Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

12. Übungsblatt

24.01.2018

Auf dem ganzen Blatt sei F eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ und $G = \mathrm{GL}_2(F)$.

Aufgabe 1. Führe die fehlenden Details im Beweis von Satz 8.5 aus, welcher die lokalen Zeta-Integrale explizit berechnet.

Aufgabe 2. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Für jede irreduzible zulässige unendlichdimensionale Darstellung π von G existiert ein Ideal $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}$, sodass für jeden Quasi-Charakter $\chi\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, dessen Führer durch $\mathfrak{f}$ teilbar ist, $L(s, \pi \otimes \chi) = 1$ ist.

(b) Für je zwei irreduzible zulässige unendlichdimensionale Darstellungen π_1, π_2 von G existiert ein Ideal $\mathfrak{f}$, sodass für alle Quasi-Charaktere χ, deren Führer durch $\mathfrak{f}$ teilbar sind, gilt: $\gamma(s, \pi_1, \chi, \psi) = \gamma(s, \pi_2, \chi, \psi)$ und $L(s, \pi_1 \otimes \chi) = L(s, \pi_2 \otimes \chi) = 1$. (Hier ist ψ ein nichttrivialer Quasi-Charakter wie in der Vorlesung.)

Aufgabe 3. Seien $\chi_1, \chi_2, \xi, \psi\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ Quasi-Charaktere, sodass $\pi := B(\chi_1, \chi_2)$ irreduzibel ist und ψ nichttrivial. Zeige, dass dann gilt

$$\gamma(s, \pi, \xi, \psi) = \gamma(s, \xi\chi_1, \psi)\gamma(s, \xi\chi_2, \psi),$$

wobei die γs auf der rechten Seite die analogen Ausdrücke aus der GL_1-Theorie bezeichnen. Genauer: Ist das Zeta-Integral für GL_1 durch

$$Z(s, \xi\chi_i, \Phi) = \int_{F^\times} \xi\chi_i(x)\Phi(x)\,|x|^s\,\mathrm{d}x$$

definiert ($\mathrm{d}x$ bezeichnet hier ein Haarsches Maß auf $F^\times$), so ist

$$\gamma(s, \xi\chi_i, \psi) = \frac{Z(1-s, \xi^{-1}\chi_i^{-1}, \hat{\Phi})}{Z(s, \xi\chi_i, \Phi)},$$

wobei Φ eine Standardfunktion auf F ist (d. h. sie ist lokalkonstant und hat kompakten Träger) und die Fouriertransformierte $\hat{\Phi}$ bezüglich dem Charakter ψ gebildet wird.

Aufgabe 4. Zeige Lemma 8.7 der Vorlesung: Hier ist H eine lokalkompakte total unzusammenhängende Gruppe und $\xi\colon H \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Quasi-Charakter. Mit $\mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(H)$ sei der $\mathbb{C}$-Vektorraum der lokalkonstanten $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf H mit kompaktem Träger bezeichnet. Auf diesem operiert H durch $(h\phi)(\gamma) := \phi(h^{-1}\gamma)$ für $h, \gamma \in H$, $\phi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(H)$. Sei $T\colon\ \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Distribution (d. h. $\mathbb{C}$-linear), sodass für alle $\phi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(H)$ und $h \in H$ gilt

$$T(h\phi) = \xi(h)T(\phi),$$

dann ist T von der Form

$$T(\phi) = c\int_H \xi(h)\phi(h)\mathrm{d}h$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ (und einem linksinvarianten Haarschen Maß).

Besprechung am 31.01.2018 in der Übung.