Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

12. Übungsblatt

11.07.2018

Es sei G stets eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe, T ein maximaler Torus und $W = W_G(T)$ die Weyl-Gruppe.

Aufgabe 1. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\operatorname{ss-rk} G = 1$;
(b) $\#W = 2$;
(c) Es gibt genau zwei Borel-Untergruppen, die T enthalten;
(d) $\dim G/B = 1$ für jede Borel-Untergruppe B;
(e) $G/B \cong \mathbb{P}^1$ für jede Borel-Untergruppe B;
(f) Es gibt einen Epimorphismus $\phi\colon G \longrightarrow \mathrm{PGL}_2$ mit $(\ker\phi)^\circ = \mathrm{R}G$.

Hierfür darf ohne Beweis die folgende Aussage benutzt werden: Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T \subseteq \mathrm{GL}(V)$ ein Torus und $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ irreduzibel, abgeschlossen und T-stabil, so gilt:

- Ist $\dim X \geq 1$, so hat T mindestens zwei Fixpunkte in X.
- Ist $\dim X \geq 2$, so hat T mindestens drei Fixpunkte in X.