Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

3. Übungsblatt

29.10.2018

Auf dem ganzen Blatt sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*). Seien X, Y affine Varietäten.

(a) Zeige, dass $X \times Y$ in natürlicher Weise wieder eine affine Varietät ist.

(b) Bestimme $\Gamma(X \times Y)$.

(c) Zeige, dass $X \times Y$ im kategoriellen Sinne das Produkt der affinen Varietäten X und Y ist.

Aufgabe 2 (*3 Punkte*). Sei $X = \mathbb{A}^2(k)$ und $U = X \setminus \{(0,0)\}$. Bestimme $\mathcal{O}_X(U)$ und folgere, dass U nicht isomorph zu einer affinen Varietät ist.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*). In dieser Aufgabe präzisieren wir einige Aussagen aus Bemerkung 34.

(a) Finde ein Beispiel für eine irreduzible affine algebraische Menge X und $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$, sodass f *nicht* von der Form $f = \frac{g}{h}$ mit $g, h \in \Gamma(X)$ und $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ ist.

(b) Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge. $\mathcal{O}_X$ wurde alternativ für offene Mengen der Form $D(f)$ mit $f \in \Gamma(X)$ als $\mathcal{O}_X(D(f)) = \Gamma(X)_f$ definiert. Zeige, dass sich dies auf eindeutige Weise zu einer Definition von $\mathcal{O}_X(U)$ für eine beliebige offene Menge $U \subseteq X$ fortsetzen lässt und dass diese Konstruktion die gleiche Definition von $\mathcal{O}_X$ wie in der Vorlesung liefert.

(c) Sei A eine integre endlich erzeugte k-Algebra. Wir setzen $X = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ maximales Ideal}\}$. Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ sei weiter $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m} \in X : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}\}$. Diese Mengen bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X. Für $U \subseteq X$ offen sei $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} A_{\mathfrak{m}}$. Zeige, dass dann $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen ist und dass diese Konstruktion äquivalent zu den vorangegangenen ist (was heißt das genau?).

Aufgabe 4 (*2 Punkte*). Zeige $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^n(k)) = \Gamma(X)^n$ für jede Prävarietät X und jedes $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 5. Novermber, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 7. und 9. November