Vorlesung

Torische Geometrie

Thomas Reichelt

1 Affine torische Varietäten

Sei $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ eine endliche Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^d$.

Definition 1.1.

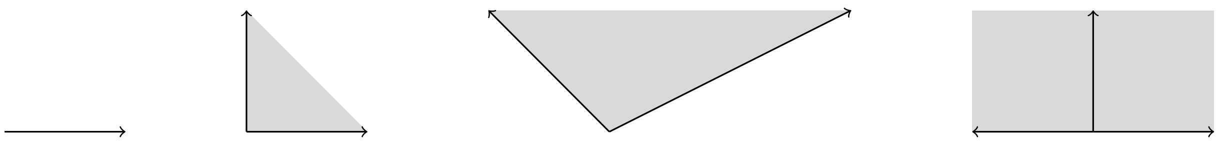
1. *Die Menge*
$$C = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$
heisst ***endlich erzeugter Kegel****. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heissen die* ***Erzeuger*** *von C.*

2. *Die Dimension von C ist die Dimension des Untervektorraums der von C aufgespannt wird.*

3. *Ein Kegel heißt* ***rational****, falls seine Erzeuger aus $\mathbb{Z}^d$ gewählt werden können.*

4. *Ein Kegel C heißt strikt konvex, falls er keine Gerade enthält die durch den Ursprung läuft, d.h. $C \cap (-C) = \{0\}$.*

Beispiel 1.2. *In $\mathbb{R}^2$ hat man folgende Beispiele für Kegel und deren Erzeuger:*



Definition 1.3. *Ein Monoid ist eine Menge S mit einer Verknüpfung*

$$+ : S \times S \longrightarrow S$$

welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ *für alle* $a, b, c \in S$.

2. $a + b = b + a$ *für alle* $a, b \in S$.

3. $\exists\, 0 \in S$ *mit* $0 + s = s$ *für alle* $s \in S$.

4. $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ *für* $a, b, c \in S$.

Lemma 1.4. *Sei C ein Kegel, dann ist $C \cap \mathbb{Z}^d$ ein Monoid.*

Beweis. Für $a, b \in C \cap \mathbb{Z}^d$ gilt $a + b \in C \cap \mathbb{Z}^d$. □

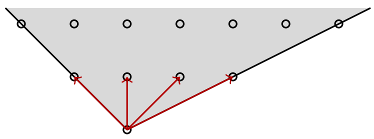
Definition 1.5. *Ein Monoid S ist **endlich erzeugt**, falls Elemente $a_1, \dots, a_k \in S$ existieren, s.d.*

$$\forall\, s \in S, s = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \qquad \text{mit} \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

*Die Elemente $a_1, \dots, a_k$ heißen **Erzeuger** des Monoids.*

Lemma 1.6 (Gordons Lemma)**.** *Sei C ein endlich erzeugter rationaler Kegel, dann ist $C \cap \mathbb{Z}^d$ ein endlich erzeugter Monoid.*

Beweis. Seien $\{v_1, \dots, v_r\}$ die Erzeuger von C. Die Menge $K = \{\sum_{i=1}^r t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1\}$ ist kompakt daher ist $K \cap \mathbb{Z}^d$ endlich. Wir zeigen das diese Menge den Monoid $C \cap \mathbb{Z}^d$ erzeugt. Jedes $v \in C \cap \mathbb{Z}^d$ kann in folgender Form geschrieben werden: $v = \sum_{i=1}^r (n_i + r_i) v_i$ mit $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $0 \leq r_i \leq 1$. Sowohl die v_i also auch das Element $\sum_{i=1}^r r_i v_i$ liegen in $C \cap \mathbb{Z}^d$. Das heisst diese Menge erzeugt den Monoid. □



Sei $\mathbb{C}[t, t^{-1}] := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d, t_1^{-1}, \dots, t_d^{-1}]$ der Ring der Laurentpolynome. Ein Element f ein $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ ist eine endliche Linearkombination von Laurentmonomen $t^\alpha := t_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot t^{\alpha_d}$

$$f = \sum_{\text{endlich}} \lambda_\alpha t^\alpha \,.$$

Definition 1.7. *Der Träger des Laurentpolynoms f ist die Menge*

$$supp(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^d \mid \lambda_\alpha \neq 0\}\,.$$

Wir definieren jetzt zu dem endlich erzeugten Monoid $S = C \cap \mathbb{Z}^d$ einen kommutativen Ring mit 1:

$$\mathbb{C}[S] := \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] \mid supp(f) \subset S\}$$

Proposition 1.8.

1. *Der Ring $\mathbb{C}[S]$ ist eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra.*
2. *$\mathbb{C}[S]$ ist nullteilerfrei, d.h. aus $x \cdot y = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 0$.*

Beweis. Sei $f \in \mathbb{C}[S]$, dann ist $f = \sum \lambda_\alpha t^\alpha$ mit $\alpha \in S$ und kann, nach Gordons Lemma, aus der endlichen Menge $K \cap \mathbb{Z}^d$ erzeugt werden. Für den zweiten Punkt bemerken wir, daß $\mathbb{C}[S]$ ein Unterring von dem nullteilerfreien Ring $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ ist, d.h $\mathbb{C}[S]$ ist selbst nullteilerfrei. □

Sei C ein endlich erzeugter rationaler Kegel und $A = (a_1, \dots a_n)$ Erzeuger der Halbgruppe $C \cap \mathbb{Z}^d$. Die Erzeuger definieren einen $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus vom Polynomring $\mathbb{C}[w_1, \dots, w_n]$ nach $\mathbb{C}[S]$ der durch

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[w_1, \dots, w_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[S] \\ w_i &\mapsto t^{a_i}\end{aligned}$$

gegeben ist. Wir bemerken zuerst, dass das Bild eines Monoms $w_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot w_n^{k_n}$ mit $(k_i \geq 0)$ tatsächlich in $\mathbb{C}[S]$ liegt, da $k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n \in S$. Offensichtlich ist die Abbildung surjektiv, da die t^{a_i} den Ring $\mathbb{C}[S]$ erzeugen.

Bemerkung 1.9.

1. *Eine $\mathbb{C}$-Algebra R heißt $\mathbb{Z}^d$-graduiert, wenn $\mathbb{C}$-Vektorräume R_a mit $a \in \mathbb{Z}^d$ existieren, s.d. $R = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^d} R_a$ und $R_a \cdot R_b \subset R_{a+b}$. Die Algebren $\mathbb{C}[w_1, \dots, w_n]$ und $\mathbb{C}[S]$ sind $\mathbb{Z}^d$-graduiert:*

$$\mathbb{C}[S]_a = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot t^a & \textit{falls } a \in S \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

   und

$$\mathbb{C}[w_1, \dots, w_n]_a = \bigoplus_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \\ a = a_1 m_1 + \dots a_n m_n}} \mathbb{C} \cdot w_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_n}$$

2. *Eine Algebrenhomomorphismus ϕ zwischen $\mathbb{Z}^d$-graduierten Algebren R und T ist $\mathbb{Z}^d$-graduiert, falls gilt:*

$$\phi(R_a) \subset T_a$$

   Es ist leicht zu sehen, daß die Abbildung $\mathbb{C}[w_1, \dots, w_n] \to \mathbb{C}[S]$ $\mathbb{Z}^d$-graduiert ist.

Um den Kern der Abbildung besser zu verstehen, betrachten wir den sogenannten **Relationen-Modul** von A:

$$\mathbb{L}_A := \{l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} l_i a_i = 0\}$$

Der Relationenmodul von A definiert ein Ideal I_A im Ring $\mathbb{C}[w_1, \dots, w_n]$ welches von den Elementen:

$$\square_l := \prod_{l_i > 0} w_i^{l_i} - \prod_{l_i < 0} w_i^{-l_i}$$

erzeugt wird.

Proposition 1.10. *Der $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus*

$$\begin{aligned}\Phi_A : \mathbb{C}[w_1, \dots, w_n]/I_A &\longrightarrow \mathbb{C}[S] \\ w_i &\mapsto t^{a_i}\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zuerst daß $\Phi(\Box_l) = 0$, d.h. daß die Abbildung wohldefiniert ist. Es gilt

$$\Phi(\Box_l) = \Phi(\prod_{l_i>0} w_i^{l_i} - \prod_{l_i<0} w_i^{-l_i}) = \prod_{l_i>0} t^{l_i \cdot a_i} - \prod_{l_i<0} t^{-l_i \cdot a_i} = t^{\sum_{l_i>0} l_i a_i} - t^{\sum_{l_i<0} -l_i a_i} = 0$$

wobei die letzte Gleicheit aus der Definition von $\mathbb{L}_A$ folgt.

Um zu zeigen, daß Φ ein Isomorphismus ist bemerken wir zuerst, daß die $\mathbb{C}$-Algebra $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I_A$ auch $\mathbb{Z}^d$-graduiert ist und damit auch die Abbildung Φ. Es reicht somit den Isomorphismus auf den graduierten Teilen zu zeigen. Das Urbild des 1-dimensionalen Vektroraums $\mathbb{C}[S]_a$ in $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ ist gerade $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]_a$. Das Bild von $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]_a$ in $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I_A$ ist aber ein 1-dimensionaler Vektorraum, da

$$w_1^{m_1} \ldots w_n^{m_n} \equiv w_1^{m'_1} \ldots w_n^{m'_n} \mod I_A$$

für $\sum m_i a_i = a = \sum m'_i a_i$. $\Box$

Wir wollen jetzt einer endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebra R ein geometrisches Objekt zuordnen. Da R endlich erzeugt ist, existiert per Definition ein $n \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n] \twoheadrightarrow R \tag{1.0.1}$$

welche als Kern das Ideal I hat.

Definition 1.11. *Die* ***Verschwindungsmenge*** $V(I) \subset \mathbb{C}^n$ *eines Ideals* $I \subset \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ *ist die Menge:*

$$V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid P(x) = 0 \textit{ für alle } P \in I\}$$

Bemerkung 1.12. *Da* $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ *ein noetherscher Ring ist, ist jedes Ideal* I *endlich erzeugt, d.h.* $I = (f_1, \ldots, f_r)$. *Somit ist* $V(I)$ *die Nullstellenmenge von endlich vielen Polynomen* $f_1, \ldots, f_r$.

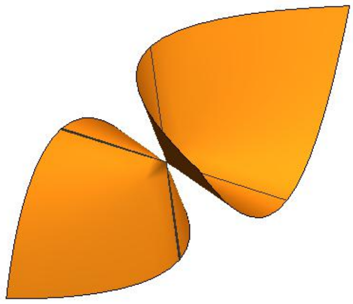
Beispiel 1.13. *Sei* $A = ((1,0),(1,-1),(1,1))$, C_A *der von* A *erzeugte Kegel und* $S_A = C_A \cap \mathbb{Q}^2$ *der zugehörige Monoid. Es gilt*

$$\mathbb{C}[S_A] = \mathbb{C}[t_1, t_1 t_2^{-1}, t_1 t_2] \subset \mathbb{C}[t_1^{\pm}, t_2^{\pm}]$$

und

$$\mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]/I_A \simeq \mathbb{C}[w_1, w_2, w_3]/(w_1^2 - w_2 \cdot w_3)$$

Das reelle Bild in $\mathbb{R}^3$ *der Verschwindungsmenge* $V(I_A)$ *ist*



Da die Erzeuger einer $\mathbb{C}$-Algebra nicht eindeutig bestimmt sind (man kann z.B. zu einem gegeben Erzeugendensystem noch ein Element hinzufügen), gibt es viele verschiedene surjektive Morphismen von einem Polynomring nach R. Sind $\Phi : \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n] \to R$ und $\Phi' : \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n'}] \to R$ zwei surjektive Abbildungen mit Kernen I und I' dann ist apriori nicht klar, dass die Verschwindungsmengen $V(I) \subset \mathbb{C}^n$ und $V(I') \subset \mathbb{C}^{n'}$ das gleiche geometrische Objekt charakterisieren.

Wir suchen daher nach einer invarianten Charakterisierung, die unabhängig von einer gegeben Einbettung in den $\mathbb{C}^n$ ist.

Zunächst wollen wir ein Ideal I aus einer Menge $X \subset \mathbb{C}^n$ konstruieren.

Definition 1.14. *Das **Verschwindungsideal** einer Menge $X \subset \mathbb{C}^n$ ist definiert als*

$$I(X) := \{f \in \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n] \mid f_{|X} = 0\}$$

Bemerkung 1.15. ***Achtung:*** *Im Allgemeinen gilt nur*

$$I \subset I(V(I)) \qquad \text{und} \qquad X \subset V(I(X))\,.$$

Sei $(x^2) \subset \mathbb{C}[x]$ das von x^2 erzeugte Ideal, dann gilt $V((x^2)) = \{0\}$ und $I(\{0\}) = (x)$. Sei $X \subset \mathbb{C}$ die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt $I(X) = (0)$ und $V(I(X)) = \mathbb{C} \supsetneq X$

Definition 1.16. *Sei $I \subset R$ ein Ideal. Sein **Radikalideal** ist durch*

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ so daß } f^n \in I\}$$

Satz 1.17 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei $I \subset \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ ein Ideal, dann gilt*

$$\sqrt{I} = I(V(I))\,.$$

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, dann ist

$$\mathfrak{m}_x := I(\{x\}) = (w_1 - x_1, \ldots, w_n - x_n) \subset \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$$

ein maximales Ideal. Die maximalen Ideale von $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ können folgenderweise charakterisiert werden.

Korollar 1.18 (Schwacher Nullstellensatz)**.** *Die maximalen Ideale von* $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ *sind alle von der Gestalt* $\mathfrak{m}_x$ *für* $x \in \mathbb{C}^n$*.*

Es gibt also eine 1-1 Korrespondenz zwischen Punkten von $\mathbb{C}^n$ und den maximalen Idealen von $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$.

Lemma 1.19. *Sei* $I \subset \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ *ein Ideal, dann gilt* $V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \mathfrak{m}_x \supset I\}$*.*

Beweis. Es gilt $x \in V(I) \Leftrightarrow f(x) = 0 \; \forall f \in I \Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}_x \; \forall f \in I$ □

Betrachte die Quotientenabbildung $p : \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n] \to \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I$. Ist $\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I$ ein maximales Ideal, dann ist $p^{-1}(\mathfrak{m}) \subset \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ auch maximal. Es exisitiert also ein $x \in \mathbb{C}^n$ mit

$$\mathfrak{m}_x = p^{-1}(\mathfrak{m}) \supset I$$

Definition 1.20. *Sei R ein Ring. Die Menge der maximalen Ideale von R wird mit*

$$\mathrm{Specm}\,(R) = \{I \subset R \mid I \text{ maximales Ideal}\}$$

bezeichnet.

Diese Konstruktion löst das Problem der invarianten Charakterisierung der Verschwindungsmenge $V(I)$. Wir haben

$$V(I) = \mathrm{Specm}\,(\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I) \simeq \mathrm{Specm}\,(R)$$

Seien jetzt $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n] \twoheadrightarrow R$ und $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n'}] \twoheadrightarrow R$ zwei surjektive Abbildung mit Kernen I und I' , dann gilt

$$\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I \simeq R \simeq \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n'}]/I'$$

Der Isomorphismus $\Theta : \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I \to \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n'}]/I'$ liefert dann eine bijektive Abbildung zwischen den zugehörigen Verschwindungsmengen:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I & \longrightarrow & \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n'}]/I' \\
 & & \\
\mathrm{Specm}\,(\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I) & \leftarrow & \mathrm{Specm}\,(\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n'}]/I') \\
\Theta^{-1}(\mathfrak{m}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{m}
\end{array}$$

Kommt der Ring R von einem Monoid, dann läßt sich Specm (R) einfach beschreiben.

Lemma 1.21. *Sei* $R = \mathbb{C}[S]$ *für einen Monoid S, dann gilt*

$$\mathrm{Specm}\,(R) = Hom_{hg}(S, \mathbb{C})$$

wobei Hom_{hg} *die Menge Halbgruppenhomoomorphismen bezeichnet und* $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ *wird als Halbgruppe aufgefasst, die mit der Multiplikation versehen ist.*

Beweis. Jedes $x \in \operatorname{Specm}(R)$ gibt einen Ringhomomorphismus $\phi_x : R \to R/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{C}$. Wir definieren $\psi_x : S \to \mathbb{C}$ durch $\psi_x(a) := \phi_x(t^a)$. Das ϕ_x ein Ringhomomorphismus ist, ist ψ_x eine Halbgruppenhomomorphismus. Die Rückrichtung ist ähnlich. □

Korollar 1.22. *Die Funktion $t^a \in \mathbb{C}[S]$ hat auf dem Punkt $x \in \operatorname{Specm}(R)$ den Wert $\psi_x(a)$.*

Wir wollen jetzt das geometrische Objekt $\operatorname{Specm}(\mathbb{C}[S])$ mit unterschiedlichen Topologien versehen.

