Einführung in die Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Proseminar im Sommersemester 2012
Prof. Dr. A. Schmidt mit Dr. M. Witte und Dr. A. Holschbach

Inhalt

Die Theorie der linearen Darstellungen endlicher Gruppen spielt nicht nur in vielen Gebieten innerhalb der Mathematik eine wichtige Rolle, sondern findet auch Anwendung in der Physik und der Chemie. Eine lineare Darstellung einer Gruppe G ist dabei nichts anderes als ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus von G in die Gruppe der linearen Automorphismen von V durch den G auf V operiert. Durch das Studium solcher Darstellungen kann man tiefe Einsichten sowohl über die Gruppe G als auch über die zugrundeliegenden Vektorräume gewinnen.

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Proseminar richtet sich vornehmlich an Studenten im Studiengang *Bachelor Mathematik* im 2. und 4. Semester. Vorkenntnisse im Umfang der Vorlesung *Lineare Algebra I* werden vorausgesetzt.

Zeit und Ort

Die Veranstaltung wird zweifach parallel angeboten:

PS1: Mittwoch, 14 – 16 Uhr, INF 288, HS 3 (Betreuer: Dr. Witte)
PS2: Freitag, 11 – 13 Uhr, INF 288, HS 3 (Betreuer: Dr. Hoschbach/Prof. Schmidt)

Kontakt

Dr. Malte Witte,
INF 288, Raum 109
`witte@mathi.uni-heidelberg.de`,
Tel. +49-6221-54-5642

Anmeldung und Vortragsvergabe

für beide Veranstaltungen gemeinsam bei der Vorbesprechung am Dienstag, 24.01.2012, 14 – 16 Uhr, INF 288, HS 1.

Zum Ablauf

Zu den unten aufgeführten Terminen halten die Studenten Vorträge zu den von ihnen gewählten Themen. Die Mindestanforderung an den Vortrag ist, dass der Vortragende selbst den Stoff, über den er vorträgt, durchdrungen hat. Ferner soll der Vortragende in der Lage sein, den Stoff den anderen Seminarteilnehmern verständlich zu vermitteln.

Die Vorträge sollen an der Tafel gehalten werden. Ausnahmen davon sind nach Rücksprache mit dem Betreuer möglich. Für frei gehaltene Vorträge gibt es Pluspunkte. Eine schriftliche Ausarbeitung wird nicht verlangt; jedoch kann durch sie ein mangelhafter Vortrag ausgegelichen werden.

Die Dauer der Vorträge soll 90 Minuten nicht überschreiten. Wenn die Vortragszeit nicht auszureichen scheint, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Es wird erwartet, dass die Vortragenden sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit dem jeweiligen Betreuer des Seminars in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit ihm durchzusprechen. Der Betreuer steht darüber hinaus auch auch für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Eine ausführliche Anleitung, wie man einen guten Seminarvortrag hält, findet man hier:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag`

Vorträge

Vortrag 1: Allgemeines über lineare Darstellungen
(18.04.12/20.04.12)

Die grundlegenden Definitionen sollen vorgestellt werden und erste Beispiele diskutiert werden. Dann soll der Begriff der Teildarstellung und der irreduziblen Darstellung erläutert werden [Se77, §1.1–1.4]. Der Satz, dass jede Darstellung Summe von irreduziblen Darstellungen ist, hat zentrale Bedeutung.

Vortrag 2: Tensorprodukt und Charaktere
(25.04.12/27.04.12)

Das Tensorprodukt zweier Darstellungen und der Charakter einer Darstellung sollen eingeführt werden [Se77, §1.5–2.1]. Wenn Zeit bleibt, soll ein Teil der Aufgaben im Abschnitt 2.1 vorgeführt werden.

Vortrag 3: Schurs Lemma und Orthogonalitätsrelationen
(02.05.12/04.05.12)

Zunächst soll Schurs Lemma bewiesen werden, dann Orthogonalitätsrelationen für Charaktere untersucht werden [Se77, §2.2–2.3]. Die Zeit sollte auch noch für die Diskussion der Übungsaufgaben im Abschnitt 2.3 reichen.

Vortrag 4: Kanonische Zerlegung
(09.05.12/11.05.12)

Zunächst wird die Zerlegung der regulären Darstellung untersucht, dann die Anzahl der irreduziblen Darstellungen bestimmt und schließlich die kanonische Zerlegung einer beliebigen Darstellung eingeführt [Se77, §2.4–2.6].

Vortrag 5: Explizite Zerlegung, abelsche Untergruppen, Produkte von Gruppen
(16.05.12/18.05.12)

Als Nachtrag zum vorangehenden Vortrag soll eine explite Konstruktion einer Zerlegung vorgestellt werden. Dann werden Darstellungen abelscher Gruppen und von Produkten von Gruppen untersucht [Se77, §2.7–3.2].

Vortrag 6: Induzierte Darstellungen
(23.05.12/25.05.12)

Der Begriff der induzierten Darstellung wird eingeführt und die Existenz und Eindeutigkeit wird bewiesen. Danach wird noch der Charakter einer induzierten Darstellung untersucht [Se77, §3.3].

Vortrag 7: Beispiele
(30.05.12/01.06.12)

Die Charaktertafeln der zyklischen und dihedralen Gruppen sowie der alternierenden Gruppe A_4 und der symmetrischen Gruppe S_4 werden untersucht. [Se77, §5.1, 5.3, 5.7, 5.8].

Vortrag 8: Gruppenringe
(06.06.12/08.06.12)

In diesem Vortrag soll die Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ diskutiert werden [Se77, §6.1–6.3]. Es soll kurz erklärt werden, was eine halbeinfache Algebra ist. Das Korollar in Abschnitt 6.1 zitieren wir ohne Beweis. Dann soll die Zerlegung und das Zentrum von $\mathbb{C}[G]$ beschrieben werden.

Vortrag 9: Ganze Elemente und Teilbarkeitsbedingungen
(13.06.12/15.06.12)

Ganze Elemente und Teilbarkeitsrelationen in Gruppenringen werden diskutiert [Se77, §6.4–6.5].

Vortrag 10: Frobenius-Reziprozität
(20.06.12/22.06.12)

Induktion von Darstellungen und der zugehörige Charakter soll untersucht werden [Se77, §7.1–7.2].

Vortrag 11: Mackey-Kriterium
(27.06.12/29.06.12)

Thema des Vortrags sind die Einschränkungen auf Untergruppen und der Beweis des Irreduzibilitätskriteriums von Mackey [Se77, §7.3-7.4]. Die restliche Zeit soll den Aufgaben von §7.2 gewidmet sein.

Vortrag 12: Beispiele von induzierten Darstellungen
(04.07.12/06.07.12)

In diesem Vortrag werden einige Beispiele induzierter Darstellungen diskutiert, insbesondere solche, die von normalen Untergruppen und halbeinfachen Produkten kommen. Schließlich sollen noch Darstellungen von überauflösbaren Gruppen diskutiert werden [Se77, §8.1-8.5]. Die Abschnitte §8.3, 8.4 werden auch in der Vorlesung Algebra I behandelt. Deshalb kann man sich hier kurz fassen.

Vortrag 13: Artins Theorem
(11.07.12/13.07.12)

Der Ring $R(G)$ der Darstellungen wird eingeführt und Artins Theorem bewiesen. Es reicht, einen der Beweise für das Theorem vorzuführen [Se77, §9.1-9.4].

Literatur

[FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory. A first course*, Springer 1991.

[Se77] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer 1977.