Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

5. Übungsblatt

12.11.2018

Auf dem ganzen Blatt sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ *projektive algebraische Menge*, wenn homogene Polynome $f_1, \ldots, f_r \in k[T_0, \ldots, T_n]$ existieren mit $V = V_+(f_1, \ldots, f_r)$.

Aufgabe 1 (*3 Punkte*)**.** Zeige die fehlende Richtung in Prop. 56: Seien $V \subseteq \mathbb{P}^m(k)$ und $W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietäten und $\phi\colon V \longrightarrow W$ ein Morphismus. Dann hat jedes $x \in V$ eine offene Umgebung $U \subseteq V$, sodass die Einschränkung $\phi|_U : U \longrightarrow W$ von der Form

$$y \longmapsto (f_0(y) : \ldots : f_n(y)) \quad (y \in U)$$

ist mit homogenen Polynomen $f_0, \ldots, f_n \in k[T_0 \ldots, T_m]$ vom gleichen Grad.

Aufgabe 2 (*3 Punkte*)**.** Ein Ideal $I \subseteq k[T_0, \ldots, T_n]$ heißt *homogen*, wenn es von homogenen Polynomen erzeugt wird. Zeige: Ein Ideal I ist genau dann homogen, wenn für jedes $f \in k[T_0, \ldots, T_n]$, das wir als Summe $f = f_0 + \cdots + f_d$ mit homogenen Polynomen f_i vom Grad i schreiben, gilt

$$f \in I \iff \forall i = 0, \ldots, d\colon f_i \in I.$$

Folgere, dass Mengen der Form $V_+(Z)$ für unendliche Mengen Z von homogenen Polynomen projektive algebraische Mengen sind.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)**.** Wir benutzen die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}^n(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 : \cdots : x_n : 1).$$

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine algebraische Menge. Zeige:

(a) Die Zuordnung $V \longmapsto \overline{\varphi(V)}$ liefert eine Bijektion zwischen affinen algebraischen Mengen in $\mathbb{A}^n(k)$ und gewissen projektiven algebraischen Mengen in $\mathbb{P}^n(k)$. Welche projektiven algebraischen Mengen sind das genau?

(b) Zeige, dass $\overline{\varphi(V)} = V_+(Z)$ ist, wenn Z die Menge aller Homogenisierungen von Elementen von $I(V)$ ist (hier benutzen wir Aufgabe 2).

(c) V ist genau dann irreduzibel, wenn $\overline{\varphi(V)}$ dies ist, d. h. wir bekommen eine Bijektion zwischen affinen Varietäten in $\mathbb{A}^n(k)$ und gewissen projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$. Was bedeutet das für die Zerlegung in irreduzible Komponenten?

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)**.** Seien $n, r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$.

(a) Versehe die Menge der $n \times n$-Matrizen von Rang höchstens r mit Einträgen in k mit der Struktur einer projektiven algebraischen Menge.

(b) Zeige, dass die Punkte dieser Menge in Bijektion mit Quadriken in $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ von Rang höchstens r stehen.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 19. November, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 21. und 23. November