**Universität Heidelberg**
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

# Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

**Aufgabenblatt 11** 15. Januar 2015

**Aufgabe 1.** *(4 Punkte)*
Es sei $K$ ein algebraischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ und $I \lhd \mathcal{O}_K$ ein ganzes Ideal von $K$. Ferner gelte $I^m = (a)$, für gewisse $m \geq 1, a \in \mathcal{O}_K$.

Zeigen Sie, dass $I$ im Körper $L = K(\sqrt[m]{a})$ ein Hauptideal wird, d.h. es gilt $I\mathcal{O}_L = (b)$, für ein $b \in \mathcal{O}_L$.

**Aufgabe 2.** *(8 Punkte)*
Es seien $A$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K$ und $B$ sein ganzer Abschluss in einer separablen Erweiterung $L/K$.

Zeigen Sie:

a) Sind $I, J \lhd A$ Ideale, so gilt $I = IB \cap A$ und $I|J \Longleftrightarrow IB|JB$.

b) Zu jedem ganzen Ideal $I$ von $B$ gibt es ein $b \in B$ mit $L = K(b)$ und zu $I$ teilerfremden Führer $F = \{x \in B;\ xB \subset A[b]\}$.

**Aufgabe 3.** *(4 Punkte)*
Es seien $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\Gamma \leq V$ eine endlich erzeugte Untergruppe und $V/\Gamma$ trage die Quotiententopologie (d.h. die offenen Teilmengen $U \subset V/\Gamma$ sind genau diejenigen, deren Urbild in $V$ offen ist). Zeigen Sie:

a) Es gibt genau dann linear unabhängige $v_1, ..., v_m \in V$ mit $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + ... + \mathbb{Z}v_m$, wenn $V/\Gamma$ Hausdorffsch ist (d.h. zwei verschiedene Punkte in $V/\Gamma$ besitzen disjunkte offene Umgebungen).

b) $\Gamma \leq V$ ist genau dann ein Gitter, wenn $V/\Gamma$ kompakt ist.