Die Zariski Topologie:

Wir beginnen mit einer anschaulichen Charakterisierung:

Die Zariski Topologie auf $X = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I)$ wird von offenen Mengen der Form

$$D(f) = \{x \in X \subset \mathbb{C}^n \mid f(x) \neq 0\}$$

erzeugt. Einige Beispiele:

1. $f = 0 \Rightarrow D(f) = \emptyset$
2. $f = 1 \Rightarrow D(f) = X$
3. $D(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) = D(f_1) \cap \ldots \cap D(f_n)$.

Es stellt sich wieder die Frage, ob diese Definition für $X = \operatorname{Specm}(R)$ wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Isomorphismus $R \simeq \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I$.

Wir verwenden folgende abgewandelte Definition:

$$D(f) := \{x \in X \subset \mathbb{C}^n \mid [f] \neq 0 \ \text{ in } \ (\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I)/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbb{C}\}$$

Diese Definition liefert aber dieselbe Teilmenge wie oben, da

$$f = f(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/(w_1 - x_1, \ldots, w_n - x_n)$$

Wir definieren also abstrakt für $X = \operatorname{Specm}(R)$

$$D(f) := \{x \in X \mid [f] \neq 0 \ \text{ in } \ R/\mathfrak{m}_x\}$$

Es gilt

$$D(f) = \operatorname{Specm}(R_f).$$

Die analytische Topologie:

Sei wieder $X = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I)$. Die analytische Topologie auf X ist die von $\mathbb{C}^n$ induzierte Topologie, d.h.

$$U \subset X \ \text{ offen} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists V \subset \mathbb{C}^n \ \text{ offen mit } \ U = V \cap X$$

Wiederum stellt sich die Frage, ob wir auf $X = \operatorname{Specm}(R)$ eine analytische Topologie definieren können, die kompatibel mit allen Isomorphismen $R \simeq \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]/I$ ist.

Lemma 1.23. *Sei $\mathbb{C}[w_1,\dots,w_n]/I \simeq \mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n'}]/I'$, dann ist*

$$\Theta : X' = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n'}]/I') \longrightarrow X = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w_1,\dots,w_n]/I)$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $\Phi : \mathbb{C}[w_1,\dots,w_n] \to R$ und $\Phi' : \mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n'}] \to R$. Wir definieren die surjektive Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi'' : \mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n+n'}] &\longrightarrow R\\ w_i &\mapsto \begin{cases}\Phi(w_i) & \text{für } i = 1,\dots,n\\ \Phi'(w_i) & \text{für } i = n+1,\dots,n+n'\end{cases}\end{aligned}$$

mit Kern I''. Dies liefert Isomorphismen

$$\mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n+n'}]/I'' \to \mathbb{C}[w_1,\dots,w_n]/I$$

und

$$\mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n+n'}]/I'' \to \mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n'}]/I'.$$

Es reicht zu zeigen, dass $\operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w]/I) \to \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w'']/I'')$ ein Homöomorphismus ist (denn aus Symmetrie folgt dann das auch $\operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w']/I') \to \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w'']/I'')$ ein Homöomorphismus ist). Es gilt

$$\Phi''(w_i) = \Phi(w_i) \quad \text{für} \quad i = 1,\dots,n$$

und da Φ surjektiv ist gilt weiter

$$\Phi''(w_i) = \Phi(P_i) \quad \text{für } i = n+1,\dots,n+n' \text{ und geeignete } P_i \in \mathbb{C}[w_1,\dots,w_n]\,.$$

Wir haben dann den Isomorphismus

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[w_1,\dots,w_n]/I &\longrightarrow \mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n+n'}]/I\\ w_i &\mapsto w_i \quad \text{für } i = 1,\dots,n\end{aligned}$$

wobei die Umkehrabbildung durch

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n+n'}]/I'' &\longrightarrow \mathbb{C}[w_1,\dots,w_n]/I\\ w_i &\mapsto \begin{cases} w_i & \text{for } i = 1,\dots,n\\ P_i & \text{for } i = n+1,\dots,n+n'\end{cases}\end{aligned}$$

gegeben ist. Dies liefert folgende kommutative Diagramme ($X'' = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[w_1,\dots,w_{n+n'}]/I'')$)

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^{n+n'} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} X'' \arrow[r] & \mathbb{C}^{n+n'} \\ X \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{C}^n \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

wobei $p : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten ist und i die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+n'} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n, P_{n+1}(x), \ldots, P_{n+n'}(x)) \end{aligned}$$

ist. Da p bzw. i stetig sind, sind ihre Einschränkungen auf X' bzw. X (mit der induzierten Topologie) ebenfalls stetig. □

Falls wir den Raum $X = Specm(R)$ mit der analytischen Topologie versehen, schreiben wir auch X^{an}.

Lemma 1.24. *Die analytische Topologie ist feiner als die Zariski Topologie, d.h.*

$$id : X^{an} \longrightarrow X$$

ist stetig.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß eine offene Menge in der Zariski Topologie offen in der analytischen Topologie ist. Es reicht dies für die Erzeuger $D(f)$ zu tun. Das ist aber klar, da ein Polynom $f \in \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]$ eine stetige Abbildung (in der analytischen Topologie) ist, d.h. die Menge $\{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) \neq 0\}$ ist offen in $\mathbb{C}^n$, d.h. $D(f) = X \cap \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) \neq 0\}$ ist offen in X^{an}. □

Seien R_1, R_2 reduzierte endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebren. Wir wollen nun zeigen, daß eine Abbildung $R_1 \to R_2$ Anlaß zu einer Abbildung $\mathrm{Specm}\,(R_2) \to \mathrm{Specm}\,(R_1)$ gibt. Dafür benötigen wir folgendes Ergebnis.

Proposition 1.25. *Seien R_1, R_2 reduzierte endliche erzeugte $\mathbb{C}$-Algebren und $\phi : R_1 \to R_2$ ein Algebrenhomomorphismus. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R_2 dann ist $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal.*

Dies zeigt, dass ein Algebrenhomomorphismus ϕ eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Specm}\,(R_2) &\longrightarrow Specm(R_1) \\ \mathfrak{m} &\mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{m}) \end{aligned}$$

induziert.

Lemma 1.26. *Sei $R_1 \to R_2$ ein Algebrenhomomorphismus und*

$$\Phi : \mathrm{Specm}\,(R_2) \to \mathrm{Specm}\,(R_1)$$

die induzierte Abbildung. Dann ist Φ stetig bezüglich der analytischen Topologie.

Beweis. Wähle surjektive Abbildungen $\theta_1 : \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n_1}] \to R_1$ und $\theta_2 : \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n_2}] \to R_2$. Es existieren Polynome $P_i \in \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n_2}]$ für $(i = 1, \ldots, n_1)$ mit $\phi \circ \theta_1(w_i) = \theta_2(P_i)$. Dies gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ {\scriptstyle \theta_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \theta_2} \\ \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n_1}] & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_{n_2}] \end{array}$$

wobei $\tilde{\phi}(w_i) = P_i$ für $i = 1, \ldots, n_1$. Dies gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Specm}\,(R_1) & \xleftarrow{\Phi} & \mathrm{Specm}\,(R_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^{n_1} & \xleftarrow{\tilde{\Phi}} & \mathbb{C}^{n_2} \end{array}$$

wobei $\tilde{\Phi}$ durch $x = (x_1, \ldots, x_{n_2}) \mapsto (P_1(x), \ldots, P_{n_1}(x))$ gegeben ist. Das heißt $\tilde{\Phi}$ ist stetig bzgl. der analytischen Topologie. Daraus folgt das Φ ebenfalls stetig ist bzgl. der induzierten analytischen Topologie.

□

2 Kegel

Bevor wir nicht-affine torische Varietäten betrachten, benötigen wir noch einige elementare Eigenschaften von endlich erzeugten rationalen Kegeln.

Sei $N \simeq \mathbb{Z}^d$ eine freie abelsche Gruppe und $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Wir definieren $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^d$ und $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^d$.

Sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein endlich erzeugter Kegel und $x \notin \sigma$. Der **Abstand** von x und σ ist definiert als

$$d(x, \sigma) := \inf_{y \in \sigma} \{||x - y||\}$$

Lemma 2.1. *Es existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $p_\sigma(x) \in \sigma$ (der nähste Punkte zu x) der $||x - p_\sigma(x)|| = d(x, \sigma)$ erfüllt. Es gilt die Ungleichung*

$$(x - p_\sigma(x)) \cdot (y - p_\sigma(x)) \leq 0 \quad \text{für alle } y \in \sigma \tag{2.0.2}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die Existenz:

Aus der Definition von $d(x, \sigma)$ folgt, daß es eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in σ gibt, so daß gilt $\lim_{k \to \infty} ||x - s_k|| = d(x, \sigma)$. Es existiert dann ein $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $||x - s_k|| \leq M$. Daraus folgt aber, daß die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ selbst beschränkt ist:

$$||s_k|| = ||s_k - x + x|| \leq ||s^k - x|| + ||x|| \leq M + ||x||$$

Es existiert daher eine Teilfolge $(s_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$, die zu einem Punkt s konvergiert. Da σ abgeschlossen ist, liegt s in σ und es gilt $d(x,\sigma) = \lim_{j\to\infty} ||x - s_{i_j}|| = ||x - s||$.

Eindeutigkeit:

Sei $s \in \sigma$ ein Punkt, der $d(x,\sigma) = ||x-s||$ erfüllt. Wir zeigen zuerst die Ungleichung mit $p_\sigma(x) = s$. Sei $y \in \sigma$ und $0 < \lambda < 1$. Dann gil $(1-\lambda)s+\lambda y \in \sigma$ und $||(1-\lambda)s+\lambda(y-x)|| \geq ||s-x||$, d.h. $||(s-x)+\lambda(y-s)|| \geq ||s-x||$. Wir quadrieren beide Seiten und erhalten $||s-x||^2+2\lambda(s-x)\cdot(y-s)+\lambda^2||y-s||^2 \geq ||s-x||^2$. Wir subtrahieren von beiden Seiten $||s-x||^2$, dividieren durch λ, lassen $\lambda \to 0^+$ und multiplizieren mit -1. Dies ergibt die Ungleichung (2.0.2) für $p_\sigma(x) = s$. Sei t ein weiterer Punkt für den gilt $d(x,\sigma) = ||x-t||$. Da $s, t \in \sigma$ erhalten wir die beiden Ungleichungen

$$(x-s)\cdot(t-s) \leq 0 \qquad \text{und} \qquad (x-t)\cdot(s-t) \leq 0$$

In dem wir die beiden Ungleichungen addieren erhalten wir

$$0 \geq ((x-s)-(x-t))\cdot(t-s) = (t-s)\cdot(t-s) = ||t-s||^2$$

also $s = t$. □

Wir beweisen jetzt einen Separierungslemma, welches im folgenden oft angewandt wird.

Lemma 2.2 (Separierungslemma I)**.** *Sei $\sigma \subset \mathbb{N}_\mathbb{R}$ ein endlicherzeugter Kegel und $x \notin \sigma$. Für $u_x := (p_\sigma(x) - x)\cdot \in M$ gilt $\langle u_x, x\rangle < 0$ und $\langle u_x, y\rangle \geq 0$ für alle $y \in \sigma$.*

Beweis. Setzen wir $\lambda p_\sigma(x)$ für y in der Ungleichung (2.0.2) ein, erhalten wir $(1-\lambda)(p_\sigma(x)-x)\cdot p_\sigma(x) \leq 0$ für alle $\lambda > 0$. Daraus folgt $(p_\sigma(x)-x)\cdot p_\sigma(x) = 0$. Daraus folgt

$$0 < (p_\sigma(x)-x)\cdot(p_\sigma(x)-x) = (p_\sigma(x)-x)\cdot(-x)$$

und damit $\langle u_x, x\rangle < 0$. Es gilt außerdem

$$0 \leq (p_\sigma(x)-x)\cdot(y-p_\sigma(x)) = (p_\sigma(x)-x)\cdot y \qquad \text{für alle } y \in \sigma$$

d.h. $\langle u_x, y\rangle \geq 0$. □

Definition 2.3. *Sei $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ ein endlich erzeugter rationaler Kegel. Der **duale Kegel** $\sigma^\vee \subset M_\mathbb{R}$ ist definiert als*

$$\sigma^\vee := \{u \in M_\mathbb{R} \mid \langle u, v\rangle \geq 0 \;\; \forall \;\; v \in \sigma\}.$$

Lemma 2.4. *Es gilt*

$$(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$$

Beweis. Die Definition von $(\sigma^\vee)^\vee$ ist $\{v \in N_\mathbb{R} \mid \langle u, v\rangle \geq 0 \text{ für alle } u \in \sigma^\vee\}$. Aus Lemma 2.2 folgt, daß das Komplement von σ im Komplement von $((\sigma^\vee)^\vee)$ enthalten ist, also $(\sigma^\vee)^\vee \subset \sigma$. Die andere Richtung ist klar. □

Sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein endlich erzeugter rationaler Kegel.

Definition 2.5. *Sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein endlich erzeugter rationaler Kegel und $u \in \check{\sigma}$, dann heißt*

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp} = \{v \in \sigma \mid \langle u, v\rangle = 0\}$$

*eine **Seite** von σ. Die Hyperebene $u^{\perp} = \{v \in \mathbb{N}_{\mathbb{R}} \mid \langle u, v\rangle = 0\}$ heißt **Stützhyperebene** oder **Stützebene**.*

Lemma 2.6. *Sei σ ein endlich erzeugter rationaler Kegel.*

1. *Jede Seite τ von σ ist selbst ein endlich erzeugter rationaler Kegel.*
2. *Der Schnitt zweier Seiten von σ ist eine Seite von σ.*
3. *Die Seite einer Seite τ ist eine Seite von σ.*
4. *Jede echte Seite ist in einer vollen Seite enthalten.*
5. *Jede echte Seite ist gleich dem Schnitt über alle vollen Seiten die diese enthalten.*

Beweis. Die Beweise sind Übungsaufgaben. □

Lemma 2.7. *Der topologische Rand eines Kegels $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, der ganz $N_{\mathbb{R}}$ aufspannt, ist die Vereinigung aller echten Seiten.*

Beweis. Eine Seite ist definiert als Schnitt einer Stützebene mit σ. Daher sind in jeder Umgebung eines Punktes, der in einer echten Seiten liegt, Punkte enthalten, die nicht in σ liegen. Da σ $N_{\mathbb{R}}$ aufspannt, enthält σ innere Punkte. Betrachte man ein Geradensegment von einem inneren Punkt zu einem Punkt auf einer echten Seite, dann sieht man, daß der Punkte auf der Seite in jeder Umgebung auch innere Punkte enthält, d.h. jeder Punkt in einer echten Seite liegt im topologischen Rand.
Sei umgekehrt v im topologischen Rand und $v_i \to v$ eine Folge mit $v_i \notin \sigma$. Wegen Lemma 2.2 finden wir Vektoren $u_i \in \sigma^{\vee}$ mit $\langle u_i, v_i\rangle < 0$. Wir können obdA annehmen, daß $||u_i|| = 1$, d.h. daß die u_i in der (kompakten) Einheitssphäre enthalten sind. Die u_i haben daher eine konvergente Teilfolge (u_{i_j}) mit Grenzwert u_0. Da $\sigma^{\vee}$ abgeschlossen ist, gilt $u_0 \in \sigma^{\vee}$, weiterhin gilt $\lim\langle u_{i_j}, v_{i_j}\rangle = \langle u_0, v\rangle = 0$, d.h. v liegt in der Seite $\sigma \cap u_0^{\perp}$. □

Lemma 2.8. *Sei σ eine endlich erzeugter Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und $v_1, \ldots, v_n$ seine Erzeuger. Sei Relint(σ) das relative Innere von σ in $N_{\mathbb{R}}$, dann gilt*

$$Relint(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{>0}\, v_i$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $\supset$:

Sei $k = \dim(\sigma)$. Wir können oBdA annehmen, daß $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind. Sei $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{>0}\, v_i$ und $\lambda := \min_i\{\lambda_i\}$. Dann ist $v \pm \lambda v_i \in \sigma$ für $i = 1, \ldots, k$.

Da σ konvex ist, folgt $v \in Relint(\sigma)$.

