Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

12. Übungsblatt

14.01.2019

Aufgabe 1 (*3 Punkte*). Sei $S' \longrightarrow S$ ein Schemamorphismus und X ein S-Schema. Den durch X definierten Funktor

$$\mathrm{Hom}_S(-, X)\colon (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{opp}} \longrightarrow (\mathrm{Sets})$$

bezeichnen wir ebenfalls mit X. Sei X' der Funktor

$$(\mathrm{Sch}/S')^{\mathrm{opp}} \longrightarrow (\mathrm{Sets}), \quad (T \longrightarrow S') \longmapsto X(T \longrightarrow S' \longrightarrow S).$$

Zeige: X' wird durch $X \times_S S'$ dargestellt.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*). Zu einem Schema X bezeichne $|X|$ den zugrundeliegenden topologischen Raum. Sei S ein Schema und seien X, Y S-Schemata. Sei $X \times_S Y$ das Faserprodukt von Schemata und $|X| \times_{|S|} |Y|$ das Faserprodukt in der Kategorie der topologischen Räume.

(a) Zeige: Es gibt eine kanonische stetige Abbildung $f\colon |X \times_S Y| \longrightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$ und diese ist surjektiv.
(b) Finde ein Beispiel, in dem f nicht injektiv ist.
(c) Sei $S = \operatorname{Spec} k$ für einen Körper k und $X = Y = \mathbb{A}^1_k$. Zeige: Dann ist f keine offene Abbildung.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*). Sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[S,T]/(ST^2 - m)$ und $f\colon X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ der kanonische Morphismus. Bestimme alle Fasern von f. Welche Fasern sind ganz, welche sind reduzibel, und wieviele irreduzible Komponenten gibt es jeweils?

Aufgabe 4 (*3 Punkte*). Sei k ein Körper und $f\colon \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ der Strukturmorphismus. Zeige: f ist abgeschlossen, aber der durch Basiswechsel erhaltene Morphismus $f_{\mathbb{A}^1_k}\colon \mathbb{A}^2_k \longrightarrow \mathbb{A}^1_k$ ist nicht abgeschlossen.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 21. Januar, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 23. und 25. Januar