Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

Aufgabenblatt 12 22. Januar 2015

Aufgabe 1. *(∞ Punkte)*

Berechnen Sie die Idealklassengruppe von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{82})$. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

a) Berechnen Sie die Diskriminante d_K und die Minkowski-Schranke $\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \sqrt{|d_K|}$ aus Korollar 22 aus der Vorlesung.

b) Folgern Sie, dass die Klassengruppe von Primidealen erzeugt wird, die über $p = 2, 3, 5, 7$ liegen.

c) Benutzen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{82}$ um zu zeigen, dass $5, 7 \in K$ prim sind, über 2 genau 1 Primideal P_2 und über 3 zwei Primideale P_3, P_3' liegen.

d) Beweisen Sie die Relation $[P_2][P_3]^2 = 1$.

Hinweis: Berechnen Sie $N_{K/\mathbb{Q}}(10 + \sqrt{82})$.

e) Führen Sie $2 = (a + b\sqrt{82})^2 u$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $u \in \mathcal{O}_K$ zum Widerspruch.

Hinweis: Benutzen Sie die Norm-Abbildung.

f) Folgern Sie, dass P_2 kein Hauptideal in $\mathcal{O}_K$ ist.

g) Zeigen Sie, dass die Idealklassengruppe zyklisch der Ordnung 4 ist.

Bitte beachten Sie, dass der Inhalt dieses Übungsblatts *klausurrelevant* ist! Es wird zwar nicht mehr korrigiert, aber in der Übung am Dienstag ausführlich besprochen.

Weitere Hinweise zur Vorgehensweise finden Sie im aktualisierten Skript der Plenarübungen auf der Homepage.