Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

8. Übungsblatt

06.06.2018

Aufgabe 1. Sei $G = \mathrm{GL}_2$ und $H = \mathrm{B}_2$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen.

(a) Bestimme den Quotienten G/H.

(b) Folgere, dass H eine parabolische Untergruppe ist.

(c) Betrachte auch die Situation $G = \mathrm{SL}_2$ und $H = \mathrm{U}_2$.

Aufgabe 2. Sei G eine affine algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe.

(a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) G/H ist zusammenhängend;

  (ii) H trifft alle irreduziblen Komponenten von G;

  (iii) $G = G^0 H$.

(b) Zeige: Wenn H und G/H zusammenhängend sind, ist auch G zusammenhängend.

Aufgabe 3. Zeige, dass für jede affine algebraische Gruppe die Charaktergruppe $X^*(G)$ endlich erzeugt ist.
Hinweis: Zeige zuerst, dass ohne Einschränkung G als zusammenhängend angenommen werden kann, und betrachte dann $G/[G, G]$.

Aufgabe 4. Sei $1 \longrightarrow H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} \Gamma \longrightarrow 1$ eine Folge von Abbildungen zwischen affinen algebraischen Gruppen. Zeige, dass diese genau dann exakt ist, wenn sie als Sequenz von abstrakten Gruppen exakt ist, φ eine abgeschlossene Immersion ist und ψ separabel ist.

Aufgabe 5. Für abstrakte Gruppen gelten die folgenden Isomorphiesätze:

(a) Sind $N \subseteq H \subseteq G$ Untergruppen und N normal in G, so ist

$$G/H \Big/ \cong (G/N) \Big/ (H/N) \,.$$

(b) Sind $N, H \subseteq G$ Untergruppen, sodass H im Normalisator von N liegt, dann gilt

$$HN/N \cong H/H \cap N \,.$$

Übertrage diese, wo möglich, auf algebraische Gruppen.

Besprechung am 13.06.2018 in der Übung.