Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Andreas Riedel
Christian Rüschoff

Algebraische Zahlentheorie 1

Wintersemester 2015/2016

Aufgabenblatt 10 18. Dezember 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und L eine endliche Galois-Erweiterung von K.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ auflösbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es ein $n \geq 0$ gibt, so dass die Verzweigungsgruppe G_n trivial ist.

Aufgabe 2. *(2 Punkte)*
Es sei $L = K(a)$ eine endliche, separable Körpererweiterung, $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von a.

Zeigen Sie: $\Delta(a) = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot N_{L/K}(f'(a))$

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es seien A ein Dedekindring, $K = \mathrm{Quot}(A)$ sein Quotientenkörper, sowie $I, J \in I(A)$ zwei gebrochen rationale Ideale und $0 \neq \mathfrak{p} \lhd A$ ein Primideal.

Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) $v_\mathfrak{p}(IJ) = v_\mathfrak{p}(I) + v_\mathfrak{p}(J)$,

b) $I \subset J \iff v_\mathfrak{p}(I) \geq v_\mathfrak{p}(J)$ für alle Primideale $0 \neq \mathfrak{p} \lhd A$,

c) $v_\mathfrak{p}(I + J) = \min\{v_\mathfrak{p}(I), v_\mathfrak{p}(J)\}$,

d) $v_\mathfrak{p}(I \cap J) = \max\{v_\mathfrak{p}(I), v_\mathfrak{p}(J)\}$,

e) Die normierte Bewertungsabbildung zu $\mathfrak{p}$ ist gegeben durch: $v_\mathfrak{p} : K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \longmapsto v_\mathfrak{p}(Ax)$

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*
Gegeben seien Körpererweiterungen $\mathbb{Q}_7[X]/(X^6 - 98)$ über $\mathbb{Q}_7$ und $\mathbb{Q}_3(i, \sqrt{6})/\mathbb{Q}_3$.

a) Zeigen Sie, dass beides Galois-Erweiterungen sind.

b) Beschreiben Sie deren Galois-Gruppen.

c) Bestimmen Sie die maximal unverzweigten Teilerweiterungen.

Aufgabe 5. *(6 Zusatzpunkte)*
Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Ein Dedekindring mit nur endlich vielen Primidealen ist ein Hauptidealring.

Hinweis: Ist $0 \neq I = \mathfrak{p}^{v_1} \cdots \mathfrak{p}^{v_n}$, so wähle man $\pi_i \in \mathfrak{p}_i \backslash \mathfrak{p}_i^2$ und benutze den chinesischen Restsatz für die Restklassen $\pi_i^{v_i} \mod \mathfrak{p}_i^{v_i}$.

b) Ist $I \lhd A$ und A ein Dedekindring, so ist A/I ein Hauptidealring.

c) Jedes Ideal in einem Dedekindring lässt sich durch zwei Elemente erzeugen.

Wir wünschen ein frohes Fest und einen guten Rutsch!

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~rueschoff/ws15azt1/`
Abgabe bis spätestens Donnerstag 8. Januar 2016 um 17 Uhr bei den Kästen in INF 294.