Seminar zur Bewertungstheorie

Wintersemester 2021/22
Dr. K. Hübner & Dr. C. Dahlhausen

Bewertungen sind Abwandlungen des Absolutbetrages auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Erste Beispiele davon sind die p-adischen Bewertungen $|-|_p \colon \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{R}_{>0}$ (für eine Primzahl p), welche in der Zahlentheorie eine große Rolle spielen, sowie Null- und Polstellenordnungen auf Funktionenkörpern, welche in der Geometrie von Belang sind; dies sind Beispiele von diskreten Bewertungen auf Körpern. Im Seminar werden wir uns mit allgemeinen Bewertungen befassen, dies sind Abbildungen

$$|\text{-}| \colon A \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}, \quad x \mapsto |x|,$$

von einem kommutativen Ring A (statt eines Körpers) in eine vollständig geordnete (multiplikative) abelsche Gruppe Γ (statt $\mathbb{R}_{>0}$) vereinigt mit einem kleinsten Element 0 (z. B. $\mathbb{R}_{>0} \cup \{0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$), die (unter anderem) die Bedingungen

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{und} \quad |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

erfüllen (für alle $x, y \in A$).

Im Rahmen des Seminars wollen wir uns zuerst mit den Grundlagen der Bewertungstheorie beschäftigen und viele Beispiele kennenlernen, unter anderem alle Bewertungen auf den rationalen Zahlen und auf Funktionenkörpern. Anschließend werden wir einen Blick auf geometrische Anwendungen von Bewertungen werfen und Räume studieren, deren Punkte durch Bewertungen gegeben sind: der Riemann-Zariski-Raum eines Körpers und Bewertungsspektren beliebiger kommutativer Ringe. Letztere bilden auch die Grundlage für adische und perfektoide Räume. Zu guter Letzt studieren wir Bewertungen aus zahlentheoretischer Sicht. Ähnlich wie in der Zahlentheorie interessieren wir uns für Erweiterungen bewerteter Körper $L|K$. Viel arithmetische Information ist im sogenannten Verzweigungsverhalten der Erweiterung kodiert. Um dem auf den Grund zu gehen, vergleichen wir die Wertegruppen, studieren die Restklassenkörpererweiterungen und stellen eine Relation mit dem Grad der Erweiterung her.

In Kombination mit der Vorlesung „Algebraische Zahlentheorie I“ bietet eine Teilnahme an diesem Seminar eine hervorragende Vorbereitung für eine mögliche Bachelorarbeit im am Lehrstul von Prof. Dr. A. Schmidt zu einem Thema aus dem Gebiet der Algebraischen Zahlentheorie oder der Nichtarchimedischen Geometrie.

Vorkenntnisse: Algebra 2.

Zeit und Ort: Donnerstags, 14:15–15:45 Uhr, im Mathematikon.

Anmeldung und Kontak: Die Anmeldung erfolgt auf MÜSLI. Bei Fragen wenden Sie sich bitte an Christian Dahlhausen (`cdahlhausen@mathi.uni-heidelberg.de`) oder an Katharina Hübner (`khuebner@mathi.uni-heidelberg.de`).

Anrechenbarkeit: Die ersten vier Vorträge können nur im Bachelor angerechnet werden, alle restlichen wahlweise auch im Master.

Vorträge

Grundlagen

Vortrag 1: Bewertungen (21.10.)
Definition vollständig geordneter abelscher Gruppen, konvexer Untergruppen und des Ranges solcher Gruppen. Beweis erster Eigenschaften und Angabe von Beispielen. Charakterisierung vollständig geordneter abelscher Gruppen von Rang 1 als geordnete Untergruppen der reellen Zahlen [Mor, I.1.3.6]. Einführung von Bewertungen und deren Wertegruppe [Mor, I.1.1.10]. Zusammenhang zwischen additiven und multiplikativen Bewertungen [Mor, I.1.1.11]. Äquivalenz von Bewertungen [Mor, I.1.1.11].
Quellen: [Mor, I.1.1–I.1.3], [Wed, §1].

