Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

10. Übungsblatt

20.06.2018

Auf dem ganzen Blatt sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe.

Aufgabe 1. (a) Zeige, dass eine maximale nilpotente abgeschlossene Untergruppe C, so dass $C = \mathrm{N}_G(C)^0$ ist, eine Cartan-Untergruppe ist.

(b) Zeige, dass eine maximale nilpotente Untergruppe C, sodass jede Untergruppe H von C von endlichem Index auch in $\mathrm{N}_G(H)$ endlichen Index hat, eine Cartan-Untergruppe ist.

Aufgabe 2. Sei T ein maximaler Torus, $C = \mathrm{Z}_G(T)$ die zugehörige Cartan-Untergruppe und B eine Borel-Untergruppe, die C enthält. Sei weiter $\sigma\colon G \longrightarrow G$ ein surjektiver Homomorphismus mit $\sigma(B) = B$.

(a) Wir definieren für jedes $b \in B$ einen Morphismus

$$\varphi_b\colon G \times B \longrightarrow G, \quad (x, c) \longmapsto \sigma(x)b^{-1}cx^{-1}b.$$

Dann gilt $\varphi_b(e, e) = e$. Sei $V \subseteq \mathrm{Lie}(G)$ das Bild von $(d\varphi_b)_{(e,e)}$. Zeige, dass $\mathrm{Lie}(B)$ und $(\mathrm{Ad}(b)\mathrm{d}\sigma - 1)\,\mathrm{Lie}(G)$ in V liegen.

(b) Zeige, dass es ein $b \in B$ gibt, sodass $\sigma(T) = b^{-1}Tb$ und der von $\mathrm{Ad}(b)\mathrm{d}\sigma$ induzierte Endomorphismus von $\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(B)$ nicht den Eigenwert 1 hat. (Finde zuerst ein $b \in B$, sodass die erste Bedingung erfüllt ist, und modifiziere es dann durch ein Element in T).

(c) Zeige, dass φ_b dominant ist, wenn b wie in (b) gewählt ist.

(d) Folgere, dass jeder surjektive Endomorphismus einer affinen algebraischen Gruppe eine Borel-Untergruppe fixiert.

Besprechung am 04.07.2018 in der Übung.