Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

7. Übungsblatt

30.05.2018

Sei stets G eine affine algebraische Gruppe.

Aufgabe 1 (vgl. Übung v.3.2; *3 Punkte*). Sei $\mathrm{ad} := \mathrm{d}(\mathrm{Ad})\colon \operatorname{Lie} G \longrightarrow \operatorname{End}(\operatorname{Lie} G)$ die Ableitung der adjungierten Darstellung von G. Zeige, dass ad gegeben ist durch

$$\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y].$$

Hinweis: Zeige das zuerst für $G = \mathrm{GL}_n$ und folgere den allgemeinen Fall durch Einbettung.

Aufgabe 2 (vgl. Übung v.4.2; *4 Punkte*). Zeige, dass die Ableitung der Determinante

$$\det\colon \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{G}_\mathrm{m}$$

die Spur ist.

Aufgabe 3 (vgl. Übung v.4.3; *2 Punkte*). Sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein Morphismus von k-Vektorräumen. Zeige, dass dann für alle $v \in V$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_v V \arrow[r, "T_v(f)"] \arrow[d, "\sim"'] & T_{f(v)} W \arrow[d, "\sim"'] \\ V \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Aufgabe 4 (vgl. Übung vi.1.1; *6 Punkte*).
(a) Sei $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige: Wenn W stabil unter G ist, dann ist W auch stabil unter $\operatorname{Lie} G$.
(b) Wir betrachten jetzt die Situation aus Kor. ii.3.4: Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und $\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Dann existiert ein Unterraum $W \subseteq V$, sodass $H = \mathrm{Stab}_G(W)$. Zeige, dass W so gewählt werden kann, dass

$$\operatorname{Lie}(H) = \{X \in \operatorname{Lie}(G) : XW \subseteq W\}.$$

(c) Zeige schließlich, dass sogar $\dim W = 1$ angenommen werden kann.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*). Zeige: Ist $H \subseteq G$ eine normale Untergruppe, so ist $\operatorname{Lie} H \subseteq \operatorname{Lie} G$ ein *Ideal*, d. h. für alle $x \in \operatorname{Lie} G$, $y \in \operatorname{Lie} H$ ist $[x, y] \in \operatorname{Lie} H$.

Besprechung am 06.06.2018 in der Übung.