Seminar über quadratische Formen

Sommersemester 2021
Prof. Dr. A. Schmidt & Dr. C. Dahlhausen

Eine *quadratische Form* ist ein Polynom der Form $a_1x_1^2+\ldots+a_kx_k^2$ für ein positive ganze Zahl k und Koeffizienten $a_1,\ldots,a_k$ in einem Ring (von Charakterisik ungleich 2). Terme dieser Art werden schon seit Langem in der Zahlentheorie studiert. So besagt etwa der **Vier-Quadrate-Satz von Lagrange**, dass jede natürliche Zahl Summe von vier Quadraten ist, d.h. für jede natürliche Zahl n existieren natürliche Zahlen n_1, n_2, n_3, n_4 derart, dass $n = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2$. Der aus der Linearen Algebra bekannnte **Trägheitssatzes von Sylvester** erlaubt uns eine Charakterisierung der quadratischen Forman über den reellen Zahlen. Quadratische Formen über den rationalen Zahlen gehorchem einem **Lokal-Global-Prinzip**: eine Gleichung $a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 = 0$ mit Koeffizienten $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Q}$ hat genau dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn sie dies in jeder Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ hat, nämlich in den rellen Zahlen $\mathbb{R}$ und in den p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ für jede Primzahl p (Satz von Hasse-Minkowski).

Vorkenntnisse: Lineare Algebra 2.

Zeit und Ort: Donnerstags, 14:15–15:45 Uhr, im Internet.

Literatur: Hauptquelle ist Serres Buch „A Course in Arithmetic“ [Ser73], als Ergänzung dient das Buch von Lam [Lam05]. Die Theorie geht im Wesentlichen auf Witt zurück [Wit37].

Vorbesprechung: Montag, 8. März, 13:00 Uhr, im Internet (Link, Passwort: pGCki2fJd92).

Anrechenbarkeit: Alle Vorträge können im Bachelor angerechnet werden, im Master lediglich die Vorträge 11 und 12.

Vorträge

Vortrag 1: Das quadratische Reziprozitätsgesetz
Einführung des Legendre-Symbols: für eine ganze Zahl x und eine Primzahl p sei $(\frac{x}{p} \in \pm 1\}$ genau dann 1, wenn x ein Quadrat modulo p ist. Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes: für ungerade Primzahlen p und ℓ ist $(\frac{\ell}{p}) = (\frac{p}{\ell})(-1)^{\frac{\ell-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}$ und $(\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Beispielsweise ist

$$\left(\frac{29}{43}\right) = \left(\frac{43}{29}\right) = \left(\frac{14}{29}\right) = \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{7}{29}\right) = -\left(\frac{7}{29}\right) = -\left(\frac{29}{7}\right) = -\left(\frac{1}{7}\right) = -1,$$

also ist 29 kein Quadrat mod 43.
Quelle: [Ser73, Ch. I, §3.]

Vortrag 2: Die p-adischen Zahlen
Sei p eine Primzahl. Einführung des topologischen Ringes der ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ und seines Funktionenkörpers $\mathbb{Q}_p$. Lösbarkeit von Gleichungen in den p-adischen Zahlen.
Quelle: [Ser73, Ch. II, §1 & §2].

Vortrag 3: Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Q}_p$.
Beschreibung der Einheitengruppe $\mathbb{Q}_p^\times$ des Körpers $\mathbb{Q}_p$ mittels der Filtrierung der höheren Einheiten. Explizite Struktur der Einseinheiten. Charakterisierung der Quadrate in $\mathbb{Q}_p^\times$.
Quelle: [Ser73, Ch. II, §3].

Vortrag 4: Das lokale Hilbertsymbol
Satz von Ostrowski (ohne Beweis). Sei $K \in \{\mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}_p \mid p \text{ Primzahl}\}$. Für $a, b \in K^\times$ wird das lokale Hilbertsymbol

$$(a,b) = \begin{cases} +1, & \text{falls } z^2 - ax^2 - by^2 = 0 \text{ eine Lösung } \neq (0,0,0) \text{ in } K^3 \text{ hat.} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

studiert und in Termen des Legendre-Symbols berechnet.
Quelle: [Ser73, Ch. III, §1].

