

# Algebraische Geometrie

## 10. Übungsblatt

17.12.2018

Alle Schemata seien stets nicht leer.

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Sei  $X$  ein quasikompaktes Schema und  $f \in \mathcal{O}_X(X)$  eine Funktion, die an jedem Punkt von  $X$  verschwindet. Zeige, dass  $f$  nilpotent ist. Zeige, dass diese Aussage falsch ist, wenn  $X$  nicht quasikompakt ist.

**Aufgabe 2** (3 Punkte). Sei  $X$  ein ganzes Schema. Zeige, dass dann für alle offenen Teilmengen  $U \subseteq V \neq \emptyset$  von  $X$  die Restriktionsabbildungen  $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$  injektiv sind.

**Aufgabe 3** ( $4+4+1=9$  Punkte). Sei  $X$  ein lokal noethersches Schema. Zeige:

- Jeder Punkt von  $X$  liegt nur in endlich vielen irreduziblen Komponenten.
- $X$  ist genau dann integer, wenn  $X$  zusammenhängend ist und  $\mathcal{O}_{X,x}$  für jeden Punkt  $x \in X$  ein Integritätsbereich ist.
- Finde ein Beispiel für ein nicht-integres Schema  $X$ , sodass  $\mathcal{O}_{X,x}$  für jeden Punkt  $x \in X$  ein Integritätsbereich ist.

**Aufgabe 4** (4 Bonuspunkte). Weihnachten nähert sich und das Christkind sitzt zu Hause am Nordpol und arbeitet daran, das beste Arbeitsschema zu finden, wonach seine Engel Geschenke für all die Kinder auf der Welt herstellen sollen. Das Christkind stellt sich dabei die Engel als Punkte in seinem Schema vor.

Aus Raum- und Zeitspargründen möchte das Christkind natürlich ein quasikompaktes Schema haben. Nun tendieren Engel dazu, bei der Arbeit neugierig zu sein und nicht die Privatsphäre anderer zu respektieren, was das Christkind als schlecht für die Produktivität empfindet. Daher findet es einen Engel *e fleißig*, wenn dieser nicht neugierig ist, in folgendem Sinne: jeder andere Engel hat eine Umgebung, in welcher sich *e* nicht befindet.

Damit der ganze Herstellungsprozess effizient verläuft, möchte das Christkind, dass es in jeder nichtleeren abgeschlossenen Menge von Engeln mindestens einen fleißigen Engel gibt.

Hilf dem Christkind, indem du zeigst, dass es sich beim Entwerfen des Schemas keine Sorgen machen muss, weil diese Bedingung immer erfüllt ist.

**Wir wünschen euch schöne Weihnachtsferien und ein gutes neues Jahr!**

---

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 7. Januar, 11 Uhr  
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)  
Besprechung in den Übungen am 9. und 11. Januar