Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

Aufgabenblatt 2 23. Oktober 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Eine p-adische Zahl $a = \sum_{\nu=-m}^{\infty} a_\nu p^\nu \in \mathbb{Q}_p$ ist genau dann eine rationale Zahl, wenn die Ziffernfolge periodisch ist (eine Vorperiode zugelassen).

Hinweis: Man schreibe $p^m a = b + c\frac{p^k}{1-p^n}, \quad 0 \leq b < p^k,\ 0 \leq c < p^n$.

b) Eine ganze p-adische Zahl $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ...$ ist genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}_p$, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass der Homomorphismus

$$\mathbb{Z}[[X]]/(X-p) \longrightarrow \mathbb{Z}_p, \qquad \sum_{n\geq 0} a_n X^n \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n p^n$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_q$ nicht isomorph sind, falls $p \neq q$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Gegeben sei eine Folge von Ringen (mit verbindenden Ringhomomorphismen)

$$... \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0, \qquad n \geq 0,$$

sowie eine Folge von Moduln

$$... \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0, \qquad n \geq 0,$$

der Art, dass M_n ein A_n-Modul ist, die obigen Abbildungen zwischen den Moduln Homomorphismen der unterliegenden additiven Gruppen sind, und für jedes $n \geq 0$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A_{n+1} \times M_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & M_{n+1} \arrow[d] \\ A_n \times M_n \arrow[r] & M_n \end{tikzcd}$$

Hierbei seien die horizontalen Abbildungen durch die Skalarmultiplikation und die vertikalen durch die Homomorphismen der Folgen gegeben.
Zeigen Sie, dass $\varprojlim_{n\geq 0} M_n$ ein Modul über $\varprojlim_{n\geq 0} A_n$ ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws15azt1/`
Abgabe bis spätestens Donnerstag 29. Oktober 2015 um 17 Uhr bei den Kästen in INF 294.