Vortrag 5: Das globale Hilbert-Symbol
Es gibt Einbettungen $i_p \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_p$ (für jede Primzahl p) und $i_\infty \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Für $a, b \in \mathbb{Q}^\times$ setzen wir $(a,b)_\nu = (i_\nu(a), i_\nu(b))$ für $\nu = p$ oder ∞. Dann ist $(a,b)_\nu = 1$ für fast alle ν und es ist $\prod_\nu (a,b)_\nu = 1$. Existenz rationaler Zahlen mit vorgegebenem Hilbert-Symbol.
Quelle: [Ser73, Ch. III, §2].

Vortrag 6: Quadratische Formen und Zerlegungssatz
Definition von quadratischen Formen über Körpern der Charakteristik ungleich 2. Definition quadratischer Räume[1] und deren Morphismen. Eigenschaften quadratischer Räume (isotrop, hyperbolisch, anisotrop). Jeder quadratische Raum zerfällt in eine orthogonale Summe aus einem rein isotropen Raum, einem hyperbolischen Raum und einem anisotropen Raum (Existenz im Zerlegungssatz von Witt).
Quellen: [Ser73, Ch. IV, §1.1–§1.4], [Lam05, Ch. I, §4].

Vortrag 7: Kürzungssatz und quadratische Formen über $\mathbb{F}_q$
Äquivalenz quadratischer Formen und der Kürzungssatz von Witt und Eindeutigkeit im Zerlegungssatz von Witt. Kurze Wiederholung der endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ (mit $q = p^f$ für eine Primzahl p und $f \in \mathbb{N}$) und deren Einheitengruppen (ohne Beweise). Der Satz von Chevalley-Warning. Quadratische Formen über $\mathbb{F}_q$.
Quellen: [Ser73, Ch. I, §2 & Ch. IV, §1.5–§1.7], [Lam05, Ch. I, §4].

Vortrag 8: Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$
Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}_p$ vermöge deren Rang, Diskriminante und Hilbert-Symbol.
Quelle: [Ser73, Ch. IV, §2].

Vortrag 9: Der Satz von Hasse-Minkowski
Eine quadratische Form $a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$ mit $a_i \in \mathbb{Q}^\times$ hat genau dann eine von Null verschiedene Nullstelle, wenn sie dies in $\mathbb{R}$ und für jede Primzahl p in $\mathbb{Q}_p$ hat.
Quelle: [Ser73, Ch. IV, §3.1 & §3.2].

Vortrag 10: Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$
Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}$. Kriterium, dass eine natürliche Zahl die Summe von drei Quadraten ist. Satz von Lagrange und Satz von Gauß über Dreieckszahlen.
Quelle: [Ser73, Ch. IV, §3.3 & App.].

Vortrag 11: Ganzzahlige quadratische Formen I (Master)
Definition quadratischer Formen und quadratischer Moduln über $\mathbb{Z}$. Die Menge S aller symmetrischen Bilinearformen über $\mathbb{Z}$ ist mit der Operation der direkten Summe $\oplus$ ein Monoid $(S, \oplus)$.

[1] Bei Serre [Ser73] werden diese in eine größeren Allgemeinheit „quadratische Moduln“ genannt.

Dessen Gruppenvervollständigung ist die Grothendieck-Gruppe $\mathrm{K}(S)$. Eine symmetrische Bilinearform ist genau dann indefinit, wenn sie das neutrale Element in $\mathrm{K}(S)$ darstellt.
Quelle: [Ser73, Ch. V, §1, Thm. 3 aus §2.2 und Beweis §3.1].

Vortrag 12: Ganzzahlige quadratische Formen II (Master)
Die Gruppe $\mathrm{K}(S)$ ist eine freie abelsche Gruppe und Folgerungen davon.
Quelle: [Ser73, Ch. V, §2.1 (außer Theorem 3), §3.2.–§3.4].

Literatur

[Lam05] Tsit Yuen Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Ser73] Jean-Pierre Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[Wit37] Ernst Witt, *Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*, J. Reine Angew. Math. **176** (1937), 31–44.