto length_R(M'/\mathfrak{m}^p M')$ durch Polynome mit demselben Leitterm gegeben. Die erste Aussage folgt dann unmittelbar aus Formel (2.2.1). Sind die Grade der Poynome gleich folgt aus derselben Formel, dass sich die Leitterm addieren also folgt 2. . ☐

Korollar 2.16. *Sei R ein noetherscher, lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, dann gilt*

$$d(M) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Proof. Wegen Lemma 2.15 reicht es zu zeigen, dass $d(R) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) =: s$ gilt[7]. Dies folgt aaber aus der Existenz eines surjektiven Homomorphismus $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$ und der Tatsache, dass die Dimension des Raums der Polynome vom Grad $\leq N$ in s Variablen ein Polynom in n vom Grad s ist. ☐

Ein noetherscher, lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ heißt regulär falls $d(R) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ gilt.

thm:regGrIso **Theorem 2.17.** *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher, lokaler Ring und $(a_1, \ldots, a_s)$ ein Koordinatensystem von R. Dann ist folgendes äquivalent:*

1. *R ist ein regulärer, lokaler Ring.*
2. *der kanonische Isomorphismus $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$, $X_i \mapsto a_i$ ist ein Isomorphismus.*

Proof. Der Morphismus $k[X_1, \ldots, X_s] \to GrR$ ist per Definition surjektiv. Sei I der Kern, der in natürlicherweise graduiert ist. Falls der Kern $I \neq 0$ ist, enthält er ein homogenes Polynom P vom Grad $d > 0$. Sei J das ideal in $k[X_1, \ldots, X_s]$ welches von P erzeugt wird. Die Poncaré-Reihe von J ist, wegen Beispiel 2.6 und $\deg P = d$, gleich $P(J,T) = \frac{t^d}{(1-t)^s}$. Aus der Additivität von $\lambda = \dim_k$ folgt

$$\begin{aligned} P(k[X_1, \ldots, X_s]/J, t) &= P(k[X_1, \ldots, X_s], t) - P(J, t) \\ &= \frac{1 - t^d}{(1-t)^s} = \frac{1 + t + \ldots + t^{d-1}}{(1-t)^{s-1}} \end{aligned}$$

Die Ordnung des Pols bei 1 der Poincaré-Reihe von $P(k[X_1, \ldots, X_s]/J, t)$ ist $s - 1$. Aus Korollar 2.5 folgt dann, dass die Funktion $n \mapsto \dim_k(k[X_1, \ldots, X_s]/J)_n$ durch ein Polynom vom Grad $s - 2$ für große n gegebn ist. Daraus folgt, wegen $J \subset I$, dass die Funktion $n \mapsto \dim_k(k[X_1, \ldots, X_s]/I)_n = dim_k Gr_n R$ für große n durch einem Polynom vom Grad $\leq s - 2$ gegeben ist. Korrollar 2.5 zeigt $d(R) \leq s - 1$. Also gilt $I = 0$ genau dann wenn $d(A) = s$. ☐

[7]Es gilt $d(R) = d(R^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $d(M) \leq d(R^n)$ für endlich erzeugte M

Theorem 2.18. *Sei R ein regulärer, lokaler Ring. Dann ist R nullteilerfrei.*

Proof. Seien $a, b \in R$ und $A \neq 0, b \neq 0$. Dann gibt es wegen 2.14 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, s.d. $a \in \mathfrak{m}^p$, $a \notin \mathfrak{m}^{p+1}$ und $b \in \mathfrak{m}^q$, $b \notin \mathfrak{m}^{q+1}$. Dann ist $\overline{a} \in Gr_pR$ und $\overline{b} \in Gr_qR$ ungleich 0 und da GrR wegen Theorem 2.17 nullteilerfrei ist, folgt $\overline{a}\overline{b} \neq 0$. d.h. $ab \neq 0$. □

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ und für $x \in k^n$ sei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal erzeugt durch $(X_i - x_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$. Das Komplement von $\mathfrak{m}_x$ ist ein multiplikatives System, wir bezeichnen die entsprechende Lokalisierung mit R_x.

