Seminarprogramm: „Konstruktion von Galoisüberlagerungen mit Hilfe von starr-analytischer Verklebung“

Alexander Schmidt

2. Oktober 2015

Ziel des Seminars ist es zu verstehen, wie man algebraische Kurven mit Hilfe von starr-analytischer Verklebung konstruiert. Wir wollen diese Technik im Beweis der folgenden beiden Theoreme (die von Pop und Harbater bewiesen wurden) verwenden.

Theorem 1 (Geometrischer Fall der Schafarewitsch-Vermutung) *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist die absolute Galoisgruppe des rationalen Funktionenkörpers $k(X)$ eine freie pro-endliche Gruppe (vom Rang $= \mathrm{card}(k)$).*

Theorem 2 (Abhyankars Vermutung) *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei C eine affine, glatte und zusammenhängende Kurve über k. Eine endliche Gruppe G ist genau dann Galoisgruppe einer étalen Galoisüberlagerung von C, wenn dies für den maximalen prim-zu-p Quotienten $G^{(p')}$ von G der Fall ist.*

Korollar 3 *Eine endliche Gruppe G ist genau dann Galoisgruppe einer endlichen étalen Galoisüberlagerung der affinen Gerade $\mathbb{A}^1_k$, wenn sie eine quasi-p-Gruppe ist, d.h. wenn sie von ihren p-Sylowgruppen erzeugt wird.*

1 Programm

Um dem Zeitrahmen von einem Semester zu genügen, werden wir uns darauf beschränken, den vollständigen Beweis von Theorem 1 (im wesentlichen nach [P]) und den starr-analytischen Teil des Beweises von Korollar 3 (nach [R]) zu verstehen. Das ist gerechtfertigt, weil Korollar 3 in Wirklichkeit kein Korollar, sondern ein ganz wesentlicher Zwischenschritt im Beweis von Theorem 2 ist. Sollte am Ende des Semesters noch Zeit sein, könnte man den Beweis von Korollar 3 noch komplettieren (das wäre dann im wesentlichen Kombinatorik semi-stabiler Kurven). Jeder der folgenden Vorträge (bis auf Vortrag 2, der ist länger und Vortrag 4, der braucht wahrscheinlich schon aufgrund des Schreibaufwandes etwas mehr Zeit) sollte auf eine Sitzung von 90 Minuten vorbereitet werden. Wir haben 14 Sitzungen im Semester und die Erfahrung zeigt, daß sich immer noch Probleme ergeben und kleine Ergänzungsvorträge zwischengeschoben werden müssen. Die Zeitbeschränkung ist eine wesentliche Anforderung an die Vortragenden. Man sollte lieber den einen oder anderen Beweis weglassen und statt dessen die Ideen genauer beleuchten. Das ist natürlich kein Freibrief für „großherzige Unschärfe“; die Mathematik soll selbstverständlich auf hohem Niveau sein und sich nicht im Ungefähren verlieren.

Eine gute (wenn auch nicht ganz kurze) Einführung in das Gebiet ist Harbaters Übersichtsartikel [H]. Der deckt allerdings viel mehr ab, als wir im Seminar machen wollen. Man sollte sich also von der Länge des Artikels nicht abschrecken lassen. Eine exzellente Einführung in starr-analytische Geometrie ist Schneiders Übersichtsartikel [Sch]. Wer sich schon mal mit komplex-analytischen Räumen beschäftigt hat, wird [BGR] gerne als Referenz nehmen. Eine andere Referenz ist [FP].

Die Vorträge

1. Einführung (Alexander Schmidt/Armin Holschbach)
Eine Erläuterung der Grundideen und der benutzten Techniken.

2. Starr-analytische Räume (Alexander Schmidt)
In diesem Vortrag werden starr-analytische Räume eingeführt und die grundlegenden Begriffe dieses Gebietes erläutert. Da vorausgesetzt werden kann, daß das Publikum mit komplexen Mannigfaltigkeiten vertraut ist, werden im wesentlichen die Unterschiede genauer beleuchtet.

3. Proendliche Gruppen (Gregor Pohl)
In diesem Vortrag sollen Eigenschaften proendlicher Gruppen zusammengesammelt werden. Beweise sollen nur skizziert werden.
-freie proendliche Gruppen [NSW] (3.5.14),
-freie Produkte (endlich vieler) proendlicher Gruppen [NSW] IV §1
-Einbettungsprobleme [NSW], III §5
-projektive proendliche Gruppen [NSW] (3.5.5)
-Satz von Grünberg (projektiv $\Leftrightarrow$ cd = 1) ([NSW], (3.5.6))
-Iwasawas Kriterium für die Freiheit einer proendlichen Gruppe
Eine proendliche Gruppe ist genau dann frei über einer Menge der unendlichen Kardinalität α, wenn sie durch α viele Elemente topologisch erzeugt wird und jedes endliche Einbettungsproblem α viele eigentliche Lösungen hat.
Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den abzählbaren Fall (siehe [NSW] (3.5.20), im allgemeinen Fall muß man normale Induktion durch transfinite ersetzen).
-Schließlich zeige man, daß die Fundamentalgruppe einer affinen Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper projektiv ist.

