Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

2. Übungsblatt

25.10.2017

Aufgabe 1. Es sei K ein perfekter Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{K}$. Mit $\mathrm{G}_{\mathrm{m},\overline{K}}$ bezeichnen wir die multiplikative Gruppe über $\overline{K}$.

(a) Zeige mithilfe von Aufgabe 4 des letzten Blattes, dass für jeden Torus T über $\overline{K}$ gilt
$$\mathrm{Hom}(T, \mathrm{G}_{\mathrm{m},\overline{K}}) \cong \mathbb{Z}^d$$
mit $d = \dim T$. Zeige weiter, dass $\mathrm{Hom}(T, \mathrm{G}_{\mathrm{m},\overline{K}})$ eine kanonische Aktion von $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ trägt.

(b) Ist T ein Torus über K, so schreiben wir $T_{\overline{K}}$ für seinen Basiswechsel zu $\overline{K}$. Zeige, dass die Zuordnung
$$T \longmapsto \mathrm{Hom}(T_{\overline{K}}, \mathrm{G}_{\mathrm{m},\overline{K}})$$
einen volltreuen Funktor von der Kategorie der Tori über K in die Kategorie der freien $\mathbb{Z}$-Moduln von endlichem Rang mit G_K-Aktion liefert.

(c) Zeige, dass der Funktor aus Teil (b) eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Aufgabe 2. Sei K ein perfekter Körper von Charakteristik ungleich 2. Für eine quadratische Körpererweiterung L betrachten wir wieder den Norm-1-Torus N_L aus Aufgabe 3 des letzten Übungsblattes.

(a) Zeige mithilfe der Kategorienäquivalenz aus Aufgabe 1 (c), dass jeder eindimensionale Torus über K entweder zu GL_1 oder N_L für eine quadratische Erweiterung L isomorph ist.

(b) Welche Isomorphieklassen von eindimensionalen Tori gibt es über $\mathbb{R}$, über einem endlichen Körper der Charakteristik ungleich 2 oder über $\mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p?

Aufgabe 3. Zeige die Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung (Satz 2.5 (ii) aus der Vorlesung).

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $\mathrm{GL}(2)/B \cong \mathbb{P}^1$ ist (wobei B die Standard-Borel-Untergruppe von $\mathrm{GL}(2)$ ist, d. h. die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen). Um das sauber zu formulieren, benötigen wir die folgende Definition.

Sei R ein kommutativer Ring, $F\colon R\text{-}\mathcal{Alg} \longrightarrow \mathcal{Grp}$ ein Gruppenfunktor und $G \subseteq F$ ein Unterfunktor, d. h. G ist ebenfalls ein Funktor $R\text{-}\mathcal{Alg} \longrightarrow \mathcal{Grp}$ und wir haben eine natürliche Transformation von G nach F, die für jede R-Algebra A eine Einbettung $G(A) \subseteq F(A)$ liefert. Wir definieren nun den Quotientenfunktor F/G als
$$F/G\colon R\text{-}\mathcal{Alg} \longrightarrow \mathcal{Ens}, \quad A \longmapsto F(A)/G(A)$$
(dieser geht in nur in die Mengen statt in die Gruppen, da wir nicht gefordert haben, dass G normal in F ist).

(a) Sei jetzt $R = \mathbb{Z}$, $F = \mathrm{GL}(2)$ und $G = B$ die Standard-Borel-Untergruppe. Zeige, dass dann $F/G \cong \mathbb{P}^1$ ist. Insbesondere ist der Quotientenfunktor ein Schema. Folgere die analoge Aussage über einem beliebigen kommutativen Ring.

(b) Zeige, dass im Allgemeinen der Quotientenfunktor kein Schema sein muss, selbst wenn beide Funktoren F und G Schemata sind.

Besprechung am 01.11.2017 in der Übung.