Proposition 2.19. *Die Ringe R_x für $x \in k^n$ sind n-dimensionale, reguläre, lokale Ringe.*

Proof. Der Automorphismus $X_i \mapsto X_i - x_i$ von R induziert einen Isomorphismus $R_x \simeq R_0$. Sei $\hat{R} = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ der Ring der formalen Potenzreihen. Dann ist $\hat{R}$ ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\hat{\mathfrak{m}}$ erzeugt durch $X_1, \ldots, X_s$. Es ist offensichtlich, dass der kanonische Morphismus $k[X_1, \ldots, X_n] \to Gr\hat{R}$ ein Isomorphismus ist.

Der natürliche Morphismus $R \to \hat{R}$ faktorisiert über R_0 und liefert die Inklusion $R_0 \hookrightarrow \hat{R}$. Dies induziert die Isomorphismen

$$k[X_1, \ldots, X_n] \simeq GrR \simeq GrR_0 \simeq Gr\hat{R} \simeq k[X_1, \ldots, X_n]$$

deren Verknüpfung die Identität ist. Die Aussage folgt jetzt aus Theorem 2.17. □

2.3 Dimension von Moduln über Polynomringen

Sei $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ wobei k ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Wir können R nach dem Totalgrad der Polynome filtrieren, d.h. $R_n = \{\sum c_I X^I \mid c_I \in k, |I| \leq n\}$. Es gilt $GrR \simeq R$ und R erfüllt die Bedingungen 1. - 7. aus Abschnitt 1.1. Da $R_0 = k$ können wir für λ die additive Funktion dim_k nehmen, d.h. wir können für einen endlich erzeugten R-Modul die Dimension $d(M)$ und Multiplizität $e(M)$ definieren. Aus Beispiel 2.6 und Korollar 2.5 wissen wir, dass $d(R) = n$ und $e(R) = 1$ gilt.

Für jeden endlich erzeugten R-Modul M haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

aus Proposition 1.10 folgt dann $d(M) \leq n$. Wir werden später eine geometrische Charakterisierung von $d(M)$ geben.

Sei $x \in k^n$ und sei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n]$ welches aus allen polynomen besteht, die in x verschwinden. Wie oben bezeichnen wir mit R_x die Lokalisierung von R bezüglich x. Wir haben in Proposition 2.19 gesehen, dass R_x ein regulärer, lokaler Ring ist, mit maximalen Ideal $\mathfrak{n}_x = (\mathfrak{m}_x)_x$. Sei M ein R-Modul, dann ist sein Lokalisierung M_x ein R_x-Modul. Wir definieren den **Träger** von M als $\mathrm{supp}(M) = \{x \in k^n \mid M_x \neq 0\}$.

Lemma 2.20. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt

$$\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(M') \cup \mathrm{supp}(M'')$$

Proof. Da Lokalisierung exakt ist, erhalten wir für jedes $x \in k^n$ eine kurze exakte Sequenz von R_x-Moduln

$$0 \longrightarrow M'_x \longrightarrow M_x \longrightarrow M''_x \longrightarrow 0$$

Daraus folgt die Behauptung. ☐

Für ein Ideal $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ sei $V(I) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für } x \in k^n\}$ die Verschwindungsmenge.

op:suppMisVI **Proposition 2.21.** *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $I \subset R$ sein Annihilator. Dann gilt* $\mathrm{supp}(M) = V(I)$.

Proof. Wir beweisen die Aussage per Induktion über die Anzahl der Erzeuger von M. Wir nehmen zuerst an, dass M einen Erzeuger hat, d.h. $M = A/I$. Dann gilt $M_x = (R/I)_x = R_x/I_x$. Sei $x \in V(I)$. Dann ist $I \subset \mathfrak{m}_x$ und $I_x \subset \mathfrak{n}_x$, d.h. $I_x \neq R_x$. Daraus folgt $(R/I)_x \neq 0$ und $x \in \mathrm{supp}(M)$. Ist andererseits $x \notin V(I)$, dann existiert ein $f \in I$, s.d. $f(x) \neq 0$, d.h. $f \notin \mathfrak{m}_x$. Dann ist aber f im lokalen Ring R_x invertierbar und aus $f_x \in I_x$ folgt $I_x = R_x$. Also $(R/I)_x = 0$ und damit $x \notin \mathrm{supp}(R/I)$.

Sei jetzt M ein endlich erzeugter Modul mit Erzeugern $m_1, \ldots, m_p$. Sei M' der Untermodul von M der durch $m_1, \ldots, m_{p-1}$ erzeugt wird. Wir erhalten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

wobei M'' ein zyklischer Modul (mit Erzeuger m_p) ist. Aus Lemma lem:suppexSeq 2.20 folgt $\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(M') \cup \mathrm{supp}(M'')$ und damit aus der Induktionsannahme $\mathrm{supp}(M) = V(I') \cup V(I'')$ wobei I' bzw, I'' die Annihilatoren von M' bzw. M'' sind.

