Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

Aufgabenblatt 7 27. November 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es sei K ein vollständiger, diskret bewerteter Körper und $L = K(a)$ mit $a \in \mathcal{O}_L$.

Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[a]$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi]$, falls L/K total verzweigt und $\pi \in \mathcal{O}_L$ ein Primelement ist.

Hinweis: Beweis von $n = ef$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass alle Bewertungen des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ bis auf Äquivalenz wie folgt gegeben sind.

a) Die archimedischen Bewertungen sind gegeben durch

$$|a + b\sqrt{5}|_{\infty_1} = |a + b\sqrt{5}|, \qquad |a + b\sqrt{5}|_{\infty_2} = |a - b\sqrt{5}|.$$

b) Ist $p = 2$ oder $p = 5$ oder eine Primzahl $p \neq 2, 5$ mit Legendre-Symbol $\left(\frac{p}{5}\right) = -1$, so ist

$$|a + b\sqrt{5}|_{\mathfrak{p}} = \sqrt{|a^2 - 5b^2|_p}$$

die einzige Fortsetzung von $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

c) Ist $p \neq 2, 5$ eine Primzahl mit Legendre-Symbol $\left(\frac{p}{5}\right) = 1$, so sind

$$|a + b\sqrt{5}|_{\mathfrak{p}_1} = |a + b\gamma|_p, \qquad |a + b\sqrt{5}|_{\mathfrak{p}_2} = |a - b\gamma|_p$$

die beiden einzigen Fortsetzungen von $|\cdot|_p$, wobei $\gamma \in \mathbb{Q}_p$ eine Lösung von $x^2 - 5 = 0$ ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es seien L/K eine endliche Körpererweiterung und v eine nicht-archimedische Exponentialbewertung auf K. Weiterhin seien $\mathcal{O}_K$ der Bewertungsring von v und $\mathcal{O}_L$ der ganze Abschluss von $\mathcal{O}_K$ in L.

Zeigen Sie, dass der Bewertungsring einer Fortsetzung w von v auf L die Lokalisierung $(\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{p}}$ von $\mathcal{O}_L$ nach dem Primideal $\mathfrak{p} = \{a \in \mathcal{O}_L;\ w(a) > 0\}$ ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Es sei K ein lokaler Körper der Charakteristik 0.

Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele total verzweigte Erweiterungen L/K mit $[L : K] = n$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie den Raum der Eisenstein-Polynome und argumentieren Sie mit Krasner's Lemma (Übungsblatt 5 Aufgabe 4).

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws15azt1/`
Abgabe bis spätestens Donnerstag 3. Dezember 2015 um 17 Uhr bei den Kästen in INF 294.