Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

9. Übungsblatt

20.12.2017

Auf dem ganzen Blatt sei F eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $G = \mathrm{GL}_2(F)$. Wir benutzen die Untergruppen von G der Form $U = U_2(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, $T = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ wie in der Vorlesung. Weiter sei

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G : a \in F^\times,\, b \in F \right\}$$

die mirabolische Untergruppe.

Aufgabe 1. Zeige Prop. 4.12: Eine glatte Darstellung V von U ist genau dann 0, wenn für jeden Charakter $\psi\colon F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ gilt, dass $J_\psi(V) = 0$.

Aufgabe 2. Sei $\psi\colon U \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein nichttrivialer Charakter. Zeige, dass die Darstellung $\mathrm{ind}_U^M \psi$ von M nicht irreduzibel ist. (Die Darstellung $\text{c-ind}_U^M \psi$ von M ist hingegen irreduzibel, wie in Satz 4.10 gezeigt wurde!)
Hinweis: Benutze die Aussagen aus Prop. 4.11.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe wird die Klassifikation der Darstellungen der mirabolischen Untergruppe M abgeschlossen. Zeige, dass für jede irreduzible glatte Darstellung (V, π) von M einer der beiden Fälle zutrifft:

(a) Entweder $\dim V = 1$ und π faktorisiert über $M/U \cong F^\times$,
(b) oder $\dim V = \infty$ und $V \cong \text{c-ind}_U^M \psi$ für jeden nichttrivialen Charakter $\psi\colon U \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.

Die Isomorphie in (b) soll wirklich für *jeden* solchen Charakter gelten, insbesondere sind alle unendlich-dimensionalen Darstellungen von M isomorph.
Hinweis: Betrachte V_N und $J(V)$ und benutze die Aussagen aus Satz 4.10 und Korollar 4.13.

Aufgabe 4. Sei $\chi\colon T \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Charakter. Im Beweis von Lemma 4.8 wurde die Abbildung

$$p\colon B(\chi) \longrightarrow \delta_B^{1/2}\chi, \quad f \longmapsto f(1)$$

betrachtet und behauptet, dass

$$f \in \ker p \iff \exists\, U_0 \subseteq U \text{ kompakt-offene Untergruppe mit } \operatorname{supp}(f) \subseteq Bw_0U_0.$$

Der Beweis dieser Behauptung wurde nur skizziert. Überlege dir, was hier noch fehlt und wie der Beweis abgeschlossen werden kann.

Besprechung am 10.01.2018 in der Übung.