Es ist klar, dass $I' \cdot I'' \subset I$ gilt, andererseits annihiliert I sowohl M' als auch M'', also

$$I' \cdot I'' \subset I \subset I' \cap I''$$

bzw. $V(I') \cup V(I'') \subset V(I' \cap I'') \subset V(I) \subset V(I' \cdot I'')$. Ist $x \notin V(I') \cup V(I'')$, dann existiert ein $f \in I'$ und $g \in I''$, s.d. $f(x) \neq 0$ und $g(x) \neq 0$, also $(f \cdot g)(x) \neq 0$ bzw. $x \notin V(I' \cot I'')$. Dies zeigt $V(I' \cdot I'') \subset V(I') \cup V(I'')$, also $V(I) = V(I') \cup V(I'')$. ☐

Korollar 2.22. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist sein Träger eine Zariski abgeschlossene Menge in k^n.*

em:Mfiltprim **Lemma 2.23.** *Sei S ein noetherscher, kommutativer Ring und $M \neq 0$ ein endlich erzeugter S-Modul. Dann existiert eine Filtrierung $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ von S-Moduln, s.d. $M_i/M_{i-1} \simeq S/J_i$ für Primideal $J_i \subset S$ gilt.*

Proof. Sei $x \in M$ und $Ann(x) = \{a \in S \mid ax = 0\}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die Familie von Idealen $Ann(x)$ für $x \in M$, $x \neq 0$. Da S noethersch ist hat $\mathcal{A}$ ein maximales Elemente. Sei $I = Ann(y)$ ein maximales Element von $\mathcal{A}$. Wir zeigen, dass I prim ist. Sei $a, b \in S$ mit $ab \in I$, d.h $aby = 0$.Nehme an $b \notin I$, also $by \neq 0$. Dann gilt $I \subset Ann(by)$ und $a \in Ann(by)$. Wegen der Maximalität von I, folgt $a \in Ann(by) = I$, also ist I prim. Setze $M_1 = S/I$. Durch iteratives Anwenden finden wir Ketten $0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k$. Sei jetzt $\mathcal{F}$ die Familie von Untermoduln N von M die solche Filtrierungen besitzen. Da R noethersch ist, enthält $\mathcal{F}$ ein maximales Element L. Nehme an $L \neq M$. Dann existiert eine kurze exakte Seqeunz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow 0$$

Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, dass L' einen Untermodul N' von der Form B/J' für ein Primideal J' hat. Dies wiederspricht aber der Maximalität von L, also $L = M$. ☐

thm:deqdim **Theorem 2.24.** *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Es gilt*

1. $d(M) = \dim \operatorname{supp}(M)$
2. *Sei* $x \in \operatorname{supp}(M)$*, dann ist* $d(M_x) = \dim_x(\operatorname{supp}(M))$

Proof. Betrachte die kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Falls die Aussage für M' und M'' gilt, dann folgt aus Proposition 1.10 und Lemma 2.20

$$\begin{aligned} d(M) &= \max(d(M'), d(M'')) = \max(\dim \operatorname{supp}(M'), \dim \operatorname{supp}(M'')) \\ &= \dim(\operatorname{supp}(M') \cup \operatorname{supp}(M'')) = \dim \operatorname{supp}(M) \end{aligned}$$

Für $x \in \operatorname{supp}(M)$ erhalten wir die kurze exakte Sequenz $0 \to M'_x \to M_x \to M''_x \to 0$. Falls die Aussage für M'_x und M''_x gilt, dann folgt aus Lemma 2.15 und Lemma 2.20 analog zum ersten Fall $d(M_x) = \dim_x \operatorname{supp}(M)$.

Es reicht somit, unter Benutzung von Lemma 2.23, den Fall $M = R/J$ zu zeigen, wobei J ein Primideal ist. Ist J maximal, dann gilt $M = R/J = k$, also *supp*$(M) = \{x\}$ für ein $x \in k^n$. Das zeigt, $d(M) = d(M_x) = \dim \operatorname{supp}(M) = \dim_x \operatorname{supp}(M) = 0$.

