Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

Aufgabenblatt 6 20. November 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es sei $\mathcal{O}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper κ der Charakteristik $p > 0$.

Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus f gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} W(\kappa) \arrow[rr, "\exists! f"] \arrow[dr, "w_0"'] & & \mathcal{O} \arrow[dl] \\ & \kappa. & \end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnen $W(\kappa)$ die auf Übungsblatt 3 eingeführten p-typischen Witt-Vektoren von κ.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es seien $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring und L/K eine endliche Erweiterung. Weiterhin seien κ bzw. λ die Restklassenkörper von K bzw. L, und λ_s der separable Abschluss von κ in λ. Es sei T die maximal unverzweigte Teilerweiterung von L/K.

Zeigen Sie, dass $T \cong W(\lambda_s) \otimes_{W(\kappa)} K$, falls $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \kappa = p > 0$ und κ perfekt ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es seien $\mathcal{O}_K$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring, K'/K eine endliche, unverzweigte Erweiterung und K''/K eine endliche Erweiterung mit Restklassenkörpern $\kappa \subset \kappa', \kappa''$.

Zeigen Sie, dass die K-Homomorphismen $K' \longrightarrow K''$ bijektiv den κ-Homomorphismen $\kappa' \longrightarrow \kappa''$ entsprechen.

Hinweis: Betrachten Sie das charakteristische Polynom eines erzeugenden Elements $x \in \mathcal{O}_{K'}/\mathcal{O}_K$ und verwenden Sie Hensels Lemma.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Beweisen oder widerlegen Sie:

Das Kompositum zweier total verzweigter Erweiterungen ist wieder total verzweigt.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws15azt1/`
Abgabe bis spätestens Donnerstag 26. November 2015 um 17 Uhr bei den Kästen in INF 294.