Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Geometrie

1. Übungsblatt (mit Bonuspunkten)

17.10.2018

Auf dem ganzen Blatt sei k ein Körper.

Aufgabe 1 (*6 Bonuspunkte*). Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n(k)$ ist Hausdorffsch für jedes $n \in \mathbb{N}$;
(b) die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n(k)$ ist diskret für jedes $n \in \mathbb{N}$;
(c) die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^{m+n}(k)$ ist die Produkttopologie von $\mathbb{A}^n(k) \times \mathbb{A}^m(k)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$;
(d) k ist endlich.

Aufgabe 2 (*4 Bonuspunkte*). Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass jede affine algebraische Menge in $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ abgeschlossen bezüglich der üblichen (euklidischen) Topologie auf $\mathbb{C}^n$ ist.
(b) Gib für jedes n eine in der euklidischen Topologie abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ an, die keine affine algebraische Menge ist.

Aufgabe 3 (*4 Bonuspunkte*). Sei $C = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3(k) : t \in k\}$. Zeige, dass C eine affine algebraische Menge ist. Bestimme das Verschwindungsideal $I(C)$ und zeige, dass der Koordinatenring $k[X, Y, Z]/I(C)$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ist.

Aufgabe 4 (*5 Bonuspunkte*). Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n(k)$ tatsächlich eine Topologie ist.

Abgabe in Zweiergruppen bis Montag, 22. Oktober, 11 Uhr
in die Zettelkästen Nr. 26/27 vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)
Besprechung in den Übungen am 24. und 26. Oktober