Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

# Algebraische Geometrie

## 5. Übungsblatt

20.05.2019

**Aufgabe 1** (*3 Punkte*). Sei $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe darauf und $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X$. Zeige: Gibt es einen Index $i \in I$ mit $U_i = X$, so ist $\mathrm{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $p \geq 1$.

**Aufgabe 2** (*2+2=4 Punkte*). Berechne die Čech-Kohomologie der konstanten Garbe $\underline{\mathbb{Z}}$ auf der Sphäre $S^2$ für die folgenden zwei Überdeckungen von $S^2$:

(a) durch zwei echte, offene, zusammenhängende Teilmengen.

(b) durch drei echte, offene, zusammenhängende Teilmengen, so dass der Schnitt von je zweien homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe und der Schnitt von allen dreien homöomorph zu zwei offenen Kreisscheiben ist. Natürlich sollte man sich dafür zunächst per Skizze davon überzeugen, dass eine solche Überdeckung existiert.

**Aufgabe 3** (*2+2+2+2=8 Punkte*). Sei $X$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe darauf. Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt *welk*, wenn alle Restriktionsmorphismen surjektiv sind.

(a) Finde ein Beispiel (oder mehrere) für eine welke Garbe.

(b) Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Zeige: Ist $\mathcal{F}$ eine welke Garbe auf $X$, so ist auch $f_*\mathcal{F}$ welk.

(c) Sei nun $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Garben auf $X$. Zeige: Ist $\mathcal{F}$ welk, so ist für jedes offene $U \subseteq X$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$$

exakt. (Wir wissen bereits, dass der Funktor der globalen Schnitte linksexakt ist!)

(d) Sei $\mathcal{F}$ welk. Berechne $\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ für eine beliebige Überdeckung $\mathcal{U}$.

---

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 27. Mai, 11 Uhr
Besprechung in den Übungen am 29. und 31. Mai