Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

11. Übungsblatt

07.01.2019

Aufgabe 1 (*5 Punkte*). Seien X, Y Schemata, $i\colon Z \subseteq X$ ein Unterschema und $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus. Zeige, dass f genau dann durch Z faktorisiert, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

(a) $f(X) \subseteq Z$ als Mengen,

(b) $f^\flat : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ faktorisiert über den surjektiven Morphismus $\mathcal{O}_Y \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Z$.

Zeige außerdem: Ist Z ein offenes Unterschema, so folgt (b) schon aus (a).

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Zeige:

(a) Immersionen sind Monomorphismen in der Kategorie der Schemata.

(b) Epimorphismen in der Kategorie der Schemata sind surjektiv (als Abbildung von Mengen).

Aufgabe 3 (*3 Punkte*). Zeige: Ein Schemamorphismus $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann surjektiv, wenn es für jeden Körper K und jeden Morphismus $\operatorname{Spec} K \longrightarrow Y$ eine Erweiterung L/K und einen Morphismus $\operatorname{Spec} L \longrightarrow X$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} L \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*). Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Wenn f eine Immersion ist, dann kann f als $f = g \circ h$ faktorisiert werden, wobei g eine offene und h eine abgeschlossene Immersion ist, wie in der Vorlesung erklärt wurde.

(a) Zeige, dass von dieser Aussage auch die Umkehrung gilt.

(b) Zeige, dass f auch dann eine Immersion ist, wenn es als $f = g \circ h$ faktorisiert werden kann, wobei diesmal g eine abgeschlossene und h eine offene Immersion ist.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 14. Januar, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 16. und 18. Januar