Wir zeigen $\subset$:

Sei $v \in Relint(\sigma)$. Es existiert $\lambda > 0$, s.d. $w_i := v - \lambda v_i \in \sigma$ für $i = 1, \ldots, n$. Es gilt

$$v = \left(\frac{\lambda}{n} v_1 + \ldots + \frac{\lambda}{n} v_n\right) \; + \; \left(\frac{1}{n} w_1 + \ldots + \frac{1}{n} w_n\right)$$

wobei $\frac{\lambda}{n} v_1 + \ldots + \frac{\lambda}{n} v_n \in \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{>0} v_i$ und $\frac{1}{n} w_1 + \ldots + \frac{1}{n} w_n \in \sigma$. $\square$

Wenn σ den Vektorraum $N_\mathbb{R}$ aufspannt und τ eine volle Seite von σ ist, dann gibt es ein $u \in \sigma^\vee$ mit $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Wir definieren

$$u_\tau := \lambda \cdot u$$

wobei $\lambda := \min(\mu \in \mathbb{R}_{>0} \mid \mu \cdot u \in M)$.

Lemma 2.9. *Sei $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ mit $\dim \sigma = d$ und $\sigma \neq N_\mathbb{R}$, dann ist*

$$\sigma = \bigcap_{\substack{\tau \\ \text{volle Seite}}} H_\tau$$

wobei $H_\tau = \{v \in N_\mathbb{R} \mid \langle u_\tau, v\rangle \geq 0\}$ ein Halbraum ist.

Beweis. Die Inklusion $\sigma \subset \bigcap H_\tau$ ist klar. Nehme an, es gäbe $v \in \bigcap H_\tau$ mit $v \notin \sigma$ und sei v' im Inneren von σ. Sei w der letzte Punkt in σ auf dem Geradensegement von v' nach v. Dann liegt w im Rand von σ und daher in einer vollen Seite τ. Es gilt $\langle u_\tau, v'\rangle > 0$ und $\langle u_\tau, w\rangle = 0$, d.h. $\langle u_\tau, v\rangle < 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme $v \in \bigcap H_\tau$. $\square$

Satz 2.10 (Theorem von Farkas)**.** *Der duale Kegel eines rationalen, endlich-erzeugten Kegels ist selbst rational und endlich-erzeugt.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\sigma^\vee$ von den u_τ aus Lemma 2.9 erzeugt wird. Nehme an, es gäbe ein $u \in \sigma^\vee$ welches nicht im Kegel enthalten ist, der von den u_τ aufgespannt wird. Wir wenden Lemma 2.2 auf diesen Kegel an (der in $M_\mathbb{R}$ liegt) und finden einen Vektor $v \in V$ mit $\langle u_\tau, v\rangle \geq 0$ für alle vollen Seiten τ und $\langle u, v\rangle < 0$. Aus $\langle u_\tau, v\rangle \geq 0$ und Lemma 2.9 folgt $v \in \sigma$, dies ist aber ein Widerspruch zu $u \in \sigma^\vee$. $\square$

Lemma 2.11. *Ist τ eine Seite von σ, dann ist $\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp = \sigma^\vee \cap v^\perp$ mit $v \in Relint(\tau)$ eine Seite von $\sigma^\vee$ mit*

$$\dim(\tau) + \dim(\sigma^\vee \cap \tau^\perp) = d.$$

Dies liefert eine ordnungsumkehrende 1-1 *Korrespondenz zwischen den Seiten von σ und den Seiten von $\sigma^\vee$. Die kleinste Seite von σ ist $\sigma \cap (-\sigma)$.*

Beweis. Die Seiten von $\sigma^\vee$ haben per Definition die Gestalt $\sigma^\vee \cap v^\perp$ für $v \in \sigma = (\sigma^\vee)^\vee$. Sei τ die Seite von σ, die v in ihrem relativen Inneren enthält, dann gilt

$$\sigma^\vee \cap v^\perp = \sigma^\vee \cap (\tau^\vee \cap v^\perp) = \sigma^\vee \cap \tau^\perp. \tag{2.0.3}$$

Hier folgt das erste Gleichheitszeichen aus $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$. Für das zweite Gleichheitszeichen reicht es $\tau^\vee \cap v^\perp = \tau^\perp$ zu zeigen. Die Inklusion $\supset$ ist klar. Sei also $u \in \tau^\vee \cap v^\perp \subset M_\mathbb{R}$ und $v_1, \ldots, v_s$ die Erzeuger des Kegels τ. Wegen Bemerkung 2.8 kann man v als Linearkombination $\sum_{i=1}^s \lambda_i v_i$ schreiben mit $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \ldots, s$. Daraus folgt

$$0 = \langle u, v\rangle = \lambda_1 \langle u, v_1\rangle + \ldots + \lambda_s \langle u, v_s\rangle$$

und somit $\langle u, v_i\rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, s$, also $u \in \tau^\perp$. Wir haben somit gezeigt, daß jede Seite von $\sigma^\vee$ als $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ geschrieben werden kann. Die Abbildung

$$\tau \mapsto \tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \tag{2.0.4}$$

ist also surjektiv und sie ist ordnungsumkehrend wegen $\tau_1 \subset \tau_2 \Rightarrow \tau_1^\perp \supset \tau_2^\perp$. Die Inklusion $\tau \subset (\tau^*)^*$ folgt aus

$$(\tau^*)^* = \sigma \cap (\tau^*)^\perp = \sigma \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\perp = \sigma \cap ((\sigma^\vee)^\perp \oplus \tau) \supset \tau$$

Verwendet man τ^* anstatt τ folgt $\tau^* \subset ((\tau^*)^*)^*$, da die Abbildung (2.0.4) ordnungsumkehrend ist, folgt aber aus der Inklusion $\tau \subset (\tau^*)^*$ auch $\tau^* \supset ((\tau^*)^*)^*$. Dies zeigt $\tau^* = ((\tau^*)^*)^*$ und wegen der Surjektivität folgt auch $\tau = (\tau^*)^*$. Wir erhalten also die gewünschte 1-1 Korrespondenz.

Für die maximale Seite $\sigma^\vee$ gilt

$$(\sigma^\vee)^* = (\sigma^\vee)^\vee \cap (\sigma^\vee)^\perp = \sigma \cap (\sigma^\vee)^\perp = (\sigma^\vee)^\perp = \sigma \cap (-\sigma).$$

Es bleibt die Dimensionsformel zu zeigen. Es gilt

$$\dim((\sigma^\vee)^*) + \dim(\sigma^\vee) = \dim((\sigma^\vee)^\perp) + \dim(\sigma^\vee) = d \tag{2.0.5}$$

und aufgrund der Dualität in Lemma 2.4 auch

$$\dim(\sigma^*) + \dim(\sigma) = d. \tag{2.0.6}$$

Sei nun

$$\sigma \cap (-\sigma) = \tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \tau_k = \sigma$$

eine maximale aufsteigende Kette von Seiten. Es gilt $\dim(\tau_{i+1}) = \dim(\tau_i) + 1$. Betrachte die duale Kette

$$(\sigma^\vee) = \tau_1^* \supsetneq \tau_2^* \supsetneq \ldots \supsetneq \tau_k^* = \sigma^*$$

mit $\dim(\tau_{i+1}^*) = \dim(\tau_i^*) - d_i$ und $d_i > 0$. Aufgrund von (2.0.5) und (2.0.6) muss gelten $\sum_{i=1}^{k-1} d_i = k - 1$, also $d_i = 1$ für $i = 1, \ldots k - 1$. Daraus folgt aber die Dimensionsformel. $\square$

Lemma 2.12. *Sei $u \in \sigma^\vee$ und $\tau = \sigma \cap u^\perp$, dann gilt*

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u)$$

Beweis. Beide Seiten sind konvexe endlich erzeugte Kegel, es reicht also die Gleichung für die dualen Kegel zu zeigen. Es gilt $(\tau^\vee)^\vee = \tau$ und $(\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-u))^\vee = \sigma \cap (-u)^\vee = \sigma \cap u^\perp$. □

Korollar 2.13. *Sei σ ein rationaler endlich erzeugter Kegel und sei $u \in S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$. Dann ist $\tau = \sigma \cap u^\perp$ ein rationaler endlich erzeugter Kegel und alle Seiten von σ sind von dieser Form. Es gilt*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$$

Beweis. Ist τ eine Seite von σ, dann gibt es aufgrund von Lemma 2.11 ein u im relativen Inneren von $\tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$. Insbesondere kann u aus M gewählt werden, da $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ rational ist. Das zeigt die erste Aussage. Sei $w \in S_\tau$, dann ist wegen Lemma 2.12 $w + p \cdot u \in \sigma^\vee$ wenn man $p \in \mathbb{N}$ groß genug wählt. Das zeigt $w \in S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$. Die andere Inklusion folgt genauso. □

Lemma 2.14 (Separierungslemma II)**.** *Seien σ und σ' endlich erzeugte Kegel deren Schnitt τ von beiden eine Seite ist, dann gibt es $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ s.d. gilt*

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$$

Beweis. Betrachte den Kegel $\gamma = \sigma - \sigma' := \sigma + (-\sigma')$. Wegen Lemma 2.11 gibt es ein $u \in \mathit{Relint}(\gamma^\vee)$, so daß $\gamma \cap u^\perp$ die kleinste Seite von γ ist, also

$$\gamma \cap u^\perp = \gamma \cap (-\gamma) = (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma)$$

Wir wollen zeigen, daß dieses u die Behauptung erfüllt. Wegen $\sigma \subset \gamma$, gilt $u \in \sigma^\vee$. Die Seite τ ist in $\gamma \cap (-\gamma)$ enthalten und daher gilt $\tau \subset \sigma \cap u^\perp$. Sei umgekehrt $v \in \sigma \cap u^\perp \subset \gamma \cap u^\perp$, dann ist $v \in \sigma' - \sigma$, d.h. $v = w' - w$ mit $w' \in \sigma'$ und $w \in \sigma$. Dann ist aber $v + w = w' \in \tau = \sigma \cap \sigma'$. Da $v, w \in \sigma$, kann die Summe $v + w$ nur in τ sein, wenn jeder Summand in τ ist, d.h. $v \in \tau$. Dasselbe Argument für $-u$ zeigt $\sigma' \cap u^\perp = \tau$. □

Satz 2.15. *Seien σ und σ' rationale, endlich erzeugte Kegel deren Schnitt τ von beiden eine Seite ist, dann gilt*

$$S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$$

Beweis. Die Inklusion $\supset$ ist trivial. Wir zeigen die andere Inklusion. Wegen 2.14 können wir ein $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee \cap M$ nehmen, so daß $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$. Wegen Korollar 2.13 und $-u \in S_{\sigma'}$ gilt $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u) \subset S_\sigma + S_{\sigma'}$. □

Lemma 2.16. *Für einen endlich erzeugten Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ sind folgende Aussagen äquivalent*

1. *σ ist strikt konvex, d.h. $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$*
2. *$\exists\, u \in \sigma^\vee$ so daß $\sigma \cap u^\perp = \{0\}$*
3. *$\sigma^\vee$ spannt $M_{\mathbb{R}}$ auf.*

Proof. Die ersten beiden Aussagen sind äquivalent da, $\sigma \cap (-\sigma)$ die kleinste Seite von σ ist und wir nach 2.11 ein $u \in \sigma^\vee$ finden können, so daß $\sigma \cap (-\sigma) = \sigma \cap u^\perp$ gilt.Die erste und dritte Aussage sind wegen der Dimensionsformel in 2.11 äquivalent. $\square$

3 Fächer

Wir haben im ersten Kapitel gelernt wie man affine Varietäten aus Kegeln konstuiert. In diesem Kapitel möchten wir kompliziertere (nicht-affine) Varietäten durch Verklebung von affinen Varietäten konstruieren. Das Standardbeispiel ist der komplexe projektive Raum $\mathbb{P}^n$, der mit den $n+1$ affinen Varietäten $\mathbb{C}^n$ überdeckt werden kann. Wir werden sehen, daß das Verkleben von affinen Varietäten, dem Verkleben von Kegeln entspricht.

Wir definieren zuerst den Begriff einer Varietät. Sei R eine endlich erzeugte reduzierte $\mathbb{C}$-Algebra und $X = \operatorname{Specm}(R)$ die zugehörige affine Varietät. Für ein $f \in R$ gilt für die offene Menge $X_f := D(f) = \operatorname{Specm}(R_f)$. Diese offenen Mengen bilden eine Basis für die Zariski-Topologie auf X.

Definition 3.1. *Sei $U \subset X := \operatorname{Specm}(R)$ Zariski offen. Eine Funktion $\phi : U \to \mathbb{C}$ heißt **regulär**, falls für alle $p \in U$ ein $f_p \in R$ exisitiert, s.d. $p \in X_{f_p} \subset U$ und $\phi_{|X_{f_p}} \in R_{f_p}$. Definiere*

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\phi : U \to \mathbb{C} \mid \phi \text{ ist regulär}\}$$

Lemma 3.2. *Sei $X = \operatorname{Specm}(R)$ eine affine Varietät. Dann gilt*

1. *$\mathcal{O}_X(X) = R$*
2. *$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$ für $f \in R$*

Beweis. (1): Jedes Element von R definiert eine reguläre Funktion, also $R \subset \mathcal{O}_X(X)$. Sei also $\phi \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann existiert für alle $p \in X$ ein f_p so daß $p \in X_{f_p}$ und $\phi = a_p/f_p^{n_p} \in R_{f_p}$. Das Ideal $I = (f_p^{n_p} \mid p \in X =\subseteq R$ erfüllt $V(I) = \emptyset$, da $f_p(p) \neq 0$. Der Nullstellensatz besagt, dann $\sqrt{I} = R$, das heißt es gibt eine endliche Menge $S \subset X$ und Elemente g_p, s.d. gilt

$$1 = \sum_{p \in S} g_p f_p^{n_p}$$

Dann gilt $\phi = \sum_{p\in S} g_p f_p^{n_p}\phi = \sum_{p\in S} g_p a_p \in R$. (2): Sei $U \subset X_f$ Zariski offen, dann ist U offen in X. Falls $X_f \subset U$, dann gilt $X_g = X_{fg}$ mit Koordinatenring $R_{fg} = (R_f)_{g/f^l}$ für alle $l \geq 0$, also $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X_f}(U)$. Wenn wir $U = X_f$ setzen folgt $\mathcal{O}_X(X_f) = \mathcal{O}_{X_f}(X_f) = R_f$, wobei die letzte Gleicheit aus 1. folgt. □

Wenn X irreduzibel ist (also R nullteilerfrei) definieren wir die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,p}$ als

$$\mathcal{O}_{X,p} := \{f/g \in Frac(R) \mid g(p) \neq 0\}$$

Lemma 3.3. *Sei $U \subset X$ Zariski offen, dann gilt*

$$\bigcap_{p\in U} \mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_X(U)$$

Proof. Sei $\phi \in \mathcal{O}_X(U)$ und $p \in U$. Dann existiert ein $f_p \in R$ mit $\phi_{|X_{f_p}} = a_p/f_p$ für $a_p \in R$, also $\phi \in \mathcal{O}_{X,p}$. Sei umgekehrt $\phi \in \cap_{p\in U}\mathcal{O}_{X,p}$. Für jedes $p \in U$ gilt dann $\phi = f/f_p \in Frac(R)$ mit $f_p(p) \neq 0$. Da die Mengen X_h für $h \in R$ eine Basis der Topologie bilden, existiert ein $h_p \in R$ mit $h_p(p) \neq 0$ und $X_{f_p h_p} \subset U$ und es gilt $\phi_{|X_{f_p h_p}} = f \cdot h_p / f_p \cdot h_p \in R_{f_p \cdot h_p}$. Da dies für alle $p \in U$ gilt folgt $\phi \in \mathcal{O}_X(U)$. □

Definition 3.4. *Eine **Prägarbe** von abelschen Gruppen $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X ist eine Kollektion von Daten*

$$\begin{aligned}&(U \text{ offen in } X) \mapsto \mathcal{F}(U) \quad (\text{abelsche Gruppe})\\ &(U \subset V) \mapsto \rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \quad (\text{Gruppenhomomorphismus})\end{aligned}$$

so daß gilt

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$
2. $\rho_{U,U} = id$
3. $\rho_{V,U} \circ \rho_{W,V} = \rho_{W,U}$ *für* $U \subset V \subset W$ *offen*

*Eine Prägrabe $\mathcal{F}$ heißt **Garbe**, falls gilt: Sei $U = \bigcup_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Dann gilt*

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \quad \textit{ist injektiv}$$

und für $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_i,U_i\cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i\cap U_j}(s_j)$ für alle i, j existiert ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U,U_i}(s) = s_i$.

Die Definition einer Garbe von Ringen bzw. $\mathbb{C}$-Algebren verläuft annalog.

Definition 3.5. *Seien $\mathcal{F},\mathcal{G}$ (Prä-)Garben auf X. Ein Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von (Prä-)Garben ist eine Kollektion von Morphismen $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für jede offene Menge U, so daß für $U \subset V$ folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] \arrow[d, "\rho_{V,U}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

Definition 3.6. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Das* ***direkte Bild*** *von $\mathcal{F}$ unter f ist eine Garbe $f_*\mathcal{F}$ auf Y mit*

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

Sei X eine affine Varietät.Die Abbildung

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$$

für $U \subset X$ Zariski offen, definiert die **Strukturgarbe** der affinen Varietät X. Für $U' \subset U$ haben wir die Restriktionsabbildung

$$\rho_{U,U'} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U')$$

mit $\rho_{U,U'}(\phi) := \phi_{|U'}$.

