Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

7. Übungsblatt

26.11.2018

Auf dem ganzen Blatt sei X ein topologischer Raum.

Aufgabe 1 (*3 Punkte*). Sei S eine Menge und $x \in X$. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ sei

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} S, & x \in U, \\ \{*\}, & x \notin U. \end{cases}$$

Definiert diese Zuordnung eine Garbe (mit den naheliegenden Einschränkungsabbildungen)? Bestimme die Halme von $\mathcal{F}$ an jedem Punkt von X.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*). (a) Sei $f\colon Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen. Zeige, dass „Schnitte von f" eine Garbe bilden. Damit ist die folgenden Zuordnung gemeint: einer offenen Menge $U \subseteq X$ ordnen wir

$$\mathcal{F}(U) := \{g\colon U \to Y \text{ stetig } \mid f \circ g = \mathrm{id}_U\}$$

zu (und benutzen die naheliegenden Einschränkungsabbildungen).

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Wir definieren einen topologischen Raum F, der als Menge

$$F = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{(x, s) \mid x \in X, s \in \mathcal{F}_x\}$$

sei. Wir versehen F mit der gröbsten Topologie, in der die Mengen der Form

$$\{(x, s_x) \mid x \in U,\ s_x = \text{ Keim von } s \text{ an } x\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen},\ s \in \mathcal{F}(U)$$

offen sind. Wir haben dann eine offensichtliche stetige Abbildung $f\colon F \longrightarrow X$.
Zeige, dass die Garbe der Schnitte von f eine Garbifizierung von $\mathcal{F}$ ist.
Bemerkung: Der Raum F heißt „éspace étalé" von $\mathcal{F}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*). Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X.

(a) Zeige, dass die Zuordnung

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \quad (U \subseteq X \text{ offen})$$

wieder eine Garbe liefert (mit „Hom" sind hier Morphismen von Garben gemeint). Diese Garbe wird mit $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bezeichnet.
Beachte, dass das etwas anderes ist als

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) \quad (U \subseteq X \text{ offen}).$$

(b) Sei $x \in X$. Wie hängt der Halm $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ mit $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ zusammen? (Genauer: Gibt es eine Abbildung? In welche Richtung? Ist sie ein Isomorphismus?)

Aufgabe 4 (*4 Punkte*). Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Ringen auf X und $f \in \mathcal{F}(X)$. Für einen Punkt $x \in X$ bezeichne $f_x \in \mathcal{F}_x$ den Keim von f in x. Zeige oder widerlege:

(a) $\{x \in X : f_x \in \mathcal{F}_x^\times\}$ ist eine offene Teilmenge von X.

(b) $\{x \in X : f_x \in \mathcal{F}_x^\times\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

(c) $\{x \in X : f_x \neq 0\}$ ist eine offene Teilmenge von X.

(d) $\{x \in X : f_x \neq 0\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 3. Dezember, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 5. und 7. Dezember