Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

13. Übungsblatt

21.01.2019

Ist R ein Ring, S eine R-Algebra und X ein Schema über $\operatorname{Spec} R$, so schreiben wir abkürzend $X \times_R S$ für das Faserprodukt $X \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} S$.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*). Sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[S,T]/(ST^2 - m)$ und $f : X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ der kanonische Morphismus. Bestimme alle Fasern von f. Welche Fasern sind ganz, welche sind reduzibel, und wieviele irreduzible Komponenten gibt es jeweils?

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Sei k ein Körper und $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluss. Ein k-Schema X heißt *geometrisch irreduzibel* (*reduziert, integer, ...*), wenn $X \times_k \bar{k}$ irreduzibel (reduziert, integer, ...) ist. Zeige:

(a) Sei $k = \mathbb{Q}$. Dann ist $\operatorname{Spec} k[X,Y]/(X^2 - 2Y^2)$ irreduzibel, aber nicht geometrisch irreduzibel.

(b) Sei $k = \mathbb{F}_p(t)$. Dann ist $\operatorname{Spec} k[X,Y]/(X^p - tY^p)$ reduziert, aber nicht geometrisch reduziert.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*). Sei $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[S,T]/(S^2 + T^2 - 1)$ und $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[S,T]/(S^2 + T^2 + 1)$. Zeige: $X \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i) \cong Y \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$, aber $X \ncong Y$.

Aufgabe 4 (*4+2=6 Punkte*). Sei p ein Primzahl und X ein Schema der Charakteristik p (vgl. Blatt 9, Aufgabe 3). Der *absolute Frobenius* von X ist der Morphismus $\operatorname{Frob}_X : X \longrightarrow X$, der auf dem topologischen Raum die Identität ist und für $U \subseteq X$ offen durch $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$, $f \longmapsto f^p$ gegeben ist.

(a) Zeige, dass Frob_X ein universeller Homöomorphismus ist.

(b) Gib ein Schema X an, sodass Frob_X einen Isomorphismus auf $\mathcal{O}_X(X)$ induziert, aber kein Isomorphismus ist.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 28. Januar, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 30. Januar und 1. Februar