Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

5. Übungsblatt

16.05.2018

Aufgabe 1 (*3 Punkte*). Sei G eine affine algebraische Gruppe. Für $g \in G$ definieren wir einen k-linearen Endomorphismus a_g von $\mathcal{A}_G$ durch

$$a_g f(x) = f([g, x]) - f(1) \quad (f \in \mathcal{A}_G,\ x \in G).$$

Zeige: Wenn G nilpotent ist, ist a_g für jedes $g \in G$ nilpotent.

Aufgabe 2. Zeige:

(a) B_n ist auflösbar.

(b) U_n ist nilpotent.

(c) B_n ist nicht nilpotent.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*). Sei G eine affine algebraische Gruppe.

(a) Für eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ sei $N_G(H)$ der Normalisator (definiert wie in der üblichen Gruppentheorie). Zeige, dass $N_G(H)$ eine abgeschlossene Untergruppe ist.

Ab jetzt sei G zusammenhängend und nilpotent und $\dim G > 0$. Zeige:

(b) $\dim Z(G) > 0$.

(c) Für jede echte abgeschlossene Untergruppe $H \subsetneq G$ ist $\dim H < \dim N_G(H)$; insbesondere ist H normal, wenn $\operatorname{codim} H = 1$.

Besprechung am 23.05.2018 in der Übung.