Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

# Algebraische Geometrie

## 6. Übungsblatt

19.11.2018

Jeder Ring auf diesem Blatt sei kommutativ.

**Aufgabe 1** (*2 Punkte*). In der Vorlesung wurde der Funktor $A \longmapsto \operatorname{Spec} A$ von der Kategorie der kommutativen Ringe in die Kategorie der topologischen Räume definiert.

(a) Zeige, dass dieser Funktor weder voll noch treu ist.

(b) Lässt sich auf analoge Weise ein Funktor $A \longmapsto \operatorname{Specmax} A = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ maximales Ideal}\}$ definieren? Begründe deine Antwort.

**Aufgabe 2** (*6 Punkte*). (a) Sei $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ mit Ringen $A_i$. Zeige, dass $\operatorname{Spec} A$ als topologischer Raum isomorph ist zur disjunkten Vereinigung der Räume $\operatorname{Spec} A_i$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Sei $A$ ein Ring. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\operatorname{Spec} A$ ist unzusammenhängend;

(ii) $A$ enthält eine nichttriviale Idemponte (d. h. ein Element $e \neq 0, 1$ mit $e^2 = e$);

(iii) $A \cong A_1 \times A_2$ mit Ringen $A_1, A_2 \neq 0$.

**Aufgabe 3** (*3 Punkte*). Sei $A$ ein Ring. Übersetze die folgenden algebraischen Aussagen in topologische Aussagen über Punkte und Teilmengen von $\operatorname{Spec} A$:

(a) „Das Nilradikal von $A$ ist gleich dem Jacobson-Radikal von $A$.“ Benutze hierzu Aufgabe 2 (c) von Blatt 2 (bzw. das Analogon für $\operatorname{Spec} A$, das ebenfalls gilt).

(b) Sei $B$ ein nullteilerfreier Ring, $\varphi\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $I \subseteq A$ ein Ideal und betrachte die Aussage „$\varphi$ faktorisiert durch $A/I$“.

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*). Sei $k$ ein Körper (nicht notwendig algebraisch abgeschlossen) und $A$ eine endlich erzeugte $k$-Algebra. Zeige, dass die Menge der abgeschlossenen Punkte in $\operatorname{Spec} A$ dicht ist.

**Aufgabe 5** (*2 Punkte*). Sei $X$ ein topologischer Raum. Welche der folgenden Zuordnungen für offene Mengen $U \subseteq X$ sind Garben?

(a) $U \longmapsto \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ mit Einschränkungsabbildungen gegeben durch die übliche Einschränkung von Abbildungen;

(b) $U \longmapsto S$ für eine feste Menge $S$ mit Einschränkungsabbildungen immer $\mathrm{id}_S$.

**Aufgabe 6** (*2 Punkte*). Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(k)$ eine $n \times n$-Matrix. Finde einen Zusammenhang zwischen dem Spektrum von $A$ (d. h. der Menge aller Eigenwerte) und dem Spektrum eines geeigneten Rings im Sinne der Vorlesung.

---

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 26. November, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 28. und 30. November