Definition 3.7. *Ein topologischer Raum X mit eine Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ heißt* ***geringter Raum*** *$(X, \mathcal{O}_X)$. Ein Morphismus $(f, f^\sharp)$ von geringten Räumen ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit einem Garbenringhomomorphismus*

$$f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$$

Definition 3.8. *Seien $U_i \subset X_i$ für $i = 1, 2$ Zariski offene Teilmengen von affinen Varietäten. Eine Funktion $\Phi : U_1 \to U_2$ ist ein Morphismus, falls $\phi \mapsto \phi \circ \Phi$ eine Abbildung*

$$\Phi^\sharp : \mathcal{O}_{V_2}(U_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{V_1}(U_1)$$

liefert.

Definition 3.9. *Eine Varietät ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, mit einer endlichen offenen Überdeckung X_α von X, so daß $(X, \mathcal{O}_X)_{|X_\alpha}$ isomorph zu einem geringten Raum einer affinen Varietät ist.*

Definition 3.10. *Seien X, Y Varietäten mit affinen offenen Überdeckungen $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$ und $Y = \bigcup_\beta Y_\beta$. Ein Morphismus $\Phi : X \to Y$ ist eine stetige Abbildung, s.d. die Einschränkungen*

$$\Phi_{|X_\alpha \cap \Phi^{-1}(Y_\beta)} : X_\alpha \cap \Phi^{-1}(Y_\beta) \to Y_\beta$$

Morphismen im Sinne von Definition 3.8 sind.

Sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein rationaler, endlich erzeugter Kegel, wir definieren den Monoid

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$$

als die ganzzahligen Punkte im dualen Kegel $\sigma^\vee$. Dies gibt die nullteilerfreie, endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra

$$A_\sigma := \mathbb{C}[S_\sigma]$$

und damit die affine torische Varietät

$$U_\sigma := \mathrm{Specm}\,(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

Sei τ eine Seite von σ. Dies liefert eine injektive Abbildungen $S_\sigma \to S_\tau$ bzw. $A_\sigma \to A_\tau$.

Lemma 3.11. *Ist τ eine Seite von σ, dann ist die Abbildungen $U_\tau \to U_\sigma$ eine offene Einbettung. Das Bild von U_τ in U_σ ist von der Form $D(f)$ mit $f = t^u$ und $u \in Relint(\tau^*)$.*

Beweis. Wegen Korollar 2.13 existiert ein $u \in S_\sigma$, so dass $\tau = \sigma \cap u^\perp$ und $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u)$. Das zeigt, dass jedes Monom $t^{w'}$ mit $w' \in S_\tau$ aus $\mathbb{C}[S_\tau]$ folgenderweise geschrieben werden kann:

$$t^{w'} = t^{w-p\cdot u} = t^w \cdot (t^{-u})^p$$

Daraus folgt aber, dass $A_\tau = (A_\sigma)_{t^u}$. □

Insbesondere ist

$$T := T_N := U_{\{0\}} = \mathrm{Specm}\,(\mathbb{C}[M]) = (\mathbb{C}^*)^d = Hom_{hg}(M, \mathbb{C}^*) = N \otimes \mathbb{C}^*$$

eine offene Teilmenge. Die affine torische Varietät enthält also einen Torus, daher auch ihr Name.

Definition 3.12. *Ein Fächer Σ ist eine Menge von endlich erzeugten rationalen Kegeln in $N_{\mathbb{R}}$ so daß gilt*

1. *Jede Seite eine Kegels $\sigma \in \Sigma$ ist selbst in Σ*
2. *Falls σ und σ' Kegel im Fächer Σ sind, dann ist $\sigma \cap \sigma'$ eine gemeinsame Seite von σ und σ'.*

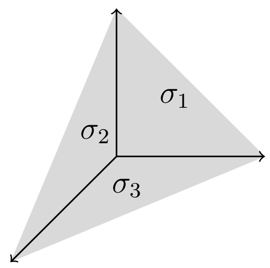
Definition 3.13. *Sei Σ ein Fächer. Die torische Varietät $X_\Sigma^{(an)}$ ist definiert als*

$$\bigsqcup_\sigma U_\sigma^{(an)} / \sim$$

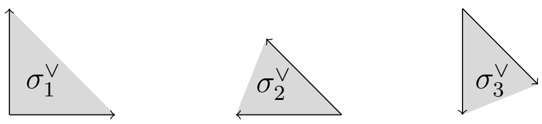
wobei $x \sim y$ für $x \in U_\sigma^{(an)}$ und $y \in U_{\sigma'}^{(an)}$, falls $x = y$ in $U_{\sigma\cap\sigma'}^{(an)}$.

Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ von X_Σ ist die eindeutig bestimmte Garbe von $\mathbb{C}$-Algebren mit $\mathcal{O}_{X_\Sigma|U_\sigma} = \mathcal{O}_{U_\sigma}$.

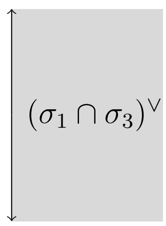
Beispiel 3.14. *Betrachte den Fächer*



Die dualen Kegel sind



Dann ist $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \simeq \mathbb{C}[x,y]$, $\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] \simeq \mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y]$ *und* $\mathbb{C}[S_{\sigma_3}] \simeq \mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]$. *Der duale Kegel von* $\sigma_1 \cap \sigma_3$ *ist*



also $\mathbb{C}[S_{\sigma_1 \cap \sigma_3}] \simeq \mathbb{C}[x, y, y^{-1}]$. *Dies liefert die Inklusionen*

$$\mathbb{C}[x,y] \hookrightarrow \mathbb{C}[x,y,y^{-1}] \hookleftarrow \mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]$$

und damit die Verklebeabbildungen

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 & \leftarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u,v) & \leftarrow\!\shortmid & (u,v) & \mapsto & (uv^{-1}, v^{-1}) \end{array}$$

Dies entspricht gerade einer Kartenwechselabbildung in $\mathbb{P}^2$*:*

$$(1 : u : v) = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0}) \leftarrow (x_0 : x_1 : x_2) \rightarrow (\frac{x_0}{x_2} : \frac{x_1}{x_2} : 1) = (v^{-1} : uv^{-1} : 1)$$

Wir wollen nun zeigen, daß die torische Varietät X_Σ separiert, bzw. X_Σ^{an} Hausdorffsch ist.

Bemerkung 3.15. *Sei* X *ein topologischer Raum.* X *ist genau dann Hausdorffsch, wenn das Bild* Δ_X *der Diagonalabbildung* $X \to X \times X$ *(wobei* $X \times X$ *die Produkttopologie trägt) abgeschlossen ist.*

Bemerkung 3.16. *Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche offene Überdeckung eines topologischen Raumes X, dann ist*

$$\bigcup_{(i,j) \in I \times I} U_i \times U_j$$

eine endliche offene Überdeckung von $X \times X$. Es gilt: Δ_X abgeschlossen in $X \times X$ genau dann wenn $\Delta_X \cap (U_i \times U_j)$ abgeschlossen ist in $U_i \times U_j$ für $i, j \in I$.

Lemma 3.17. *Seien σ und τ Kegel, die sich in einer gemeinsamen Seite schneiden, dann ist die Diagonalabbildungen $U_{\sigma \cap \tau} \to U_\sigma \times U_\tau$ eine abgeschlossene Einbettung.*

Beweis. Die Behauptung ist äquivalent zur Tatsache, daß $A_\sigma \otimes A_\tau \to A_{\sigma \cap \tau}$ surjektiv ist. Dies folgt aber aus Satz 2.15: $S_{\sigma \cap \tau} = S_\sigma + S_\tau$. □

Korollar 3.18. *Die torische Varietät X_Σ^{an} ist Hausdorffsch.*

Beweis. Aus Lemma 3.17 folgt, daß das Bild von $U_{\sigma \cap \tau}^{an} \to U_\sigma^{an} \times U_\tau^{an}$ abgeschloßen ist. Da $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$ eine endliche offene Überdeckung ist, folgt aus Bemerkung 3.15 und 3.16, daß X_Σ^{an} Hausdorffsch ist. □

Definition 3.19. *Eine algebraische Varietät X heißt separiert, falls das Bild Δ_X der Diagonalabbildung $X \longrightarrow X \times X$ abgeschlossen ist.*

ACHTUNG: $X \times X$ trägt hier nicht die Produkttopologie!

Bemerkung 3.20. *Lemma 3.17 zeigt dann, daß X_Σ separiert ist (Shafarevich V Proposition 2).*

4 Lokale Eigenschaften

Für jeden Kegel $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ hat die affine torische Varietät U_σ einen ausgezeichneten Punkt, den wir mit x_σ bezeichenen. Der Punkt x_σ ist durch die folgenden Homomorphismus von Halbgruppen gegeben:

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \to \{1, 0\} \subset \mathbb{C}^* \cup \{0\}$$
$$u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } u \in \sigma^\perp \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\sigma^\perp = \sigma^\vee \cap \sigma^\perp = \sigma^*$ eine Seite von $\sigma^\vee$ ist, und die Summe von zwei Elementen in $\sigma^\vee$ nur dann in $\sigma^\perp$ enthalten sein kann, falls beide Elemente selbst in $\sigma^\perp$ enthalten sind.

Satz 4.1. *Eine affine torische Varietät U_σ ist nicht-singulär genau dann wenn σ von einem Teil einer Basis von N erzeugt wird, d.h.*

$$U_\sigma \simeq \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}, \qquad k = \dim(\sigma)$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß σ den Vektorraum $N_{\mathbb{R}}$ aufspannt, d.h. $\sigma^{\perp} = \{0\}$. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal, welches zum Punkt x_σ gehört. Das heißt $\mathfrak{m}$ wird von den t^u mit $0 \neq u \in S_\sigma$ erzeugt. Das Quadrat $\mathfrak{m}^2$ wird von den t^u erzeugt, bei denen u eine Summe von zwei Elementen aus $S_\sigma \setminus \{0\}$ ist. Der Kotangentialraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ hat daher als Basis über $\mathbb{C}$ diejenigen t^u für die u nicht als Summe von zwei Elementen in $S_\sigma \setminus \{0\}$ geschrieben werden kann. Wir nehmen an, daß U_σ nicht-singulär am Punkt x_σ ist. Eine mögliche Charakterisierung dieser Eigenschaft ist, daß der Kotangentialraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein d-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, da $\dim(U_\sigma) = d$. Damit U_σ nicht singulär ist, ist eine notwendige Bedingung, daß $\sigma^\vee$ nicht mehr als n Kanten (Seiten der Dimension 1) hat und die minimalen Erzeuger der Kanten schon S_σ erzeugen müssen. Da S_σ die abelsche Gruppe M erzeugt, müssen diese Erzeuger eine Basis von M sein. Der duale Kegel σ muß daher auch von einer Basis von N erzeugt werden. Dies zeigt den Satz für $\dim(\sigma) = d$.

Sei $\dim(\sigma) = k < d$ und setzte

$$N_\sigma = \sigma \cap N + (-\sigma \cap N)$$

Die Menge N_σ ist die Untergruppe von N die von $\sigma \cap N$ erzeugt wird. Für die Untergruppe N_σ gilt: Sei $v \in N$ mit $n \cdot v \in N_\sigma$ dann gilt $v \in N_\sigma$. Daher ist $N'' := N/N_\sigma$ auch eine freie abelsche Gruppe. Wir wählen eine Spaltung

$$N = N_\sigma \oplus N'' \quad \text{and} \quad \sigma = \sigma' \oplus \{0\}$$

wobei σ' ein Kegel in $(N_\sigma)_{\mathbb{R}}$ ist. Wir erhalten eine duale Zerlegung $M = M' \oplus M''$ und haben $S_\sigma = ((\sigma')^\vee \cap M') \oplus M''$, also

$$U_\sigma = U_{\sigma'} \times T_{N''} \simeq U_{\sigma'} \times (\mathbb{C}^*)^{d-k}$$

Die Varietät U_σ ist genau dann nicht singulär wenn $U_{\sigma'}$ ist nicht singulär. □

Satz 4.2. *Sei U_σ eine affine torische Varietät, dann ist U_σ normal.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$ ganz abgeschlossen ist. Seien $v_1, \ldots, v_r$ Erzeuger von σ und $\tau_i = \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$ die entsprechende Kante. Dann gilt wegen Lemma 2.9 und Lemma 2.11 $\sigma^\vee = \cap \tau_i^\vee$ und daher $A_\sigma = \bigcap A_{\tau_i}$. Wegen Satz 4.1 ist A_{τ_i} isomorph zu $\mathbb{C}[w_1, w_2, w_2^{-1}, \ldots, w_d, w_d^{-1}]$ und daher ganz abgeschlossen ist. Da A_σ ein Schnitt von ganz abgeschlossen Ringen ist, ist A_σ selbst ganz abgeschlossen. □

Sei $N' \subset N$ ein Untergitter von endlichem Index und $M \subset M'$ die dualen Gitter. Es gibt eine kanonische Paarung

$$M'/M \times N/N' \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^*$$

Die erste Abbildung ist durch die Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben und die zweite durch $q \to e^{2\pi i q}$. Die Gruppe $G = N/N'$ operiert auf $\mathbb{C}[M']$ durch

$$v \mapsto v \cdot t^{u'} := e^{2\pi i \langle u', v \rangle} \cdot t^{u'}$$

Wir definieren den Invariantenring

$$\mathbb{C}[M']^G := \{P \in \mathbb{C}[M'] \mid v \cdot P = P \text{ für alle} \, v \in G\}$$

Lemma 4.3. *Sei $N' \subset N$ ein Untergitter von endlichem Index, $M \subset M'$ die dualen Gitter und $G := N/N'$. Es gilt*

$$\mathbb{C}[M']^G \simeq \mathbb{C}[M]$$

Beweis. Wähle eine Basis $e_1, \dots, e_d$ von N, so daß $m_1 e_1, \dots, m_d e_d$ Erzeuger von N' sind mit $m_i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{C}[M'] = \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_d^\pm]$ und $\mathbb{C}[M] \simeq \mathbb{C}[w_1^\pm, \dots, w_d^\pm]$ mit $x_i^{m_i} = w_i$. Ein Element $v = (v_1, \dots, v_d) \in N/N' \simeq \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ operiert auf Monome durch:

$$x_1^{l_1} \dots x_d^{l_d} \mapsto e^{2\pi i \sum_{i=1}^d \frac{v_i l_i}{m_i}} x_1^{l_1} \dots x_d^{l_d}$$

d.h. das Monom $x_1^{l_1} \dots x_d^{l_d}$ ist invariant falls $l_i/m_i \in \mathbb{Z}$. □

Sei σ ein rationaler Kegel, der durch d linear unabhängige Vektoren erzeugt wird. Sei $N' \subset N$ das Untergitter, welches von den minimalen Elementen in $\sigma \cap N$ entlang der Kanten erzeugt wird. Dies gibt einen Kegel σ' in $N'_\mathbb{R}$ mit $\mathbb{C}^n = U_{\sigma'} \to U_\sigma$.

Satz 4.4. *Mit den Notationen von oben gilt:*

$$U_\sigma = U_{\sigma'}/G = \mathbb{C}^n/G$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus:

$$U_\sigma = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]) = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M']^G) = U_{\sigma'}/G$$

□

Allgemeiner gilt: Falls σ von $r \leq d$ linear unabhängigen Vektoren, die in N liegen, erzeugt wird (σ heißt dann **simplizialer Kegel**), dann ist U_σ das Produkt eines Quotienten wie oben und eines Torus.

Definition 4.5. *Ein Fächer Σ heißt simplizial, falls alle Kegel simplizial sind. Die zugehörige torische Varietät X_Σ heißt dann torische V-Mannigfaltigkeit (Orbifold).*

5 Limes Punkte

Definition 5.1. *Eine 1-Parameter Untergruppe von T ist ein Morphismus von algebraischen Varietäten*

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to T$$

der zusätzlich ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lemma 5.2. *Die* 1*-Parameter Untergruppen sind alle von der Gestalt*

$$\begin{aligned} \lambda_v : \mathbb{C}^* &\longrightarrow T = Hom_{hg}(M, \mathbb{C}) \\ z &\mapsto (u \mapsto z^{\langle u,v \rangle}) \end{aligned}$$

für $v \in N$.