Vortrag 2: Die Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ und auf $K(X)$ (28.10.)
Einführung der p-adischen Bewertung auf $\mathbb{Q}$ für eine Primzahl p, der p-adischen Bewertung auf $K(X)$ für ein irreduzibles Polynom $p \in K[X]$ (und einen Körper K) und der Gradbewertung auf $K(X)$. Kurze Skizzierung der Vervollständigung und Erwähnung des Henselschen Lemmas [EP05, 1.3.1] (ohne Beweis). Beweis der Klassifikation der Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ (Satz von Ostrowski) und der Bewertungen auf $K(X)$, die auf K trivial sind [EP05, 2.1.4]. Vergleich zwischen den rationalen Zahlen und Funktionenkörpern.
Quelle: [EP05, §1.3, §2.1].

Vortrag 3: Bewertungsringe (04.10.)
Definition und äquivalente Charakterisierung von Bewertungsringen [Mor, I.1.1.4]. Korrespondenz zwischen Bewertungen und Bewertungsringen [Mor, I.1.1.14]. Für einen Bewerungsring A mit Quotientenkörper K und Bewertungsgruppe Γ stehen folgenden drei Mengen in Bijektion zueinander: Primideale von A, Zwischenringe von $A \subset K$ und konvexe Untergruppen von Γ. Zusammenhang zwischen Dimension eines Bewertungsringes und der Höhe seiner Bewertungsringes.
Quellen: [Mor, I.1.1.–I.1.2] und dortige Referenzen auf [Bou64] bzw. [Bou98], [Wed, §1.2].

Vortrag 4: Diskrete Bewertungsringe und Beispiele von Bewertungsringen (11.11.)
Äquivalente Charakterisierung von diskreten Bewertungsringen [Mor, I.1.4.7]. Viele Beispiele von Bewertungen und deren Bewertungsringen: triviale Bewertung bezüglich eines Primideals, Gaußbewertung auf dem Polynomring eines bewerteten Ringes, Bewertung auf der Gruppenalgebra einer vollständig geordneten abelschen Gruppe. Beispiele von Bewertungen höheren Ranges [Mor, I.1.4.3].
Quelle: [Mor, I.1.3–I.1.4].

Geometrie

Vortrag 5: Die Bewertungstopologie und der Riemann-Zariski-Raum (18.11.)
Einführung der Bewertungstopologie auf einem Bewertungsring [Mor, I.1.5.1]. Definition von topologisch nilpotenten Elementen [Mor, I.1.5.3]. Äquivalente Charakterisierungen von mikrobischen Bewertungen [Mor, I.1.5.4]. Definition des Riemann-Zariski-Raumes eines Körpers [Mor, I.1.6.2] und Beweis dessen Quasikompaktheit [Mor, I.1.6.5].
Quellen: [Mor, I.1.5–I.1.6], [Wed, §5.5–§5.6].

Vortrag 6: Das Bewertungsspektrum eines Ringes (25.11.)
Definition des Bewertungsspektrums eines kommutativen Ringes [Wed, 4.1]. Kanonische Abbildung vom Bewertungsspektrum in das Spektrum und Beschreibung der Fasern als Riemann-Zariski-Räume der Restklassenkörper [Mor, I.2.1.4]. Beispiele von Bewertungsspektren [Wed, 4.2]. Induzierte Abbildungen zwischen Bewertungsspektren [Wed, 4.3]. Bewertungsspektren von

Lokalisierungen und Faktorringen [Wed, 4.4]. Einführung der Spezialisierungs- und Genralisierungsrelation [Wed, 3.6]. Vertikale und horizontale Spezialisierungen in Bewertungsringen [Wed, 4.12, 4.16] und Beispiele davon.
Quellen: [Wed, §4.1, §4.2], [Mor, I.2.1].

Vortrag 7: Ausblick auf adische Räume (02.12.)
Dieser Vortrag ist ein anspruchsvoller Panoramavortrag, als Vorbereitung empfiehlt sich eine Lektüre von [Cona]. Im Vortrag beschränken wir uns auf den Spezialfall von adischen Spektren, die affinoiden Tate-Ringen zugeordnet werden. Einführung von Tate-Ringen [Wed, §6.2] und affinoiden Tate-Ringen [Wed, §7.3] und des adischen Spektrums eines affinoiden Tate-Ringes [Wed, §7.4]. Beschreibung der Punkte im adischen Spektrum über mikrobische Bewertungen. Skizzierung der Punkte auf der adischen Einheitskreisscheibe [Conc, §11.2].
Quellen: [Wed, §6.2, §7.3, §7.4], [Cona], [Conb], [Conc].

