Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

11. Übungsblatt

17.01.2018

Auf diesem Blatt soll gezeigt werden, dass supercuspidale Darstellungen existieren.

Notation. Auf dem ganzen Blatt sei F eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}$ der Ganzheitsring und k der Restklassenkörper. Da wir hier Matrizen mit Einträgen in verschiedenen Ringen brauchen, fassen wir $G = \mathrm{GL}_2$ wieder als algebraische Gruppe (über $\mathbb{Z}$) auf, ebenso wie ihre Untergruppen $B = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und Z (das Zentrum).

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe betrachten wir Darstellungen der endlichen Gruppe $G(k)$.
Sind $\chi_1, \chi_2 \colon k^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ Charaktere, so definieren wir analog zur Vorlesung $B(\chi_1, \chi_2) = \mathrm{ind}_{B(k)}^{G(k)}(\chi_1, \chi_2)$.

(a) Zeige: Eine irreduzible Darstellung von $G(k)$ ist genau dann äquivalent zu einer Unterdarstellung eines $B(\chi_1, \chi_2)$, wenn sie den trivialen Charakter von $U(k)$ enthält. Wenn dies nicht der Fall ist, nennen wir die Darstellung *cuspidal.*

(b) Man kann ähnlich wie in der Vorlesung zeigen, dass $B(\chi_1, \chi_2) \cong B(\chi_1', \chi_2')$ genau dann, wenn $\{\chi_1, \chi_2\} = \{\chi_1', \chi_2'\}$. Außerdem ist die Darstellung $B(\chi_1, \chi_2)$ genau dann irreduzibel, wenn $\chi_1 \neq \chi_2$, und andernfalls zerfällt sie in zwei verschiedene irreduzible Darstellungen.
Zeige mithilfe dieser Aussagen, dass cuspidale Darstellungen von $G(k)$ existieren.
Hinweis: Die Gruppe $G(k)$ besitzt $q^2 - 1$ Konjugationsklassen, wenn q die Kardinalität von k bezeichnet.

Aufgabe 2. Sei $H \subseteq G(F)$ eine Untergruppe, $\rho \colon H \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ eine Darstellung von H und $g \in G(F)$. Wir setzen $H^g := g^{-1}Hg$ und $\rho^g \colon H^g \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$, $\rho^g(h) = \rho(ghg^{-1})$. Wenn

$$\mathrm{Hom}_{H^g \cap H}(\rho^g, \rho) \neq 0,$$

so sagen wir, dass g die Darstellung ρ *verkettet.*

(a) Zeige: g verkettet $\rho \iff$ alle Elemente aus $HgZ(F)H$ verketten ρ.

(b) Sei nun $\tilde{\rho} \colon G(k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ eine Darstellung von $G(k)$. Indem wir die Projektion $G(\mathcal{O}) \longrightarrow G(k)$ vorschalten, fassen wir $\tilde{\rho}$ als Darstellung ρ von $G(\mathcal{O})$ auf. Zeige: Wenn $\tilde{\rho}$ cuspidal ist, dann verkettet ein $g \in G(F)$ genau dann ρ, wenn $g \in Z(F)G(\mathcal{O})$.

Aufgabe 3. Sei $K \subseteq G(F)$ eine offene Untergruppe, die $Z(F)$ enthält und modulo $Z(F)$ kompakt ist, und ρ eine irreduzible glatte Darstellung von K. Sei

$$\mathcal{H}(G(F), \rho) := \left\{ f \colon G(F) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\rho) : \begin{array}{l} f \text{ hat kompakten Träger modulo } Z(F) \text{ und} \\ \forall k_1, k_2 \in K,\ g \in G(F) \colon f(k_1 g k_2) = \rho(k_1) f(g) \rho(k_2) \end{array} \right\}.$$

Zeige für $g \in G(F)$: g verkettet genau dann ρ, wenn es ein $f \in \mathcal{H}(G(F), \rho)$ mit Träger KgK gibt.

Aufgabe 4. Sei nun τ eine irreduzible zulässige Darstellung von $Z(F)G(\mathcal{O})$, sodass ein $g \in G(F)$ genau dann τ verkettet, wenn $g \in Z(F)G(\mathcal{O})$.

(a) Begründe, warum ein solches τ existiert.

(b) Zeige, dass τ halbeinfach ist.

Wir setzen $\pi := \text{c-ind}_{Z(F)G(\mathcal{O})}^{G(F)} \tau$.

(c) Zeige, dass π als Darstellung von $Z(F)G(\mathcal{O})$ halbeinfach ist. (Wir wissen, dass Darstellungen kompakter Gruppen immer halbeinfach sind!)

(d) Zeige, dass π irreduzibel ist. Benutze dazu ohne Beweis, dass es einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{H}(G(F), \tau) \cong \mathrm{End}_{G(F)}(\pi)$ gibt.

(e) Zeige, dass π supercuspidal ist.