Beweis. Sei λ ein Morphismus zwischen $\mathbb{C}^*$ und T. Auf der Ebene von $\mathbb{C}$-Algebren gibt dies einen Algebrenhomomorphismus $\Psi : \mathbb{C}[M] \to \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dann existieren $P, Q \in \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ mit $\Psi(t^u) = P$ und $\Psi(t^{-u}) = Q$, s.d. gilt $1 = \Psi(t^u) \cdot \Psi(t^{-u}) = P \cdot Q$. D.h. sowohl P als auch Q darf keine Nullstelle auf $\mathbb{C}^*$ haben, also $P = x^{k(u)}$ und $Q = x^{-k(u)}$. Weiterhin gilt

$$x^{k(u_1)+k(u_2)} = x^{k(u_1)} \cdot x^{k(u_2)} = \Psi(t^{u_1}) \cdot \Psi(t^{u_2}) = \Psi(t^{u_1+u_2}) = x^{k(u_1+u_2)}$$

Daraus folgt, daß λ bzw. Ψ durch eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $k = \langle \cdot, v \rangle \in Hom(M, \mathbb{Z}) = N$ bestimmt ist:

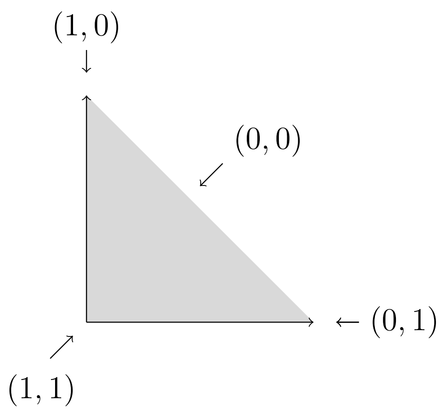
$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}[M] &\to \mathbb{C}[x, x^{-1}] \\ t^u &\mapsto x^{\langle u,v \rangle} \end{aligned}$$

Ist $z \in \mathbb{C}^*$, dann ist $\lambda_v(z)$ durch den Halbgruppenhomomorphismus $u \mapsto z^{\langle u,v \rangle}$ gegeben. $\square$

Sei Σ ein Fächer. Wir interessieren uns jetzt für die Existenz von Limiten $\lim_{z \to 0} \lambda_v(z)$ in X_Σ.

Beispiel 5.3. *Sei* Σ *der Fächer in* $N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{R}$ *mit dem maximalen Kegel* $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$. *Sei* $v = (v_1, v_2) \in N$. *Dann ist* λ_v *gegeben durch*

$$\begin{aligned} \lambda_v : \mathbb{C}^* &\longrightarrow (\mathbb{C}^*)^2 \\ z &\mapsto (z^{v_1}, z^{v_2}) \end{aligned} \tag{5.0.7}$$



Wenn $v \in \tau$, dann ist der Limes $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)$ *der Punkt* x_τ.

Wir haben oben für jeden Kegel τ in einem Fächer Σ einen ausgezeichneten Punkt x_τ in U_τ definiert. Wenn τ eine Seite von σ ist, dann ist U_τ in U_σ enthalten, daher wollen wir x_τ als Homomorphismus von S_σ nach $\mathbb{C}$ definieren. Der Homomorphismus ist:

$$\begin{aligned} S_\sigma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } u \in \tau^\perp \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Obige Abbildung ist wohldefiniert, da $\tau^\perp \cap \sigma^\vee$ eine Seite von $\sigma^\vee$ ist. Wir haben somit gezeigt, daß x_τ unabhängig von der Karte U_σ ist,d.h. wenn $\tau \prec \sigma \prec \gamma$, dann bildet die Inklusion $U_\sigma \hookrightarrow U_\gamma$ den Punkt x_τ definiert in U_σ zum Punkt x_τ definiert in U_γ.

Satz 5.4.

1. *Sei $v \in |\Sigma|$ und τ ein Kegel in Σ, der v in seinem relativen Inneren enthält, dann gilt* $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z) = x_\tau$.

2. *Ist v in keinem Kegel von σ enthalten, dann existiert* $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)$ *nicht in X_σ^{an}.*

Beweis. Wir beweisen zuerst 1.: Sei σ ein Kegel in Σ, der τ als Seite enthält. Der Punkt $\lambda_v(z)$ entspricht dem Homomorphismus $u \mapsto z^{\langle u,v\rangle}$. Für $u \in S_\sigma$ gilt $\langle u, v\rangle \geq 0$ und $\langle u, v\rangle = 0$ genau dann wenn $u \in \tau^\perp$. Daraus folt, daß für $z \to 0$ der Limes Homomorphismus dem Punkt x_τ entspricht.

Wir beweisen 2.: Wenn v nicht in σ enthalten ist, können wir ein $u \in \sigma^\vee$ wählen, so daß $\langle u, v\rangle < 0$ gilt (folgt beispielsweise aus Lemma 2.9). Es gilt dann $\lambda_v(z)(u) \to \infty$ für $z \to 0$, d.h der Limes existiert nicht in U_σ^{an}. □

6 Torus Wirkungen

Ist σ ein Kegel in N, dann operiert der Torus T_N auf U_σ,

$$T_N \times U_\sigma \to U_\sigma.$$

Ein Punkt $t \in T_N$ bzw. $x \in U_\sigma$ kann mit einer Abbildung $\psi_t \in Hom_{hg}(M, \mathbb{C})$ bzw. $\psi_x \in Hom_{hg}(S_\sigma, \mathbb{C})$ identifiziert werden. Das Produkt $t \cdot x \in U_\sigma$ wird dann durch $\psi_t \cdot \psi_x \in Hom_{hg}(S_\sigma, \mathbb{C})$ definiert. Die Abbildungen auf den Algebren ist durch

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[S_\sigma] &\longrightarrow \mathbb{C}[M] \otimes \mathbb{C}[S_\sigma] \\ t^u &\mapsto t^u \otimes t^u \end{aligned}$$

gegeben. Sei Σ ein Fächer mit Kegeln σ_1 und σ_2, dann ist die Torus Operation kompatibel mit der Abbildung $U_{\sigma_1\cap\sigma_2} \hookrightarrow U_{\sigma_1}$, d.h. wir bekommen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T_N \times U_{\sigma_1} \arrow[d] & T_N \times U_{\sigma_1\cap\sigma_2} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & T_N \times U_{\sigma_2} \arrow[d] \\
U_{\sigma_1} & U_{\sigma_1\cap\sigma_2} \arrow[l] \arrow[r] & U_{\sigma_2}
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt, daß der Torus auf der torischen Varietät X_Σ operiert.

$$T_N \times X_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma$$

Wir wollen jetzt die Orbits dieser Toruswirkung charakterisieren. In Kapitel 4 haben wir zu jedem Kegel σ in Σ einen ausgezeichneten Punkt x_σ definiert. Diese Punkte geben Torusorbits

$$O(\sigma) := T_N \cdot x_\sigma \subset X_\Sigma$$

Wir werden zeigen, daß dies schon alle Orbits liefert.

Sei σ ein Kegel in Σ und sei N_σ das Untergitter in N welches von $\sigma \cap N$ erzeugt wird. Sei

$$N(\sigma) = N/N_\sigma \qquad M(\sigma) = \sigma^\perp \cap M$$

das Quotientengitter und sein duales Gitter. Die Paarung $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ induziert eine nicht entartete Paarung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \sigma^\perp \cap M \times N(\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

welche folgenden Isomorphismus liefert

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = T_{N(\sigma)}$$

Lemma 6.1. *Sei σ ein endlich erzeugter, rationaler, strikt konvexer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$. Dann gilt*

$$O(\sigma) = \{\gamma \in Hom_{hg}(S_\sigma, \mathbb{C}) \mid \gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\} \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq T_{N(\sigma)}$$

Beweis. Die Menge $O' = \{\gamma \in Hom_{hg}(S_\sigma, \mathbb{C}) \mid \gamma(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \sigma^\perp \cap M\}$ enthält x_σ und ist invariant unter der Operation von T_N. Dies liefert $O(\sigma) \subset O'$. Die Einschränkung eines $\gamma \in O'$ auf $\sigma^\perp \cap M$ liefert einen Gruppenhomomorphismus $\hat{\gamma} : \sigma^\perp \cap M \to \mathbb{C}^*$. Umgekehrt liefert ein Gruppenhomomorphismus $\hat{\gamma} : \sigma^\perp \cap M \to \mathbb{C}^*$ einen Element in O' durch

$$\gamma(m) = \begin{cases} \hat{\gamma}(m) & \text{für } m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies zeigt $O' \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$.

Wir tensorieren die surjektive Abbildung $N \to N(\sigma)$ mit $\mathbb{C}^*$ und erhalten die Surjektion

$$T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow T_{N(\sigma)} = N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*)$$

Die Bijektionen

$$T_{N(\sigma)} \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*) \simeq O'$$

sind kompatibel mit der T_N-Wirkung, dass heißt T_N operiert transitiv auf O'. Das zeigt $O' = T_N \cdot x_\sigma = O(\sigma)$. $\square$

Theorem 6.2 (Orbit-Kegel Korrespondenz)**.** *Sei Σ ein Fächer in $N_{\mathbb{R}}$ und X_Σ die zugehörige torische Varietät. Es gilt:*

1. *Es gibt eine bijektive Korrespondenz*

$$\{Kegel\ \ \sigma\ \ in\ \ \Sigma\} \leftrightarrow \{T_N\text{-}Orbits\ in\ X_\Sigma\}$$
$$\sigma \leftrightarrow O(\sigma) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*)$$

2. *Sei $d = \dim N_{\mathbb{R}}$, dann ist $\dim O(\sigma) = n - \dim \sigma$.*

3. *Die affine Varietät U_σ ist folgende Vereinigung von Torus-Orbits*

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \prec \sigma} O(\tau)$$

4. *$\tau \prec \sigma$ genau dann wenn $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ und*

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \prec \sigma} O(\sigma)$$

wobei $\overline{O(\tau)}$ sowohl den Abschluß in der Zariski Topologie als auch in der analytischen Topologie bezeichnet.

Beweis. Sei O ein T_N-orbit in X_σ. Da X_Σ von den T_N-invarianten affinen Karten U_σ überdeckt werden und $U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ gilt, gibt es einen eindeutig bestimmten minimalen Kegel $\sigma \in \Sigma$ mit $O \subset U_\sigma$. Wir zeigen $O = O(\sigma)$.

Sei $\gamma \in O$ und $u_1, \ldots, u_s \in M$ minimale Erzeuger von $\sigma^\vee$. Wir können annehmen, daß $\gamma(u_1), \ldots, \gamma(u_k) \neq 0$ und $\gamma(u_{k+1}) = \ldots = \gamma(u_s) = 0$. Sei τ^* die minimale Seite die $u_1, \ldots, u_k$ enthält. Sei jetzt $u' \in (\sigma^\vee \setminus \tau^*) \cap M$, τ' der Kegel mit $u' \in Relint(\tau')$ und $u_{i_1}, \ldots, u_{i_l}$ die Erzeuger von τ'. Dann gibt es eine Linearkombination

$$u' = \lambda_{i_1} u_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_l} u_{i_l}$$

mit $\lambda_{i_j} \in \mathbb{Q}_{>0}$. Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \cdot \lambda_{i_j} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es gilt

$$\gamma(u')^p = \gamma(pu') = \gamma(p\lambda_{i_1} u_{i_1} + \ldots + p\lambda_{i_l} u_{i_l}) = \gamma(u_{i_1})^{p\lambda_{i_1}} \ldots \gamma(u_{i_l})^{p\lambda_{i_l}} = 0$$

da $\{k+1, \ldots, s\} \cap \{i_1, \ldots, i_l\} \neq \emptyset$, d.h. $\gamma(u') = 0$.

Die $u_1, \dots, u_k$ müssen eine Teilmenge der Erzeuger $u_{j_1}, \dots, u_{j_l}$ von τ^* sein, da ansonsten $u_1, \dots, u_s$ nicht minimal ist. Nehme an $u_1, \dots, u_k \subsetneq u_{j_1}, \dots, u_{j_l}$, dann gilt ähnlich wie oben für alle $u' \in Relint(\tau^*) \cap M$

$$\gamma(u')^p = \gamma(pu') = \gamma(p\lambda_{j_1} u_{j_1} + \ldots + p\lambda_{j_l} u_{j_l}) = \gamma(u_{i_1})^{p\lambda_{i_1}} \ldots \gamma(u_{i_l})^{p\lambda_{i_l}} = 0$$

Das ist aber nicht möglich, da τ^* die kleinste Seite ist, die $u_1, \dots, u_k$ enthält und damit der von $u_1, \dots, u_k$ erzeugte Kegel einen Punkt im Inneren von τ^* enthalten muss, d.h. die $u_1, \dots, u_k$ erzeugen τ^*.

Sei also $u' = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k \in \tau^* \cap M$.

$$\gamma(u')^p = \gamma(pu') = \gamma(p\lambda_1 u_1 + \ldots + p\lambda_k u_k) = \gamma(u_1)^{p\lambda_1} \ldots \gamma(u_k)^{p\lambda_k} \neq 0$$

Wir haben somit gezeigt, daß

$$\{u \in \sigma^\vee \cap M \mid \gamma(u) \neq 0\} = \tau^* \cap M = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$$

für eine Seite $\tau \subseteq \sigma$. Nach Lemma 3.11 folgt dann $\gamma \in U_\tau$. Da σ aber minimal gewählt wurde mit dieser Eigenschaft, folgt $\sigma = \tau$ somit

$$\{u \in \sigma^\vee \cap M \mid \gamma(u) \neq 0\} = \sigma^\perp \cap M$$

und damit $\gamma \in O(\sigma)$ nach Lemma 6.1. Daraus folgt aber $O = O(\sigma)$, da zwei Orbits entweder disjunkt oder gleich sind.

Die Aussage 2. folgt aus Lemma 6.1 und der Exaktheit der Sequenz $0 \to N_\sigma \to N \to N(\sigma) \to 0$.

3.): Da U_σ Torus invariant ist, ist es eine Vereinigung von Orbits. Der Beweis von 1.) zeigt dann, daß jeder Orbit von der Form $O(\tau) \subset U_\tau \subset U_\sigma$ für eine geeignete Seite σ ist.

4.) Sei $\overline{O(\tau)}^{an}$ der Abschluß von $O(\tau)$ in der analytischen Topologie. Indem man Folgen in $O(\tau)$ betrachtet, kann man leicht sehen, daß $\overline{O(\tau)}^{an}$ T_N-invariant und damit eine Vereinigung von Orbits ist. Nehme an, daß $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}^{an}$. Dann ist $O(\tau) \subset U_\sigma$, denn ansonsten wäre $O(\tau) \cap U_\sigma = \emptyset$, d.h. $\overline{O(\tau)}^{an} \cap U_\sigma = \emptyset$, da U_σ offen ist. Wegen 3. folgt dann $\tau \prec \sigma$.

Nehme nun an, daß $\tau \prec \sigma$. Um $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}^{an}$ zu beweisen, reicht es aus $\overline{O(\tau)}^{an} \cap O(\sigma) \neq \emptyset$ zu zeigen.

Für $x_\tau \in U_\tau$ bezeichnen wir mit ψ_{x_τ} den zugehörigen Halbgruppenhomomorphismus für den gilt

$$\psi_{x_\tau}(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u \in \tau^\perp \cap M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $v \in Relint(\sigma)$. Definiere für $z \in \mathbb{C}^*$

$$\gamma(t) := \lambda_v(z) \cdot x_\tau$$

Die zugehörige Familie von Halbgruppenhomomorphismen ist

$$u \mapsto z^{\langle u,v\rangle} \cdot \psi_{x_\tau}(u)$$

Wir haben $\gamma(z) \in O(\tau)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ da der Orbit von x_τ gleich $O(\tau)$ ist. Da für $v \in Relint(\sigma)$ $\langle u,v\rangle > 0$ für $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ und $\langle u,v\rangle = 0$ für $u \in \sigma^\perp$ gilt, existiert, wegen Satz 5.4 1., der Grenzwert $\lim_{z\to 0} \gamma(z)$ und ist gleich dem Punkt $x_\sigma \in O(\sigma)$. Das zeigt $\overline{O(\tau)}^{an} \cap O(\sigma) \neq \emptyset$ und damit die erste Behauptung in 4. sowie

$$\overline{O(\tau)}^{an} = \bigcup_{\tau \prec \sigma} O(\sigma)$$

Es bleibt zu zeigen, daß der analytische Abschluß gleich dem Zariski Abschluß ist. Der Schnitt von $\overline{O(\tau)}^{an}$ mit der affinen offenen Karte $U_{\sigma'}$ ist

$$\overline{O(\tau)}^{an} \cap U_{\sigma'} = \bigcup_{\tau \prec \sigma \prec \sigma'} O(\sigma)$$

Definiere ein Ideal $I \subset \mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M]$

$$I := \mathbb{C}[\big((\sigma')^\vee \setminus \tau^\perp\big) \cap M]$$

Wir wollen zeigen, daß $V(I) = \bigcup_{\tau \prec \sigma \prec \sigma'} O(\sigma)$. Es gilt

$$x \in V(I) \Leftrightarrow \psi_x(u) = 0 \quad \text{für} \quad u \in (\sigma')^\vee \cap M \text{ und } u \notin \tau^\perp$$

d.h. außerhalb von $\tau^\perp$ verschwindet $\psi_x \in Hom_{hg}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C})$. Sei andererseits $x \in O(\sigma)$ für ein σ mit $\tau \prec \sigma \prec \sigma'$, d.h. $\psi_x \in Hom_{hg}(\sigma^\vee \cap M)$. Da $\sigma^\perp \subset \tau^\perp$ gilt insbesondere $\psi_x(u) = 0$ für $u \notin \tau^\perp$. Daher folgt $V(I) = \bigcup_{\tau \prec \sigma \prec \sigma'} O(\sigma)$. Da jede Zariski abgeschlossene Menge auch analytisch abgeschlossen ist, folgt, daß $V(I)$ die kleinste abgeschloßene Menge in der Zariski Topologie ist, die $O(\tau)$ enthält und daher ihr Zariski Abschluß ist. $\square$

Sei Σ ein Fächer in $N_\mathbb{R}$ und $\tau \in \Sigma$. Betrachte die Quotientenabbildung

$$N_\mathbb{R} \longrightarrow N(\tau)_\mathbb{R}$$

Für $\sigma \in \Sigma$ mit $\tau \prec \sigma$ bezeichnen wir mit $\overline{\sigma}$ das Bild in $N(\tau)_\mathbb{R}$, welches wieder ein rationaler endlich erzeugter Kegel ist ($\rightarrow$ Übung).

