Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

Aufgabenblatt 4 6. November 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
In einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper K ist jede Untergruppe von endlichem Index in $K^\times$ offen und abgeschlossen.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jede solche Untergruppe $(K^\times)^n$ enthält, für ein $n \geq 1$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es sei K ein diskret bewerteter Körper. Zeigen Sie:

K ist genau dann lokal kompakt, wenn K vollständig und der Restklassenkörper k endlich ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei K ein Körper, der bzgl. einer nicht-archimedischen Bewertung $|\cdot|$ vollständig ist, $\mathcal{O}_K$ der zugehörige Bewertungsring. Es seien $f \in \mathcal{O}_K[X]$ und $x_0 \in \mathcal{O}_K$ mit $|f(x_0)| < |f'(x_0)^2|$. Zeigen Sie:

a) Die Folge
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \geq 0$$
konvergiert gegen ein $x \in \mathcal{O}_K$ mit $f(x) = 0$.

b) $|x - x_0| \leq \left| \dfrac{f(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| < 1.$

Hinweis: Zeigen Sie, dass es ein $g \in K[X,Y]$ gibt mit $f(X+Y) = f(X) + f'(X)Y + g(X,Y)Y^2$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

a) Wie viele quadratische Erweiterungen besitzt der p-adische Körper $\mathbb{Q}_p$?
Finden Sie alle für $\mathbb{Q}_2$. (*Hinweis:* Aufgabe 3)

b) Zeigen Sie, dass für jedes p folgende Gleichung in $\mathbb{Z}_p$ lösbar ist.
$$(X^2 - 2)(X^2 - 17)(X^2 - 34).$$

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws15azt1/`
Abgabe bis spätestens Donnerstag 12. November 2015 um 17 Uhr bei den Kästen in INF 294.