

Hecke-Algebren, Deformationsringe und die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(N^{1/p})$

Oberseminar im Wintersemester 2017/18

Wir behandeln die Arbeit [CE05], in dem die folgende Aussage gezeigt wird:

Seien p und N verschiedene Primzahlen, $p > 2$, $N > 3$, sodass $N - 1$ genau einmal von p geteilt wird. Wenn der Ausdruck

$$\prod_{l=1}^{(N-1)/2} l^l$$

eine p -te Potenz modulo N ist, dann ist der p -Teil der Klassengruppe von $\mathbb{Q}(N^{1/p})$ nicht zyklisch.

Die Beweistechnik vereint verschiedene Methoden: Resultate aus Mazurs Artikel über das Eisensteinideal [Maz77], Deformationstheorie von Galoisdarstellungen und Klassenkörpertheorie.

Teil 1: Deformationstheorie. Zu Beginn soll eine kurze Einführung in die Theorie der Galoisdeformationen gegeben werden, z. B. nach [Maz89]; eine praktische Übersicht liefert auch [Pilo8]. Hiervon benötigen wir nur so viel, dass wir sehen, dass der Deformationsfunktorkomplex, der auf [CE05, S. 100] definiert wird, darstellbar ist. Anschließend soll das numerische Kriterium von Wiles und Lenstra erklärt werden, das Hauptresultat von [Len95] (der Beweis soll nur skizziert werden). Schließlich sollen die Aussagen über Gruppenschemata aus [CE05, §2] diskutiert werden (in Absprache mit den Vortragenden aus Teil 3).

Teil 2: Die Heckealgebra und das Eisensteinideal. In diesem Teil sollen kurz Modulformen (über beliebigen Ringen), die Heckealgebra und das Eisensteinideal eingeführt werden, siehe [Maz77, S. 90, S. 95]; vgl. auch [CE05, S. 118/119]. Die Heckealgebra wird bei Mazur durch Endomorphismen der Jacobischen definiert, kann aber auch über Modulformen definiert werden. Wir benötigen weiter die folgenden Aussagen aus Mazurs Artikel: Prop. II.9.6, Prop. II.9.7, Prop. II.19.1 und die Aussagen aus dem ersten Absatz in §19. Je nach verfügbarer Zeit wäre es schön, wenn ein wenig zu den Beweisen gesagt wird. Es soll die Aussage abgeleitet werden, die auf [CE05, S. 97, unterster Absatz] steht und insbesondere erklärt werden, warum das dort eingeführte e_p der Rang der Heckealgebra ist. Für all dies ist wahrscheinlich auch die Übersicht in [WW17, §3.1–2] hilfreich.

Teil 3: $R = \mathbb{T}$. Hier wird mithilfe des Wiles-Lenstra-Kriteriums und der Aussagen über Gruppenschemata aus Teil 1 die Isomorphie zwischen Deformationsring und Heckealgebra gezeigt, siehe [CE05, §3, bis S. 123 oben]. Den Fall $p = 2$ lassen wir grundsätzlich aus. Dieser Beweis ist sehr lang und sollte geeignet in kleinere Teile zerlegt werden, beispielsweise den Beweis von Thm. 3.5 im ersten Teil und den Rest des Abschnitts im zweiten.

Teil 4: Folgerungen. In diesem Teil leiten wir das Endresultat ab: dass die Heckealgebra Rang 1 hat, wenn der p -Teil der Klassengruppe von $\mathbb{Q}(N^{1/p})$ zyklisch ist. Hier betrachten wir nur den Fall $p \geq 5$. Zuerst muss [CE05, Cor. 1.6] gezeigt werden, anschließend behandeln wir [CE05, §5]. Neben den früheren Resultaten wird hier vor allem Klassenkörpertheorie verwendet.

Teil 5: Weitere Arbeiten. Wenn noch Zeit für weitere Vorträge bleibt, kann [Mer96, Thm. 2] behandelt werden. Alternativ könnte man auch die Resultate von [WW17] betrachten. Interessant ist auch die „Iwasawa-theoretische Interpretation“ auf [WW17, S. 5].

Literatur

- [CE05] Frank Calegari und Matthew Emerton. „On the ramification of Hecke algebras at Eisenstein primes“. In: *Inventiones mathematicae* 160 (2005), S. 97–144.
- [Len95] Hendrik W. Lenstra. „Complete intersections and Gorenstein rings“. In: *Elliptic Curves, Modular Forms and Fermat’s Last Theorem*. Cambridge: International Press, 1995, S. 99–109.
- [Maz77] Barry Mazur. „Modular curves and the Eisenstein ideal“. In: *Publications Mathématiques de l’I.H.E.S.* 47 (1977), S. 33–186.
- [Maz89] Barry Mazur. „Deforming Galois Representations“. In: *MSRI Publications* 16 (1989): *Galois Groups over \mathbb{Q}* , S. 385–437.
- [Mer96] Loïc Merel. „L’accouplement de Weil entre le sous-groupe de Shimura et le sous-groupe cuspidal de $J_0(p)$ “. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 477 (1996), S. 71–115.
- [Pilo8] Vincent Pilloni. *The study of 2-dimensional p -adic Galois deformations in the $\ell \neq p$ case*. Preprint. 2008. URL: <http://perso.ens-lyon.fr/vincent.pilloni/Defo.pdf>.
- [WW17] Preston Wake und Carl Wang-Eriksson. *The Rank of Mazur’s Eisenstein ideal*. Preprint. 2017. URL: <http://www.math.ucla.edu/~wake/EisensteinRank2.pdf>.