Lemma 6.3. *Die Menge*

$$Star(\tau) = \{\overline{\sigma} \subset N(\tau)_\mathbb{R} \mid \tau \prec \sigma \in \Sigma\}$$

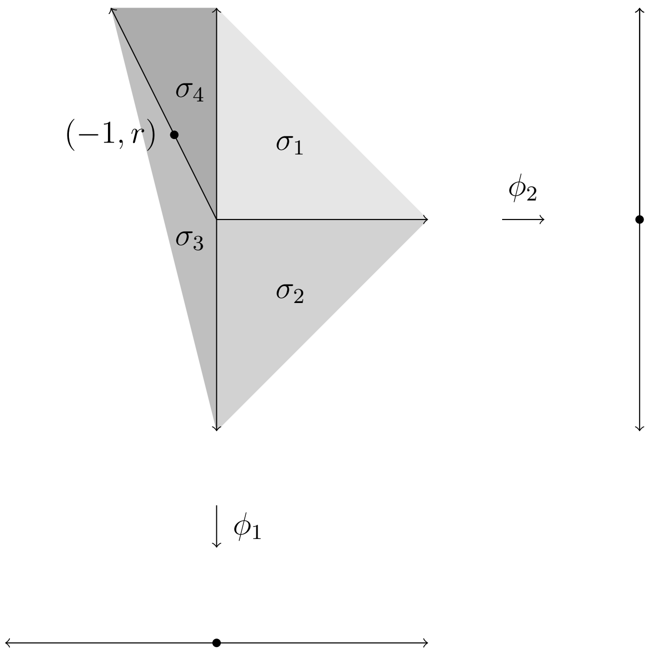
ist ein Fächer in $N(\tau)_\mathbb{R}$.

Satz 6.4. *Sei* Σ *ein Fächer und* $\tau \in \Sigma$, *dann ist der Abschluß* $V(\tau) := \overline{O(\tau)}$ *isomorph zur torischen Varietät* $X(Star(\tau))$.

7 Torische Abbildungen

Definition 7.1. *Seien N_1 und N_2 Gitter und Σ_1 bzw. Σ_2 Fächer in $(N_1)_\mathbb{R}$ bzw. $(N_2)_\mathbb{R}$. Eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\overline{\phi} : N_1 \to N_2$ ist* ***kompatibel*** *mit den Fächern Σ_1 and Σ_2, falls für jeden Kegel $\sigma_1 \in \Sigma_1$ ein Kegel $\sigma_2 \in \Sigma_2$ existiert, so daß $\overline{\phi}_\mathbb{R}(\sigma_1) \subset \sigma_2$.*

Beispiel 7.2. *Sei $N_1 = \mathbb{Z}^2$ mit Basis e_1 und e_2 und Σ_r der folgende Fächer*



Die zugehörige torische Varietät heißt die r-te Hirzebruchfläche. Die Abbildung ϕ_1 ist kompatibel, die Abbildung ϕ_2 ist nicht kompatibel, da $\overline{(\phi_2)}_\mathbb{R}(\sigma_3)$ in keinem Kegel liegt.

Definition 7.3. *Seien X_{Σ_1} bzw. X_{Σ_2} torische Varietäten mit Fächern Σ_1 in $(N_1)_\mathbb{R}$ bzw. Σ_2 in $(N_2)_\mathbb{R}$. Ein Morphismus $\phi : X_{\Sigma_1} \to X_{\Sigma_2}$ heißt torisch, falls ϕ den Torus $T_{N_1} \subset X_{\Sigma_1}$ in den Torus $T_{N_2} \subset X_{\Sigma_2}$ abbildet.*

Satz 7.4. *Sei $\overline{\phi} : N_1 \to N_2$ eine kompatible $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung. Dann gibt es eine torische Abbildung $\phi : X_{\Sigma_1} \to X_{\Sigma_2}$, so daß $\phi_{|T_{N_1}}$ folgende Abbildung ist:*

$$\overline{\phi} \otimes id : T_{N_1} = Hom_{hg}(M_1, \mathbb{C}^*) = N_1 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \longrightarrow N_2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* = Hom_{hg}(M_2, \mathbb{C}^*) = T_{N_2}$$

Beweis. Sei σ_1 ein Kegel in Σ_1. Da $\overline{\phi}$ kompatibel ist, gibt es einen Kegel σ_2 in Σ_2 mit $\overline{\phi}(\sigma_1) \subset \sigma_2$. Die duale Abbildung gibt: $\overline{\phi}^\vee : \sigma_2^\vee \to \sigma_1^\vee$ und damit eine Abbildung $\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] \to \mathbb{C}[S_{\sigma_1}]$, also eine Abbildung zwischen affinen torischen Varietäten $\phi_{\sigma_1} : U_{\sigma_1} \to U_{\sigma_2}$. Sind zwei Kegel σ_1, γ_1 in Σ_1 gegeben, dann existieren Kegel σ_2, γ_2 in Σ_2, so daß die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd} \sigma_1 \arrow[d] & \sigma_1 \cap \gamma_1 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \gamma_1 \arrow[d] \\ \sigma_2 & \sigma_2 \cap \gamma_2 \arrow[l] \arrow[r] & \gamma_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U_{\sigma_1} \arrow[d] & U_{\sigma_1} \cap U_{\gamma_1} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & U_{\gamma_1} \arrow[d] \\ U_{\sigma_2} & U_{\sigma_2} \cap U_{\gamma_2} \arrow[l] \arrow[r] & U_{\gamma_2} \end{tikzcd}$$

das heißt wir können die Abbildungen ϕ_σ verkleben und erhalten eine Abbildung $\phi : X_{\Sigma_1} \to X_{\Sigma_2}$. Die Abbildung $\overline{\phi}$ bildet den Kegel $\{0\} \subset (N_1)_\mathbb{R}$ in den Kegel $\{0\} \subset (N_2)_\mathbb{R}$ ab. Der zugehörige Monoid Homomorphismus $M_2 \to M_1$ induziert dann die Abbildung $Hom_{hg}(M_1, \mathbb{C}^*) = N_1 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* \longrightarrow N_2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^* = Hom_{hg}(M_2, \mathbb{C}^*)$. □

8 Kompakte torische Varietäten

In diesem Kapitel wird eine kompakte torische Varietät anhand ihres Fächers charakterisiert.

Definition 8.1. *1. Der **Träger** eines Fächers Σ ist die Menge*

$$\mid \Sigma \mid = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$$

*2. Ein Fächer Σ heißt **vollständig**, falls sein Träger ganz $N_\mathbb{R}$ ist, d.h.*

$$\mid \Sigma \mid = N_\mathbb{R}$$

Satz 8.2. *Sei X_Σ eine torische Varietät. Folgende Aussagen sind äquivalent*

1. *X_Σ^{an} ist kompakt.*
2. *Der Limes $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)$ existiert für alle $v \in N$.*
3. *Der Fächer Σ ist vollständig.*

Beweis. 1 ⇒ 2: Sei $v \in N$ und (z_k) eine Folge in $\mathbb{C}^*$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k \to 0$. Da X_Σ^{an} kompakt ist, hat die Folge $\lambda_v(z_k)$ eine konvergente Teilfolge $\lambda_v(z_{k_i})$ mit $\lim_{i\to\infty} \lambda_v(z_{k_i}) = \gamma \in X_\Sigma^{an}$. Da X_Σ^{an} die Vereinigung von affinen torischen Varietäten ist, gibt es einen Kegel σ, so daß $\gamma \in U_\sigma$. Sei $u \in \sigma^\vee \cap M$. Das Element $t^u \in \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ gibt eine Abbildung $t^u : U_\sigma^{an} \to \mathbb{C}$. Es gilt

$$t^u(\gamma) = \lim_{i\to\infty} t^u(\lambda_v(z_{k_i})) = \lim_{i\to\infty} z_{k_i}^{\langle u,v\rangle}$$

Da $z_k \to 0$ muss $\langle u, v\rangle \geq 0$ für alle $u \in \sigma^\vee \cap M$ gelten und daher auch $\langle u, v\rangle \geq 0$ für alle $u \in \sigma^\vee$. Das heißt $v \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. Satz 5.4 zeigt dann, daß $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)$ in U_σ^{an} (und damit in X_Σ^{an}) existiert.

2 ⇒ 3: Sei $v \in N$. Betrachte den Limes $\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)$. Da die U_σ^{an} den Raum X_Σ^{an} überdecken, existiert ein σ, so daß U_σ^{an} den Limes enthält. Aus Satz 5.4 folgt dann, daß $v \in \sigma \cap N$. Also ist jeder Punkt in $N \subset N_\mathbb{R}$ in einem Kegel von Σ enthalten und daher ist Σ vollständig.

$3 \Rightarrow 1$: Wir beweisen die Aussage per Induktion nach $d = \dim N_{\mathbb{R}}$. Im Fall $d = 1$ gibt es nur einen einzigen vollständigen Fächer, nämlich der Fächer mit zwei maximalen Kegeln, die von 1 und -1 aufgespannt werden. Die zugehörige torische Varietät $\mathbb{P}^1 \approx S^2$ ist kompakt.

Nehme an die Aussage gilt für alle vollständigen Fächer der Dimension $< d$ und sei Σ ein vollständiger Fächer in $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^d$. Sei (γ_k) ein Folge in X_{Σ}^{an}. Wir zeigen, daß (γ_k) eine konvergente Teilfolge hat. Dies ist ausreichend, da X_{Σ}^{an} die Vereinigung von endlich vielen affinen torischen Varietäten U_{σ}^{an} ist, deren analytische Topologie von einer Metrik induziert wird, und wir oBdA annehmen können, daß die Folge vollständig in einem U_{σ}^{an} enthalten ist.

Desweiteren kann man annehmen, daß (γ_k) in einem Torusorbit $O(\tau)$ enthalten ist (da X_{Σ}^{an} die Vereinigung von endlich vielen dieser Orbits ist). Falls $\tau \neq \{0\}$ ist, dann ist der Abschluß von $O(\tau)$ in X_{Σ}^{an} die torische Varietät $V(\tau) = X_{Star(\tau)}^{an}$ der Dimension $\leq d-1$. Da Σ vollständig ist, ist kann man leicht sehen, daß $Star(\tau)$ auch vollständig in $N(\tau)_{\mathbb{R}}$ ist. Die Induktionsannahme zeigt dann, daß (γ_k) eine konvergente Teilfolge hat. Sei also $\tau = \{0\}$, d.h. die Folge liegt im Torus $T_N^{an} \subset X_{\Sigma}^{an}$.

Für $\gamma \in T_N^{an} \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$ betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} L(\gamma) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \log |\gamma(u)| \end{aligned}$$

Da $L(\gamma)$ ein Homomorphismus ist, gilt $L(\gamma) \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R})$. Wir wenden jetzt die Abbildung L auf die Folge (γ_k) an. Da Σ vollständig ist, können wir annehmen, indem wir eine Teilfolge betrachte , daß $L(\gamma_k) \in -\sigma$ ist für ein geeignetes $\sigma \in \Sigma$. Für $u \in \sigma^\vee \cap M$ gilt dann

$$\log |\gamma_k(u)| = \langle u, L(\gamma_k) \rangle \leq 0$$

Insbesondere gilt dann $|\gamma_k(u)| \leq 1$ für alle $u \in \sigma^\vee \cap M$. Das heißt für alle $u \in \sigma^\vee \cap M$ existiert eine konvergente Teilfolge (γ_{k_l}) (möglicherweise abhängig von u), so daß $\gamma_{k_l}(u)$ konvergiert. Da $\sigma^\vee$ ein endlich erzeugter Kegel ist, können wir eine konvergente Teilfolge (γ_{k_j}) finden, die für alle $u \in \sigma^\vee \cap M$ konvergiert, das heißt

$$\gamma_{k_j\,|\sigma^\vee \cap M} \to \gamma \in Hom_{hg}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) \simeq U_\sigma\,.$$

$\square$

9 Divisoren

Definition 9.1. *Sei X eine irreduzible Varietät. Der* ***Funktionenkörper*** *von X ist*

$$\mathbb{C}(X) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid U \text{ Zariski offen und } f \text{ reguläre Funktion}\}/\sim$$

wobei $f \sim g$ falls $f_{|V} = g_{|V}$ für eine Zariski offene Umgebung V.

Definition 9.2. *Ein Primdivisor $D \subset X$ ist eine irreduzible Untervarietät von X mit $codim(D) = 1$.*

Im weiteren Verlauf nehmen wir an, daß X normal ist. Zu einem gegebenen Primdivisor definieren wir den Ring $\mathcal{O}_{X,D} \subset \mathbb{C}(X)$ als

$$\mathcal{O}_{X,D} := \{\phi \in \mathbb{C}(X) \mid \phi \text{ definiert auf } U \subset X \text{ mit } U \cap D \neq 0\}$$

Da wir X als irreduzibel angenommen haben gilt $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(U)$ für Zariski offenes $U \neq \emptyset$ und daher auch $\mathcal{O}_{X,D} = \mathcal{O}_{U,U\cap D}$. Insbesondere können wir $U = \operatorname{Spec}(R)$ als affin annehmen.
Ein Primdivisor ist dann die Verschwindungsmenge eines Primideals $\mathfrak{p}$ der Höhe 1. Eine Funktion $\phi = f/g \in K = Frac(R)$ ist dann auf einer Zariski offenen Teilemenge von D definiert, falls $g \notin I(D) = \mathfrak{p}$. Der Ring $\mathcal{O}_{X,D}$ hat dann folgende Beschreibung:

$$\mathcal{O}_{X,D} = \{f/g \in K \mid f, g \in R,\ g \notin \mathfrak{p}\} = R_\mathfrak{p}$$

Da $R_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung eines normalen Ringes ist, ist $R_\mathfrak{p}$ selbst normal. Da weiterhin $R_\mathfrak{p}$ Dimension 1 hat, ist er ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung

$$\nu_D : K^* = Frac(R_\mathfrak{p})^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Definition 9.3. *Sei $Div(X)$ die von den Primdivisoren erzeugte freie abelsche Gruppe. Ein **Weil**-Divisor ist ein Element von $Div(X)$.*

Wir ordnen jetzt jeder rationalen Funktion $f \in \mathbb{C}(X)^*$ einen Weil-Divisor zu.

Definition 9.4. *Sei X eine normale Varietät. Der Divisor von $f \in \mathbb{C}(X)^*$ ist*

$$div(f) = \sum_D \nu_D(f) D$$

*Der Divisor $div(f)$ heißt auch **Haupt**-Divisor. Wir bezeichnen die Menge aller Hauptdivisoren mit $Div_0(X)$.*

Definition 9.5. *Ein Weil-Divisor auf einer normalen torischen Varietät X heißt **Cartier**, wenn er lokal ein Haupt-Divisor ist, d.h. wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ gibt, s.d. $D_{|U_i} = div(f_i)_{|U_i}$ gilt.*

Es ist einfach zu sehen, daß die Cartier-Divisoren eine Untergruppe $CDiv(X)$ bilden. Zusammenfassend gilt

$$Div_0(X) \subset CDiv(X) \subset Div(X)$$

Definition 9.6. *Sei X eine normale Varietät. Die **Klassengruppe** von X ist*

$$Cl(X) = Div(X)/Div_0(X)$$

*Die **Picard-Gruppe** von X ist*

$$Pic(X) = CDiv(X)/Div_0(X)$$

Wir brauchen folgende Aussagen

Proposition 9.7. *1. Sei R ein faktorieller Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$, dann gilt*

$$Cl(X) = 0$$

2. Sei $\emptyset \neq U \subset X$ eine Zariski offene Menge einer normalen Varietät X und $D_1, \ldots, D_s$ die irreduziblen Komponenten von $X \setminus U$ der Kodimension 1. Dann ist die Sequenz

$$\bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}D_j \longrightarrow Cl(X) \longrightarrow Cl(U) \longrightarrow 0$$

exakt.

