Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

PD Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

L-Funktionen vom Grad 2

1. Übungsblatt

18.10.2017

Aufgabe 1. Sei H eine endliche Gruppe und K ein Körper. Überlege dir, wie H als lineare algebraische Gruppe über K aufgefasst werden kann. Genauer suchen wir eine lineare algebraische Gruppe $G\colon K\text{-}\mathcal{Alg} \longrightarrow \mathcal{Grp}$, sodass für jeden Erweiterungskörper L von K gilt, dass $G(L) = H$. Wie sehen Koeinheit, Antipode und Komultiplikation konkret aus?

Aufgabe 2. Beweise Proposition 1.2 aus der Vorlesung: Sei R ein Ring und $X\colon R\text{-}\mathcal{Alg} \longrightarrow \mathcal{Ens}$ ein R-Funktor. Dann gibt es einen kanonischen Morphismus $\varepsilon\colon X \longrightarrow \mathrm{Sp}_R\, \mathcal{O}_X$, der die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jedes affine R-Schema Y und jeden Morphismus $f : X \longrightarrow$ Y gibt es genau einen Morphismus $\tilde{f}\colon\ \mathrm{Sp}_R\, \mathcal{O}_X \longrightarrow Y$, sodass $f = \tilde{f} \circ \varepsilon$.

Aufgabe 3. Es sei K ein perfekter Körper von Charakteristik ungleich 2. Für eine quadratische Körpererweiterung L sei ein K-Funktor $N_L\colon K\text{-}\mathcal{Alg} \longrightarrow \mathcal{Ens}$ definiert durch $N_L(A) = \{a \in A \otimes_K L : N(a) = 1\}$ (wobei hier N die Norm bezeichnet).

(a) Zeige, dass N_L eine lineare algebraische Gruppe ist.

(b) Zeige dass N_L ein Torus ist.

Aufgabe 4. Bestimme die Endomorphismen der algebraischen Gruppe $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.