Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

Aufgabenblatt 8 4. Dezember 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es seien L/K eine endliche, separable Körpererweiterung und v eine diskrete, nicht-archimedische Exponentialbewertung auf K. Weiterhin seien $\mathcal{O}_K$ der Bewertungsring von v und $\mathcal{O}_L$ der ganze Abschluss von $\mathcal{O}_K$ in L.

Zeigen Sie die Identität

$$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}}_v \cong \prod_{w|v} \widehat{\mathcal{O}}_w,$$

wobei w alle Fortsetzungen von v auf L durchläuft und $\widehat{\mathcal{O}}_v$ bzw. $\widehat{\mathcal{O}}_w$ die Bewertungsringe der Komplettierungen K_v von K bzgl. v bzw. L_w von L bzgl. w sind.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es seien L/K eine beliebige unendliche Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, sowie v eine nicht-archimedische Bewertung auf K mit Fortsetzung w auf L. Weiterhin bezeichnen κ bzw. λ die jeweiligen Restklassenkörper.

Zeigen Sie die Exaktheit der Sequenz

$$1 \longrightarrow I_w \longrightarrow G_w \longrightarrow \mathrm{Gal}(\lambda/\kappa) \longrightarrow 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Bild von $G_w \longrightarrow G(\lambda/\kappa)$ eine dichte Teilmenge von $G(\lambda/\kappa)$ ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei K ein lokaler Körper und p die Charakteristik seines perfekten Restklassenkörpers. Es sei K_s ein separabler Abschluss von K und $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ sowie $I = I(K_s/K)$ und $R = R(K_s/K)$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen in die Gruppen der n-ten Einheitswurzeln $\mu_n \leq K_s^\times$

$$I \longrightarrow \mu_n, \qquad \sigma \longmapsto \sigma(p^{1/n})/p^{1/n}, \qquad n \geq 1,$$

unabhängig von der Wahl einer Wurzel $p^{1/n} \in K_s$ sind und sich zu einem Isomorphismus von I/R nach dem projektiven Limes über folgende Abbildungen fortsetzt:

$$f_{mn,n} : \mu_{mn} \longrightarrow \mu_n, \qquad x \longmapsto x^m, \qquad m, n \geq 1.$$

b) Der Isomorphismus aus a) ist kompatibel mit der Operation von G/I auf beiden Objekten.

c) Folgern Sie, dass (unkanonisch) gilt: $\quad I/R \cong \prod_{\substack{q \text{ Primzahl mit} \\ (p,q)=1}} \mathbb{Z}_q$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Es sei K ein lokaler Körper, L/K eine zahm verzweigte Galois-Erweiterung, sowie

$$G = \mathrm{Gal}(L/K), \qquad I = I(L/K), \qquad \Gamma = G/I = \mathrm{Gal}(\lambda/\kappa).$$

Zeigen Sie:

a) I ist abelsch und wird zu einem Γ-Modul via: $\quad \Gamma \times I \longrightarrow I, \qquad (\sigma I, \tau) \longmapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$

b) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus von Γ-Moduln: $\quad I \cong \chi(L/K) := \mathrm{Hom}(w(L^\times)/v(K^\times), \lambda^\times)$

c) $G \cong \chi(L/K) \rtimes \mathrm{Gal}(\lambda/\kappa)$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws15azt1/`
Abgabe bis spätestens Donnerstag 10. Dezember 2015 um 17 Uhr bei den Kästen in INF 294.