Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

8. Übungsblatt

03.12.2018

Aufgabe 1 (*6 Punkte*). Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(a) Zeige, dass jede Prävarietät über k ein lokal geringter Raum ist.

(b) Zeige, das jeder Morphismus von Prävarietäten ein Morphismus lokal geringer Räume ist und dass die Kategorie der Prävarietäten über k eine volle Unterkategorie der Kategorie der lokal geringten Räume ist.

(c) Sei X eine affine Varietät in $\mathbb{A}^n(k)$, $x \in X$ und $f \in \Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$. Zeige, dass die beiden Auffassungen von $f(x)$

(i) $f(x)$ ist die Auswertung der Restklasse eines Polynoms bei $x \in \mathbb{A}^n(k)$;

(ii) $f(x)$ ist das Bild von $f \in \mathcal{O}_X(X)$ unter $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \kappa(x)$

übereinstimmen.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*). Sei $\varphi\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $f\colon X \longrightarrow Y$ der assoziierte Morphismus affiner Schemata mit $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} A$. Überlege für die folgenden Gruppen von Aussagen jeweils, welche Implikationen zwischen ihnen gelten:

(a) (i) φ ist injektiv;

(ii) $f^\flat\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ ist injektiv;

(iii) f hat dichtes Bild;

(b) (i) φ ist surjektiv;

(ii) $f^\flat\colon \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ ist surjektiv;

(iii) f ist ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*). Finde ein Beispiel für einen stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ von topologischen Räumen und eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Y, sodass $f^+\mathcal{F}$ keine Garbe auf X ist.

Aufgabe 4 (*2 Punkte*). Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Zeige, dass der Funktor f^{-1} von der Kategorie der Garben von abelschen Gruppen auf Y in die Kategorie der Garben von abelschen Gruppen auf X exakt ist (d. h. er erhält exakte Sequenzen).

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 10. Dezember, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 12. und 14. Dezember