Sei jetzt X_Σ eine torische Varietät mit Fächer Σ. Die 1-dimensionalen Kegel $\rho \in \Sigma(1)$ korrespondieren zu Orbits $O(\rho)$ der Kodimension 1, deren Abschluß

$$D_\rho := V_\rho = \overline{O(\rho)}$$

ein T_N-invarianter Primdivisor auf X_Σ ist. Wir erhalten einen diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{X_\Sigma, D_\rho}$ mit Bewertung

$$\nu_\rho : \mathbb{C}(X_\Sigma)^* \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

Für jedes $m \in M$ erhalten wir ein Monom $t^m : T_N \to \mathbb{C}^*$ und daher eine rationale Funktion in $\mathbb{C}(X_\Sigma)^*$.

Lemma 9.8. *Sei X_Σ eine torische Varietät mit Fächer Σ. Sei $\rho \in \Sigma(1)$ mit minimalen Erzeuger $u_\rho \in N$, dann gilt*

$$\nu_\rho(t^m) = \langle m, u_\rho \rangle$$

Beweis. Da $u_\rho \in N$ primitiv ist, können wir u_ρ zu einer Basis $e_1 = u_\rho, e_2, \ldots, e_d$ ergänzen. Die zu ρ gehörende affine Varietät ist

$$U_\rho = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[x_1, x_2^\pm, \ldots, x_d^\pm]) = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^{d-1}$$

und $D_\rho = U_\rho$ ist gegeben durch $x_1 = 0$. Der Ring $\mathcal{O}_{X_\Sigma, D_\rho}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma, D_\rho} = \mathcal{O}_{U_\rho, U_\rho \cap D} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]_{(x_1)}$$

Das Element $f \in \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)^*$ hat die Bewertung $\nu_p(f) = l \in \mathbb{Z}$ falls

$$f = x_1^l \frac{g}{h} \qquad g, h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d] \setminus (x_1)$$

Für ein gegebenes $m \in M$ haben wir

$$t^m = t_1^{\langle m, e_1 \rangle} t_2^{\langle m, e_2 \rangle} \ldots t_d^{\langle m, e_d \rangle} = t_1^{\langle m, u_\rho \rangle} t_2^{\langle m, e_2 \rangle} \ldots t_d^{\langle m, e_d \rangle}$$

Dies gibt $\nu_\rho(t^m) = \langle m, u_\rho \rangle$. $\square$

Wir berechnen jetzt für ein Monom t^m den zugehörigen Hauptdivisor.

Proposition 9.9. *Sei $m \in M$. Der Hauptdivisor $div(t^m)$ ist durch*

$$div(t^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho$$

gegeben.

Beweis. Die Orbit-Kegel Korrespondenz zeigt, daß die D_ρ die irreduziblen Komponenten von $X_\Sigma \setminus T_N$ sind. Da t^m auf dem Torus T_N definiert ist und dort ungleich null ist, ist der Support von $div(t^m)$ in $\bigcup_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho$ enthalten. Daher gilt

$$div(t^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} v_\rho(t^m) D_\rho$$

Da $\nu_\rho(t^m) = \langle m, u_\rho \rangle$ folgt die Behauptung. $\square$

Die Orbit-Kegel Korrespondenz zeigt, daß Divisoren von der Gestalt

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho$$

genau die T_N-invarianten Divisoren sind. Wir definieren

$$Div_{T_N}(X_\Sigma) = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} D_\rho \subset Div(X_\Sigma)$$

Theorem 9.10. *Die folgende Sequenz ist exakt*

$$M \longrightarrow Div_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

wobei die linke Abbildung durch $m \mapsto div(t^m)$ gegeben ist. Die Sequenz ist eine kurze exakte Sequenz genau dann wenn $\{u_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$ den Vektorraum $N_\mathbb{R}$ aufspannt.

Beweis. Da D_ρ die irreduziblen Komponenten von $X_\Sigma \setminus T_N$ sind, haben wir nach Proposition 9.7 2. die exakte Sequenz

$$Div_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(T_N) \longrightarrow 0$$

Da $T_N = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[M])$ und $\mathbb{C}[M] \simeq \mathbb{C}[t_1^\pm, \dots, t_d^\pm]$ ein faktorieller Ring ist gilt nach Proposition 9.7 1., daß $Cl(T_N) = 0$, d.h. $Div_{T_N}(X_\Sigma) \to Cl(X_\Sigma)$ is surjektiv. Die zusammengesetzte Abbildung $M \to Div_{T_N}(X_\Sigma) \to Cl(X_\Sigma)$ ist offensichtlich gleich null, da $m \to div(t^m)$ und Hauptdivisoren in $Cl(X_\Sigma)$ verschwinden. Sei jetzt umgekehrt $D \in Div_{T_N}(X_\Sigma)$ ein Weil-Divisor, der in $Cl(X_\Sigma)$ verschwindet, dann gilt $D = div(f)$ für ein $f \in \mathbb{C}(X_\Sigma)^*$. Da der Support von $div(f)$ im Komplement von T_N liegt, ist f auf

T_N eine invertierbare Funktion, d.h. $f \in \mathbb{C}[M]^*$. Wegen Lemma 9.11 folgt $f = ct^m$ für ein $c \in \mathbb{C}^*$ und $m \in M$. Auf X_Σ gilt dann

$$D = div(f) = div(ct^m) = div(t^m)$$

das heißt die Sequenz ist exakt.

Sei nun $m \in M$ gegeben, so daß $div(t^m) = \sum \langle m, u_\rho \rangle D_\rho = 0$, d.h. $\langle m, u_\rho \rangle = 0$ für alle $\rho \in \Sigma(1)$. Nehme an die u_ρ spannen $N_\mathbb{R}$ auf, dann folgt $m = 0$, d.h. die Sequenz ist exakt. Falls die u_ρ $N_\mathbb{R}$ nicht aufspannen, ist der Annihilator ihres Spans in $N_\mathbb{R}$ ungleich null, d.h. die Sequenz ist nicht exakt. □

Lemma 9.11. *Sei $f \in \mathbb{C}[M]^*$, dann gilt $f = ct^m$ für $c \in \mathbb{C}^*$ und $m \in M$.*

Beweis. Sei $f = \frac{h_1}{(t_1 \dots t_d)^n}$. Es gibt $g = \frac{h_2}{(t_1 \cdots _d)^m} \in \mathbb{C}[M]^*$ mit

$$1 = f \cdot g = \frac{h_1 \cdot h_2}{(t_1 \dots t_d)^{n+m}}$$

Also $h_1 \cdot h_2 = (t_1 \dots t_d)^{n+m}$. Daraus folgt aber (aus Gradgünden), daß h und g Monome sein müssen. □

Beispiel 9.12. *Sei σ der Kegel in $\mathbb{R}^2$ der durch $u_1 = de_1 - e_2$ und $u_2 = e_2$ erzeugt wird. Sei m_1, m_2 die duale Basis in M, d.h. $m_i(e_j) = \delta_{ij}$. Es gilt*

$$\begin{aligned} div(t^{m_1}) &= \langle m_1, u_1 \rangle D_1 + \langle m_1, u_2 \rangle D_2 = dD_1 \\ div(t^{m_2}) &= \langle m_2, u_1 \rangle D_1 + \langle m_2, u_2 \rangle D_2 = -D_1 + D_2 \end{aligned}$$

Die exakte Sequenz ist dann

$$M \simeq \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{A} Div_{T_N}(U_\sigma) \simeq \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

wobei die Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} d & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Sei

$$CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \subset Div_{T_N}(X_\Sigma)$$

die Gruppe der T_N-invarianten Divisoren.

Korollar 9.13. *Die folgende Sequenz ist exakt*

$$M \longrightarrow CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0$$

Die Sequenz ist eine kurze exakte Sequenz genau dann wenn $\{u_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$ den Vektorraum $N_\mathbb{R}$ aufspannt.

Beweis. Sei D ein Cartier-Divisor der $L \in Pic(X_\Sigma)$ repräsentiert. Da auf X_Σ jeder Cartier Divisor ein Weil-Divisor ist, gilt wegen Theorem 9.10

$$D \sim \sum_\rho a_\rho D_\rho$$

Da D Cartier ist, ist auch $\sum_\rho a_\rho D_\rho$ Cartier, d.h. $\sum_\rho a_\rho D_\rho \in CDiv_{T_N}(X_\Sigma)$. Dies zeigtdie Surjektivität der rechten Abbildung. Die Exaktheit in der Mitte folgt aus Theorem 9.10. □

Wir möchten jetzt Cartier-Divisoren charakterisieren. Dafür brauchen wir einige vorbereitende Lemmata.

Lemma 9.14. *Sei G eine Gruppe und $X^*(G)$ die algebraischen Homomorphimen von G nach $\mathbb{C}^*$. Dann ist $X^*(G)$ eine linear unabhängige Teilmenge in $Map(G, \mathbb{C})$.*

Beweis. Sei $\chi_1, \ldots, \chi_n \in X^*(G)$ paarweis disjunkt, linear abhängig und n minimal mit dieser Eigenschaft. Dann existieen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}^*$ so daß

$$\chi_n = \lambda_1\chi_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\chi_{n-1}$$

Da $\chi_1 \neq \chi_n$ existiert $\beta \in G$ mit $\chi_1(\beta) \neq \chi_n(\beta)$. Es gilt sowohl

$$\chi_n(\alpha)\chi_n(\beta) = (\lambda_1\chi_1(\alpha) + \ldots + \lambda_{n-1}\chi_{n-1}(\alpha))\chi_n(\beta)$$

als auch

$$\chi_n(\alpha\beta) = (\lambda_1\chi_1(\alpha)\chi_1(\beta) + \ldots + \lambda_{n-1}\chi_{n-1}(\alpha)\chi_{n-1}(\beta))$$

Da $\chi_n(\alpha\beta) = \chi_n(\alpha)\chi_n(\beta)$ folgt

$$\lambda_1(\chi_1(\beta) - \chi_n(\beta))\chi_1 + \ldots + \lambda_{n-1}(\chi_1(\beta) - \chi_n(\beta))\chi_{n-1} = 0$$

im Widerspruch zur Wahl von n. □

Lemma 9.15. *Für $G = T_N = \mathrm{Specm}\,(\mathbb{C}[M])$ gilt $X^*(T) = \{t^m \mid m \in M\}$.*

Beweis. Die Inkulsion $\supset$ ist klar. Die andere Inklusion folgt aus der Tatsache, daß ein $f \in X^*(T)$ in $\mathbb{C}[M]^*$ liegt, aus Lemma 9.11 und $f(1) = 1$. □

Lemma 9.16. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\pi : T \times V \to V$ eine algebraische und lineare Wirkung von T auf V (eine algebraische Darstellung von T). Sei*

$$V_\chi := \{v \in V \mid \pi(g)v = \chi(g)v, \ \ \forall g \in T\}$$

Dann gilt

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_\chi$$

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Für $g \in T$ bezeichnen wir mit $\pi_{ij}(g)$ die Matrix von $\pi(g)$ bzgl. $\mathcal{B}$. Da die Operation algebraisch ist gilt $\pi_{ij} \in \mathcal{O}_T(T) = \mathbb{C}[M]$, d.h π_{ij} ist eine Linearkombination von Charakteren. Wir haben somit folgende Darstellung:

$$\pi(g) = \sum_{\chi \in X^*(T)} \chi(g) u_\chi$$

wobei $u_\chi \in End(V)$. Für $g, h \in T$ gilt

$$\sum_{\chi^*(T)} \chi(g)\chi(h)u_\chi = \pi(gh) = \pi(g)\pi(h) = \sum_{\chi,\chi' \in X^*(T)} \chi(g)\chi'(h)u_\chi \circ u\chi'$$

Wende jetzt Lemma 9.14 auf die Gruppe $T \times T$ an. Indem wir Komponenten (i, j) bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ vergleichen,

$$\sum_{\chi^*(T)} \chi(g)\chi(h)(u_\chi)_{ij} = \sum_{\chi,\chi' \in X^*(T)} \chi(g)\chi'(h)(u_\chi \circ u_{\chi'})_{ij}$$

sehen wir, daß $(u_\chi \circ u_{\chi'})_{ij} = 0$ für $\chi \neq \chi'$ und $(u_\chi \circ u_\chi)_{ij} = (u_\chi)_{ij}$, also $u_\chi \circ u_{\chi'} = 0$ und $u_\chi \circ u_\chi = u_\chi$.

Andererseits gilt

$$\sum_{\chi \in X^*(T)} u_\chi = \pi(e) = id_V$$

d.h. wenn wir $W_\chi = u_\chi(V)$ definieren folgt aus $u_\chi \circ u_{\chi'} = 0$ und $u_\chi \circ u_\chi = u_\chi$.

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} W_\chi$$

Für $v \in M_\chi$ gilt $u_\chi(v) = v$ und

$$\pi(g)v = \left(\sum_{\chi' \in X^*(T)} \chi'(g)u_{\chi'} \right) \circ u_\chi(v) = \chi(g)u_\chi^2(v) = \chi(g)v$$

also $W_\chi = V_\chi$. $\square$

Betrachte die Toruswirkung $T \times U_\sigma \to U_\sigma$. Für festes $g \in T$ gibt die Abbildung

$$\begin{aligned} l_g : U_\sigma &\longrightarrow U_\sigma \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Die entsprechende Rechtsoperation auf dem Koordinatenring $\mathbb{C}[S_\sigma]$ ist dann

$$\begin{aligned} l_g^\sharp : \mathbb{C}[S_\sigma] &\longrightarrow \mathbb{C}[S_\sigma] \\ f &\mapsto f \circ l_g \end{aligned}$$

Lemma 9.17. *Sei $A \subset \mathbb{C}[M]$ ein $\mathbb{C}$-Unterverktorraum der stabil unter der T_N-Wirkung ist. Dann gilt*

$$A = \bigoplus_{t^m \in A} \mathbb{C} \cdot t^m$$

Beweis. Sei $A' := \bigoplus_{t^m \in A} \mathbb{C} \cdot t^m \subset A$. Es bleibt $A \subset A'$ zu zeigen. Sei $0 \neq f \in A$. Da $A \subset \mathbb{C}[M]$ können wir f folgendermaßen schreiben

$$f = \sum_{m \in I} c_m t^m \tag{9.0.8}$$

wobei $I \subset M$ endlich ist und $c_m \neq 0$ für alle $m \in I$. Dann gilt $f \in B \cap A$, wobei

$$B = Span(t^m \mid m \in I) \subset \mathbb{C}[M]$$

Da die t^m Homomorphismen von $(\mathbb{C}^*)^d$ nach $\mathbb{C}^*$ sind, gilt $t^m(g \cdot x) = t^m(g) \cdot t^m(x)$, d.h. B und damit auch $B \cap A$ sind stabil unter der T_N-Wirkung. Aus Lemma 9.16 folgt dann daß $B \cap A$ durch simultane Eigenvektoren der T_N-Wirkung aufgespannt wird. Da aber $B \cap A \subset \mathbb{C}[M]$ und für $\mathbb{C}[M]$ die Charaktere t^m eine Basis von Eigenvektoren darstellen, folgt daß $B \cap A$ von Charakteren die in $B \cap A$ liegen aufgespannt wird, d.h. $f \in A'$. □

Proposition 9.18. *Sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ein strikt konvexer, rationaler, endlich erzeugter Kegel. Es gilt*

1. *Jeder T_N-invariante Cartier Divisor auf U_σ hat die Form $div(t^m)$ für ein $m \in M$.*
2. *$Pic(U_\sigma) = 0$.*

Beweis. Sei $R = \mathbb{C}[S_\sigma]$ und $K = Frac(R)$. Sei $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ ein T_N-invarianter, effektiver, Cartier Divisor. Die Menge

$$I = \{f \in K \mid f = 0 \text{ oder } f \neq 0 \text{ und } div(f) \geq D\}$$

ist in R enthalten, da

$$R = \bigcap_{codim \mathfrak{p} = 1} R_{\mathfrak{p}}$$

gilt. Für $g \in R$ gilt $div(fg) = div(f) + div(g) \geq div(f) \geq D$. Das heißt I ist ein Ideal in R. Da der Divisor D invariant unter der T_N-Wirkung ist, ist auch I invariant. Nach Lemma 9.17 gilt:

$$I = \bigoplus_{t^m \in I} \mathbb{C} \cdot t^m = \bigoplus_{div(t^m) \geq D} \mathbb{C} \cdot t^m \tag{9.0.9}$$