4. Verklebung kompatibler Familien von Galoisüberlagerungen
In diesem Vortrag soll der Inhalt von [P] §1, §2 d.h. die eigentliche Verklebungsprozedur erklärt werden. Das ist im wesentlichen Kombinatorik und das Hauptaugenmerk des Vortragenden sollte auf einer möglichst guten Darstellung liegen. Sonst verliert man nämlich leicht den Überblick, obwohl alles eigentlich ganz einfach ist. Es sollen die Begriffe geklärt werden, die in [P], Prop.2.6 auftauchen und dieser Satz soll so erläutert werden, daß man versteht, daß er „selbstbeweisend“ ist. Der einzige Punkt scheint mir [P] Seite 565, Zeile 19–21 zu sein, der näher erklärt werden sollte.

5. Konstruktion von Keimen analytischer Galoisüberlagerungen
In diesem Vortrag werden die lokalen Daten, d.h. geeignete Überlagerungen der analytischen Einheitskreisscheibe konstruiert. Inhalt des Vortrages ist [P], §3, Anfang von „Proof of theorem A“ und „Conclusion A“. Das ist allerdings sehr knapp dargestellt und man sollte unbedingt auf das etwas ausführlichere [1/2] zurückgreifen.

6. Beweis von Theorem 1
In diesem Vortrag soll Theorem 1 bewiesen werden. Hierbei gehe man im Prinzip wie in [P] vor, ersetze aber das modelltheoretische Argument dort durch ein geometrisches Spezialisierungsargument, wie es z.B. in [H], proof of corollary 3.3.5 skizziert ist. Dazu bringe man einen Beweis des Satzes von Bertini-Noether und zwar nach [L], Ch.9, Prop.5.3.

7. Kreisscheiben und Kreisringe
Zunächst soll, nach [R] 3.3. eine Beschreibung formaler Modelle von leicht vergrößerten Kreisscheiben gegeben werden. Dann werden Prop.3.4.1, Prop.3.5.1 loc.cit. ohne Beweis vorgestellt. Schließlich wird definiert, was ein Runge-Paar ist. Wichtig an diesem Vortrag ist die Vermittlung einer geometrischen Intuition, was das Fehlen von Beweisen ausgleichen muß.

8. Reduktionssätze
Einbettungsprobleme mit auflösbarem Kern sind kohomologischen Methoden zugänglich. Dies ist durchaus nichttrivial, liegt aber nicht auf der geometrischen Linie unseres Seminars. Daher soll

dieser Punkt möglichst schnell abgearbeitet werden. In diesem Vortrag sollen die Ergebnisse von [Se] und von [R], §4 (wichtig für das weitere sind cor.4.2.6, prop.4.2.8) erklärt werden.

9. Der starr-analytische Teil des Beweises von Korollar 3
In diesem Vortrag soll Theoreme 2.2.3 aus [R] bewiesen werden. Im Prinzip ist schon alles da aber die Besonderheit liegt jetzt darin, daß die Verklebung nicht entlang voll zerfallender Ränder passiert, sondern die Ränder sind in natürlicher Weise miteinander zu identifizieren

und wenn noch Zeit ist:

10. Semistabile Kurven und der verbleibende Teil des Beweises von Korollar 3
Um den verbleibenden Teil von Korollar 3 zu zeigen, nutzt man Hebungen nach Charakteristik 0, die (bekannte) Struktur der Fundamentalgruppe dort und Kombinatorik semi-stabiler Kurven. Neben Raynauds Originalartikel [R] ist [Sa] eine gute Referenz.

Wofür keine Zeit bleiben wird ist der Beweis von Theorem 2. Aber wenn man bis hier alles verstanden hat, kann man das leicht bei Pop [P] nachlesen. Alle benutzten Techniken haben wir bereits kennengelernt.

Literatur

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert: Non-Archimedean Analysis. Springer Grundlehren 261

[FP] J. Fresnel, M. van der Put: Geometrie Analytique Rigide et Applications. Progress in Math. vol. 18, Birkhäuser 1981

[H] D. Harbater: Patching and Galois Theory. Preprint (auf Harbaters Homepage: `http://www.math.upenn.edu/~harbater/patch34.pdf`)

[L] S. Lang: Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer 1983

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg: Cohomology of Number Fields. sec. ed., Springer Grundlehren 323. Online Edition auf A. Schmidts Homepage: `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~schmidt/NSW2e/`

[P] F. Pop: Étale covers of affine smooth curves. Invent. math. 120, 555–578 (1995)

[1/2] F. Pop: 1/2-Riemann existence theorem with Galois action. In Frey und Ritter (eds.): Algebra and Number Theory. de Gruyther Proceedings in Mathematics 1994

[R] M. Raynaud: Revêtements de la droite affine en characteristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar. Invent. Math. 116 (1994) 425-462

[Sa] M. Saïdi: Abhyankar's conjecture II: The use of semi-stable curves. In Bost, Loeser, Raynaud (eds.): Courbes semi-stables et groupe fondamental en geometrie algebrique. Progress in Math. vol. 187 Birkhäuser 2000

[Sch] P. Schneider: Basic notions of rigid analytic geometry. In Scholl, Taylor (eds.): Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry. Cambridge University Press 1998

[Se] J.-P. Serre: Construction de revêtements étales de la droite affine en characteritique p. C. R. Acad. Sci. ,Paris, Ser. I 311 (1990) 341–346