Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

8. Übungsblatt

13.12.2017

Auf dem ganzen Blatt sei F eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, $G = \mathrm{GL}_2(F)$ und $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \subseteq G$.

Aufgabe 1. Sei $\psi\colon F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein stetiger Charakter, den wir als Darstellung von N auffassen. Sei weiter (V, π) eine glatte Darstellung von G. Wir benutzen den „getwisteten Jacquet-Modul" $J_\psi(V) = V/V_{N,\psi}$, wobei $V_{N,\psi}$ im Beweis von Lemma 4.9 eingeführt wurde. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Es gibt einen nichttrivialen Homomorphismus von G-Darstellungen $V \longrightarrow \operatorname{ind}_N^G \psi$.

(b) Es gibt eine nichttriviale lineare Abbildung $\lambda\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$, sodass

$$\lambda\left(\pi\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v\right) = \psi(a)\lambda(v)$$

für alle $v \in V$ und $a \in F$. (Eine solche Abbildung heißt *Whittaker-Funktional.*)

(c) $J_\psi(V) \neq 0$.

Aufgabe 2. (a) Zeige die *Iwahori-Zerlegung*:

$$K_0(\mathfrak{a}) = U^-(\mathfrak{a})T(\mathcal{O})U(\mathcal{O}),$$
$$K_1(\mathfrak{a}) = U^-(\mathfrak{a})T(\mathfrak{a})U(\mathcal{O}).$$

(b) Zeige die Integrationsformel aus Prop. 4.4

$$\int_{K'} \phi(k)\mathrm{d}k = \int_{U^-(\mathfrak{a})} \int_{T'} \int_{U(\mathcal{O})} \phi(utv)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

für integrierbare Funktionen ϕ auf K', wobei hier entweder $K' = K_0(\mathfrak{a})$, $T' = T(\mathcal{O})$ oder $K' = K_1(\mathfrak{a})$, $T' = T(\mathfrak{a})$ seien. (Dies gilt für geeignet normierte Haarmaße, sonst nur bis auf Konstanten.)

Besprechung am 20.12.2017 in der Übung.