Für $\rho \in \sigma(1)$ gibt die Orbit-Kegel Korrespondenz (Theorem 6.2 4.) die Einbettung $O(\sigma) \to \overline{O(\rho)} = D_\rho$. Sei $p \in O(\sigma)$. Da D Cartier ist, existiert eine Umgebung U von p so daß $D_{|U} = div(f)_{|U}$ für ein $U \in \mathbb{C}(U_\sigma)^*$. Wir können oBdA annehmen, daß

$U = D(h) = \mathrm{Specm}\,(R_h)$ für ein $h \in R$ mit $h(p) \neq 0$. Da D effektiv ist, gilt $f \in R_h$ und da h auf U invertierbar ist können wir sogar $f \in R$ annehmen. Es gilt

$$div(f) = \sum_\rho \nu_{D_\rho}(f) D_\rho + \sum_{E \neq D_\rho} \nu_E(f) E \geq \sum_\rho \nu_{D_\rho}(f) D_\rho = D.$$

wobei $\sum_{E \neq D_\rho}$ die Summe über alle Prim Divisoren ungleich D_ρ ist. Das größer-gleich Zeichen folgt, da $f \in R$ und das letzte Gleichheitszeichen folgt aus

$$D_{|U} = div(f)_{|U} \tag{9.0.10}$$

und $p \in U \cap D_\rho$ für alle $\rho \in \sigma(1)$. Das zeigt $f \in I$, da $div(f) \geq D$. Wegen Formel (9.0.9) können wir f folgendermaßen schreiben:

$$f = \sum_i a_i t^{m_i}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}^*$ und $div(t^{m_i}) \geq D$. Die Einschränkung nach U liefert dann $div(t^{m_i})_{|U} \geq div(f)_{|U}$, d.h. t^{m_i}/f ist eine reguläre Funktion auf U. Es gilt

$$1 = \frac{\sum_i a_i t^{m_i}}{f} = \sum_i a_i \frac{t^{m_i}}{f}$$

Da $p \in U$ ist, gilt $(t^{m_i}/f)(p) \neq 0$ für ein i. Das heißt es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von p auf der t^{m_i}/f nicht verschwindet. Es gilt daher

$$div(t^{m_i})_{|V} = div(f)_{|V} = D_{|V}$$

Das sowohl der Träger von $div(t^{m_i})$ als auch der Träger von D in $\bigcup_\rho D_\rho$ enthalten ist und $p \in V \cap D_\rho$ gilt, folgt $div(t^{m_i}) = D$.

Sei jetzt D ein beliebiger T_N-invarianter Cartier Divisor auf U_σ. Da $\dim \sigma^\vee = \dim M_\mathbb{R}$ gilt (σ ist per Voraussetzung streng konvex), können wir ein $m \in \sigma^\vee \cap M$ finden, so daß $\langle m, u_\rho \rangle > 0$ für alle $\rho \in \sigma(1)$ gilt. Daher ist

$$D' = D + div(t^{km}),$$

für genügend große k, ein effektiver Divisor. Das heißt D' ist Divisor ein Charakters und dasselbe gilt für D.

Die zweite Aussage folgt dann aus Korollar 9.13. $\square$

Proposition 9.19. *Sei Σ ein Fächer in $N_\mathbb{R}$ und X_Σ die zugehörige torische Varietät. Wenn Σ einen Kegel der Dimension d enthält, dann ist $Pic(X_\Sigma)$ torsionsfrei.*

Beweis. Wegen Korrolar 9.13 reicht es zu zeigen: Falls D ein T_N-invarianter Cartier Divisor ist und kD ein Divisor eines Charakters (für $k > 0$), dann ist D selbst Divisor eines Charakters. Sei also $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ und $kD = div(t^m)$ für ein $m \in M$.

Sei σ ein Kegel der Dimension n. Da D Cartier ist, ist $D_{|U_\sigma}$ auch Cartier. ES gilt

$$D_{|U_\rho} = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho D_\rho$$

Wegen Proposition 9.18 gilt $D_{|U_\sigma} = div(t^{m'})_{U_\sigma}$. Daher gilt

$$a_\rho = \langle m', u_\rho \rangle \quad \text{für alle} \quad \rho \in \sigma(1).$$

Andererseits zeigt $kD = div(t^m)$, daß

$$ka_\rho = \langle m, u_\rho \rangle \quad \text{für alle} \quad \rho \in \sigma(1)$$

gilt. Da die u_ρ $N_\mathbb{R}$ aufspannen folgt $km' = m$. Wegen $kD = div(t^{km'})$ folgt dann auch $D = div(t^{m'})$. □

Proposition 9.20. *Sei X_Σ eine torische Varietät mit Fächer Σ. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

1. *Every Weil divisor on X_Σ is Cartier.*
2. *$Pic(X_\Sigma) = Cl(X_\Sigma)$*
3. *X_Σ ist glatt.*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) ist klar und (3) $\Rightarrow$ (1) auch. Es bleibt (1) $\Rightarrow$ (3) zu zeigen. Sei jeder Weil-Divisor auf X_Σ Cartier und sei $U_\sigma \subset X_\Sigma$ eine affine offene Karte. Da $Cl(X_\Sigma) \to Cl(U_\sigma)$ surjektive ist, ist auch auf U_σ jeder Weil-Divisor Cartier. Da wegen Proposition 9.18 die Picardgruppe $Pic(U_\sigma)$ verschwindet, bekommen wir aus Theorem 9.10 die surjektive Abbildung

$$M \longrightarrow Div_{T_N}(U_\sigma) = \bigoplus_{\rho \in \sigma(1)} \mathbb{Z} D_\rho$$

Für $\sigma(1) = \{\rho_1, \ldots, \rho_s\}$ kann man diese Abbildung folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} &M \longrightarrow \mathbb{Z}^s \\ &m \mapsto (\langle m, u_{\rho_1} \rangle, \ldots, \langle m, u_{\rho_s} \rangle) \end{aligned} \tag{9.0.11}$$

Definiere die Abbildung $\Phi : \mathbb{Z}^s \to N$ mit $\Phi(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{i=1}^s a_i u_{\rho_i}$. Die duale Abbildung

$$\Phi^* : M = Hom(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^s$$

ist die Abbildung 9.0.11. Wegen dem Elementarteilersatzn gilt

$$\begin{aligned} \Phi^* \text{ surjektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \Phi \text{ injektiv und } N/\Phi(\mathbb{Z}^s) \text{ torsionsfrei} \\ &\Leftrightarrow \quad u_{\rho_1}, \ldots, u_{\rho_s} \text{ Teil einer } \mathbb{Z}\text{-Basis} \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß U_σ glatt ist. Da σ beliebig war, folgt die Aussage. □

Wir möchten jetzt verschiedene Charakterisierungen von T_N-invarianten Cartier Divisoren geben. Sei $\Sigma_{max} \subset \Sigma$ die Menge der maximalen Kegel, also der Kegel die in keinem anderen Kegel echt enthalten sind.

Theorem 9.21. *Sei X_Σ eine torische Varietät mit Fächer Σ und $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *D ist Cartier*
2. *D ist ein Hauptdivisor auf jeder affinen Karte U_σ*
3. *Für jedes $\sigma \in \Sigma$ existiert ein $m_\sigma \in M$ mit $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ für alle $\rho \in \sigma(1)$*
4. *Für jedes $\sigma \in \Sigma_{max}$ existiert ein $m_\sigma \in M$ mit $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ für alle $\rho \in \sigma(1)$*

Ist D Cartier und die $\{m_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ wie in Aussage 3., dann gilt

(a) *m_σ ist eindeutig mod $M(\sigma) = \sigma^\perp \cap M$*

(b) *Ist τ eine Seite von σ, dann ist $m_\sigma \equiv m_\tau$ mod $M(\tau)$.*

Beweis. Die Äquivalenzen (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) folgen direkt aus Proposition 9.18. Die Richtung (3) $\Rightarrow$ (4) ist klar. Die Richung (4) $\Rightarrow$ (3) folgt da jeder Kegel τ in einem maximalen Kegel $\sigma \in \Sigma_{max}$ enthalten ist. Gilt $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ für alle $\rho \in \sigma(1)$, dann können wir $m_\sigma = m_\tau$ setzen.

Wir zeigen jetzt (a): Sei $m_\sigma \in M$ mit $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ für alle $\rho \in \sigma(1)$. Für $m'\sigma \in M$ gilt

$$\begin{aligned} \langle m'_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho \quad \forall \rho \in \sigma(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \langle m'_\sigma - m_\sigma, u_\rho \rangle = 0 \quad \forall \rho \in \sigma(1) \\ &\Leftrightarrow \quad \langle m'_\sigma - m_\sigma, u \rangle = 0 \quad \forall u \in \sigma \\ &\Leftrightarrow \quad m'_\sigma - m_\sigma \in \sigma^\perp \cap M = M(\sigma) \end{aligned}$$

Das heißt m_σ ist eindeutig modulo $M(\sigma)$. Aussage (b) folgt aus der Eindeutigkeit und der Tatsache, daß $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ für alle $\rho \in \tau(1) \subset \sigma(1)$ erfüllt. □

Bemerkung 9.22. *Sei Σ ein glatter Fächer, so daß jeder Kegel in einem maximalen Kegel enthalten ist. Betrachte den T_N-invarianten Weil-Divisor $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$. Da die maximalen Kegel von einer $\mathbb{Z}$-Basis aufgespannt werden, können wir für jeden maximalen Kegel σ ein eindeutiges $m_\sigma \in M$ finden, s. d. $\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = -a_\rho$ für $\rho \in \sigma(1)$ gilt. Das heißt jeder T_N-invariante Weil-Divisor ist Cartier.*

Die m_σ aus Teil 3 erfüllen $D_{|U_\sigma} = div(t^{-m_i})_{U_\sigma}$. Die Menge $\{m_\sigma\}$ heißt Cartier Datum von D. Wir führen jetzt eine alternative Beschreibung des Cartier Datums ein.

Definition 9.23. *Sei Σ ein Fächer in $N_{\mathbb{R}}$.*

1. *Eine* ***stückweise lineare Funktion*** *ist eine Funktion $\varphi : |\Sigma| \longrightarrow \mathbb{R}$ die linear auf jedem Kegel von Σ ist. Die Menge aller Trägerfunktionen wird mit $PL(\Sigma)$ bezeichnet.*

2. *Eine stückweise lineare Funktion heißt ganzzahlig bezüglich des Gitters N falls*

$$\varphi(|\Sigma| \cap N) \subset \mathbb{Z}$$

Die Menge solcher Funktionen bezeichnen wir mit $PL(\Sigma, N)$.

Theorem 9.24. *Sei Σ ein Fächer in $N_{\mathbb{R}}$.*

1. *Sei $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ ein Cartier Divisor mit Cartier Datum $\{m_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$. Die Funktion*

$$\begin{aligned} \varphi_D : |\Sigma| &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi_D(u) = \langle m_\sigma, u\rangle \quad \text{für } u \in \sigma \end{aligned}$$

ist eine wohl-definierte stückweise lineare, ganzzahlige Funktion bezüglich N.

2. *Es gilt $\varphi(u_\rho) = -a_\rho$ für alle $\rho \in \Sigma(1)$.*

3. *Die Abbildung $D \mapsto \varphi_D$ liefert einen Isomorphismus*

$$CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \simeq PL(\Sigma, N)$$

Beweis. Theorem 9.21 besagt, daß m_σ modulo $\sigma^\perp \cap M$ eindeutig ist und daß $m_\sigma \equiv m_{\sigma'}$ modulo $(\sigma \cap \sigma') \cap M$. Das zeigt, daß φ_D wohldefiniert und linear auf den Kegeln ist. Sie ist ganzzahlig auf $N \cap |\Sigma|$ da $\varphi_{D|\sigma}(u) = \langle m_\sigma, u\rangle$ für $u \in \sigma$ ist. Das zeigt die ertse Behauptung. Die zweite Aussage folgt aus der Definition von m_σ.

Wir beweisen die dritte Aussage. Die Abbildung $CDiv_{T_N}(X_\Sigma) \to PL(\Sigma, N)$ ist linear, da $\varphi_{D+E} = \varphi_D + \varphi_E$ gilt. Die Injektivität folgt aus der zweiten Aussage. Es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei $\varphi \in PL(\Sigma, N)$. Da φ ganzzahlig bezüglich N ist erhalten wir einen Halbgruppenhomomorphismus $\varphi_{|\sigma\cap N} : \sigma \cap N \to \mathbb{Z}$, der sich zu einem Gruppenhomomorphismus $N_\sigma \to \mathbb{Z}$ ausdehnt. Wegen $Hom_{\mathbb{Z}}(N_\sigma, \mathbb{Z}) \simeq M/M(\sigma)$ erhalten wir ein $m_\sigma \in M$ so daß $\varphi_\sigma(u) = \langle m_\sigma, u\rangle$. Dann ist $D = -\sum_{rho} a_\rho D_\rho$ ein Cartier Divisor der auf φ abgebildet wird. $\square$

Sei D ein Weil-Divisor auf einer normalen Varietät X. Der Divisor D gibt zu einer Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln Anlaß:

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(D)(U) := \{f \in \mathbb{C}(X)^* \mid (div(f) + D)_{|U} \geq 0\} \cup \{0\}$$

Proposition 9.25. *Seien $D = E + div(g)$ linear äquivalente Weil-Divisoren, dann sind $\mathcal{O}_X(D)$ und $\mathcal{O}_X(E)$ isomorphe $\mathcal{O}_X$-Moduln.*

Beweis. Es gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}_X(D)(U) &\iff (div(f) + D)_{|U} \geq 0 \\ &\iff (div(f) + E + div(g))_{|U} \geq 0 \\ &\iff (div(fg) + E)_{|U} \geq 0 \\ &\iff fg \in \mathcal{O}_X(E)(U) \end{aligned}$$

Das heißt Multiplikation mit g induziert einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_X(D)$ mit $\mathcal{O}_X(E)$. □

Proposition 9.26. *Sei D ein T_N-invarianter Weil divisor auf X_Σ, dann gilt*

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma) = \bigoplus_{div(t^m)+D\geq 0} \mathbb{C} \cdot t^m$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma)$. Dann gilt wegen $div(f) + D \geq 0$, daß $div(f)_{|T_N} \geq 0$, da $D_{T_N} = 0$. Das bedeutet aber, daß $f \in \mathbb{C}[M]$ und daher gilt

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma) \subset \mathbb{C}[M].$$

Desweiteren ist $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma)$ stabil unter der T_N-Wirkung auf $\mathbb{C}[M]$, da D T_N-invariant ist. Wegen Lemma 9.17 gilt

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma) = \bigoplus_{t^m\in\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma)} \mathbb{C} \cdot t^m$$

Da $t^m \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma)$ genau dann wenn $div(t^m)+D \geq 0$ gilt, folgt die Behauptung. □

Für $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ und $m \in M$ ist $div(t^m) + D \geq 0$ äquivalent zu

$$\langle m, u_\rho\rangle + a_\rho \geq 0 \quad \text{für alle } \rho \in \Sigma(1)$$

also

$$\langle m, u_\rho\rangle \geq -a_\rho \quad \text{für alle } \rho \in \Sigma(1)$$

Wir definieren das Polyeder eines Divisors:

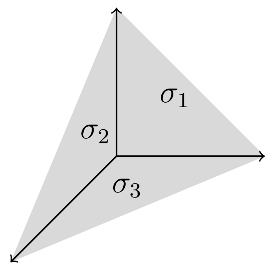
$$P_D = \{m \in M_\mathbb{R} \mid \langle m, u_\rho\rangle \geq -a_\rho \text{ für alle } \rho \in \Sigma(1)\}$$

Wir haben daher folgende Umformulierung von Proposition 9.25

Korollar 9.27. *Sei D ein T_N-invarianter Weil Divisor, dann gilt*

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma) = \bigoplus_{m\in P_D\cap M} \mathbb{C} \cdot t^m$$

Beispiel 9.28. *Sei Σ der Fächer von $\mathbb{P}^2$ wie in Beispiel 3.14. Die 1-dimensionalen Kegel werden von $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$ und $u_3 = -e_1 - e_2$ aufgespannt.*



Betrachte den Weil-Divisor $D = D_1 + D_2 + D_3$. Das zugehörige Cartier Datum ist:

$$m_{\sigma_1} = -e_1^* - e_2^* \qquad m_{\sigma_2} = 2e_1^* - e_2^* \qquad m_{\sigma_3} = -e_1^* + 2e_2^*$$

Das Polyeder P_D ist gegeben durch