Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2019

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Dr. Michael Fütterer
Milan Malčić

Algebraische Geometrie

1. Übungsblatt

22.04.2019

Aufgabe 1 (*4 Punkte*). Sei A ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k, und sei $Y = \operatorname{Spec} A$. Wir betrachten den von $i\colon A \longrightarrow K$ und $\pi\colon A \longrightarrow k$ induzierten Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \longrightarrow K \times k$, $a \longmapsto (i(a), \pi(a))$. Sei $X = \operatorname{Spec} K \times k$ und $f : X \longrightarrow Y$ der von φ induzierte Schemamorphismus. Zeige:

(a) X ist von endlichem Typ über Y.
(b) f ist bijektiv.
(c) $\dim X = 0$, $\dim Y = 1$.
(d) f ist kein Homöomorphismus.

Aufgabe 2 (*2 Punkte*). Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine abgeschlossene Abbildung von topologischen Räumen. Zeige: Ist f injektiv, dann $\dim X \leq \dim Y$.

Aufgabe 3 (*2+2=4 Punkte*). Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige für die folgenden Ringe A jeweils, dass $\operatorname{Spec} A$ ein ganzes Schema von endlichem Typ über k ist und bestimme seine Dimension.

(a) $A = k[X, Y, Z]/(Y - X^3, Z - X^5)$
(b) $A = k[X, Y]/(X^2 - Y^3)$

Aufgabe 4 (*2 Punkte*). Sei k ein Körper. Folgere den Hilbertschen Nullstellensatz („Quotienten von $k[T_1, \dots, T_n]$ modulo maximaler Ideale sind endliche Erweiterungen von k“) aus Thm. 15 der Vorlesung.

Aufgabe 5 (*4 Punkte*). Sei k ein Körper, $f \in k[T_0, \dots, T_n]$ ein irreduzibles homogenes Polynom und $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Zeige: X ist ein ganzes Schema von Dimension $n - 1$. Benutze dafür den Krullschen Hauptidealsatz.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 29. April, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in der Übung am 3. Mai