KLASSISCHE PROJEKTIVE GEOMETRIE - SS 2018

Zusammenfassung

Ziel dieses Seminars ist, projektive Geometrie und Quadriken mit den klassischen geometrischen und axiomatischen Methoden zu untersuchen.

TEIL I: Projektive Räume

1 - Projektive Räume: Axiomen (B oder 1+2 M). Definieren Sie eine Inzidenzstruktur und geben Sie die Axiome eines projektiven Raums [BR98, Sec.1.2]. Definieren Sie einen projektiven Raum. Definieren Sie die Fano Ebene und die projektive Ebene über einem Schiefkörper und zeigen Sie, dass diese projektive Räume sind.

2 - Projektive Räume über K: Definitionen(B). Definieren Sie $\mathbb{P}(V)$ für einen Vektorraum V über einem Schiefkörper K. Definireren Sie den dualen Raum, lineare Unterräume und zueinander windschiefe Unterräume. Definieren Sie den durch einer Menge erzeugten Unterraum und beweisen Sie die grassmansche Formel. Erklären Sie, warum die grassmansche Formel in einem affinen Raum nur als Ungleichung gilt.

3 - Doppelverhältnis(B/M). Definieren Sie den Begriff einer Menge von Punkten in allgemeiner Position. Definieren Sie die affinen Koordinaten eines projektiven Raums. Definieren Sie das Doppelverhältnis und erklären Sie seine wichtigsten Eigenschaften.

4 - Fundamentale Sätze der projetive Geometrie: Projektive Abbildungen(B/M). Definieren Sie perspektive und projektive Abbildungen und zeigen Sie, wie diese mit Koordinaten dargestellt werden können. Zeigen Sie, dass jede projektive Abbildung die Verknüpfung perspektiver Abbildungen ist [BR98, Sec.3.6].

TEIL II: Die projektive Ebene

5 - Der Satz von Pappus (B oder 5+6 M). Zeigen Sie [BR98, Thm.2.2.1]. Geben Sie ein Gegenbeispiel von einer projektiven Ebene, für die der Satz von Pappus nicht gilt.

6 - Der Satz von Desargues(B). Zeigen Sie [BR98, Thm.2.2.2], und erklären Sie, warum der Satz von Pappus für $\mathbb{P}(V)$ stärker ist als der Satz von Desargues. Erwähnen Sie [BR98, Thm.2.2.3], ohne Beweis. Wenn noch Zeit übrig ist, geben Sie ein Beispiel von einer projektiven Ebene, für die der Satz von Desargues gilt, aber nicht der Satz von Pappus.

6a (Fakultativ) - Der Satz von Hessenberg(M). Zeigen Sie den Satz von Hessenberg, wie in [Cro53].

7 - Quadriken(B/M). Definieren Sie Quadriken, zeigen Sie dass sie einen Vektorraum bilden, und zeigen Sie, dass durch 5 generische Punkte genau eine Quadrik geht.

8 - Die Resultante und der Satz von Bezout (schwache Form)(B/M). Definieren sie die Resultante zwei homogener Polynome aus $K[x, y, z]$ und beweisen Sie den Satz von Bezout (schwache Form) [Kir92, Sec.3.1].

8a (Fakultativ) - Der Satzt von Pascal(M). Zeigen Sie den Satz von Pascal, der besagt, was 6 Punkte erfüllen müssen, so dass durch sie eine Quadrik geht.

References

[BR98] A. Beutelspacher and U. Rosenbaum. *Projective Geometry: From Foundations to Applications*. Cambridge University Press, 1998. isbn: 9780521483643.

[Cro53] Arno Cronheim. "A Proof of Hessenberg's Theorem". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 4.2 (1953), pp. 219–221. issn: 00029939, 10886826. url: `http://www.jstor.org/stable/2031794`.

[Kir92] F.C. Kirwan. *Complex Algebraic Curves*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1992. isbn: 9780521423533.