Zahlentheorie

Vortrag 8: Fortsetzungen von Bewertungen (16.12.)
Fortsetzbarkeit von Bewertungen auf Körpern entlang algebraischer und transzendenter Körpererweiterungen [Wed, 2.15]. Aussagen über (nicht-)vorhandene Eindeutigkeit solcher Fortsetzungen [Wed, 2.18].
Quellen: [Wed, §2.4], [Mor, I.1.2], [EP05, §3.1], [Neu92, Kap. II, §8].

Vortrag 9: Algebraische Erweiterungen (13.01.)
Trägheitsgrad und Verzweigungsindex. Zusammenhang der Normalisierung eines Bewertungsringes in einer algebraischen Erweiterung mit dessen Fortsetzungen.
Quelle: [EP05, §3.2] bis einschließlich Corollary 3.2.10.

Vortrag 10: Unmittelbare und normale Erweiterungen (20.01.)
Unmittelbarkeit der Erweiterungen eines separabel abgeschlossenen, bewerteten Körpers. Normale Erweiterungen und der Konjugationssatz.
Quelle: [EP05, §3.2] ab Theorem 3.2.11 bis zum Schluss.

Vortrag 11: Die fundamentale Ungleichung (27.01.)
Beweis der fundamentalen Ungleichung, die einen Zusammenhang herstellt zwischen den Trägheitsgraden und Verzweigungsindizes der Fortsetzungen einer Bewertung mit dem Grad der Erweiterung. Wann ist die fundamentale Ungleichung eine Gleichung?
Quelle: [EP05, §3.3].

Vortrag 12: Henselsche bewertete Körper (03.02.)
Äquivalente Charakterisierungen henselscher bewerteter Körper, Vervollständigungen und Henselsches Lemma [EP05, 4.1.3]. Definition der Zerlegungsgruppe als Untergruppe der absoluten Galoisgruppe eines bewerteten Körpers und der Henselisierung. Eigenschaften der Henselisierung.
Quelle: [EP05] §4.1 und 5.2 bis einschließlich Theorem 5.2.5.

Vortrag 13: Trägheitsgruppe und Verzweigungsgruppe (10.02.)
Definition der Trägheitsgruppe und die erste exakte Folge. Definition der Verzweigungsgruppe und zweite exakte Folge.
Quelle: [EP05] §5.2 nach Theorem 5.2.5 bis zum Schluss und §5.3.

Vortrag 14: Vorbesprechung Seminar SS 2022. (17.02.)

Literatur

[Bou64] Nicolas. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5: Entiers. Chapitre 6: Valuations*, Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 1308, Hermann, Paris, 1964.

[Bou98] Nicolas Bourbaki, *Commutative algebra. Chapters 1–7*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 1998, Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[Cona] Brian Conrad, *A brief introduction to adic spaces*, Online verfügbar unter `https://math.stanford.edu/~conrad/papers/Adicnotes.pdf`.

[Conb] ———, *Lectrure 10: Affinoid adic spaces I*, Vorlesungsnotizen. Online verfügbar unter `https://math.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L10.pdf`.

[Conc] ———, *Lectrure 11: Affinoid adic spaces II*, Vorlesungsnotizen. Online verfügbar unter `https://math.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L11.pdf`.

[EP05] Antonio Engler and Alexander Prestel, *Valued Fields*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[Mor] Sophie Morel, *Adic spaces*, Vorlesungsskript, Version vom 22. April 2019. Online verfügbar unter `https://web.math.princeton.edu/~smorel/adic_notes.pdf`.

[Neu92] Jürgen Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Wed] Torsten Wedhorn, *Adic spaces*, Vorlesungsskript, Version vom 15. Oktober 2019, Online verfügbar unter `https://arxiv.org/abs/1910.05934v1`.