Sei jetzt J nicht maximal. Dann existiert ein Primideal $J_1 \supsetneq J$ und somit ein $f \in J_1$ mit $f \notin J$. Es gilt somit $J \subsetneq (f) + J \subset J_1$. Betrachte den Endomorphismus von $M = R/J$ der durch Multiplikation mit f gegeben ist. Sei $g + J$ im Kern der Abbildung, dann gilt $0 = f(g + J) = fg + J$ und famit $fg \in J$. Da J prim ist und $f \notin J$ folgt $g \in J$,also ist der Endomorphismus injektiv. Wir erhalten eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \longrightarrow M/fM \longrightarrow 0$$

Ins besondere gilt wegen Proposition 1.10 $d(M/fM) \le d(M)$. Ist $d(M/fM) = d(M)$, dann würde $e(M) = e(M) + e(M/fM)$,also $e(M/fM) = 0$, gelten. Das ist aber nur möglich, falls $d(M/fM) = 0$ bzw. $d(M) = 0$ gilt. Daraus folgt aber, dass M ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum ist, was, wegen der Annahme J nicht maximal, unmöglich ist. Also gilt $d(M/fM) < d(M)$. Da R/J_1 ein Quotient von M/fM ist, folgt $d(R/J_1) < d(R/J)$.

Sei $x \in V(J_1)$, dann erhalten wir nach Lokalisierung die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_x \xrightarrow{f} M_x \longrightarrow M_x/fM_x \longrightarrow 0$$

von R_x-Moduln. Ähnlich wie oben zeigt man, dass $d(M_x/fM_x) < d(M_x)$ ist und somit $d((R/J_1)_x) < d((R/J)_x)$ gilt. Sei

$$Z_0 = \{x\} \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_{n-1} \subset Z_n = k^n$$

eine maximale Kette von nichtleeren, irreduziblen, abgeschlossenen Untermengen von k^n. Dann ist

$$I(Z_0) = \mathfrak{m}_x \supset I(Z_1) \supset \ldots \supset I(Z_{n-1}) \supset I(Z_n) = \{0\}$$

eine maximale Kette von Primidealen in R. Wegen den vorhergegangenen Argumenten haben wir folgende strikte Ungleichungen

$$0 \le d(R/I(Z_0)) < d(R/I(z_1)) < \ldots < d(R/I(Z_n)) = d(R) = n$$

bzw. wegen Proposition 2.19

$$0 \le d((R/I(Z_0))_x) < d((R/I(z_1))_x) < \ldots < d((R/I(Z_n))_x) = d(R_x) = n$$

Daraus folgt aber

$$d((R/I(Z_j))_x) = d(R/I(Z_j)) = j = \dim Z_j$$

für $0 \leq j \leq n$. Da aber zu jeder irreduziblen, abgeschlossenen Menge Z eine maximale Kette konstruiert werden kann, die Z enthält, folgt $d((R/I(Z))_x) = d(R/I(Z)) = \dim Z$ für jede irreduzible, abgeschlossenen Menge $Z \subset k^n$. Dies zeigt, dass für jedes Primideal $J \subset R$ $d((R/J)_x) = d(R/J) = \dim V(J)$ gilt. Wegen Proposition prop:suppMisVI 2.21 folgt die Behauptung. ◻

Korollar 2.25. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt*

$$d(M) = \sup_{x \in \operatorname{supp}(M)} d(M_x)\,.$$

em:VIeqVGrI **Lemma 2.26.** *Sei I ein Ideal in R. Dann gilt* $\dim V(I) = \dim V(GrI)$.

Proof. Die kurze exkate Sequenz von filtrierten R-Moduln (wobei die Filtrierung von der Totalgrad Filtrierung von R induziert ist)

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

liefert die kurze exkate Sequenz

$$0 \longrightarrow GrI \longrightarrow R \longrightarrow Gr(R/I) \longrightarrow 0$$

von graduierten R-Moduln. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dim_k F_p(R/I) &= \sum_{q=0}^{p} (\dim_k F_q(R/I) - \dim_k F_{q-1}(R/I)) \\
&= \sum_{q=0}^{p} \dim_k Gr_p(R/I) = \sum_{q=0}^{p} (\dim_k Gr_p R - \dim Gr_p I) \\
&= \dim_k F_p R - \dim_k F_p GrI = \dim_k F_p(R/GrI)
\end{aligned}$$

also $d(R/I) = d(R/GrI)$. Aus Theorem thm:deqdim 2.24 folgt dann die Behauptung. ◻