Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

4. Übungsblatt

09.05.2018

Wie immer sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1 (*2 Punkte*)**.** Seien V, W endlichdimensionale k-Vektorräume.

(a) Zeige, dass die multiplikative Jordan-Zerlegung der Elemente von $\mathrm{GL}(V)$ eindeutig ist.

(b) Seien $x \in \mathrm{GL}(V)$, $y \in \mathrm{GL}(W)$. Zeige:

$$(x \otimes y)_{\mathrm{u}} = x_{\mathrm{u}} \otimes y_{\mathrm{u}}, \quad (x \otimes y)_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}} \otimes y_{\mathrm{s}}.$$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*)**.** Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $x \in \mathrm{GL}(V)$. Zeige:

(a) Falls $\operatorname{char} k = p > 0$: x ist unipotent $\iff$ es gibt $t \geq 0$ mit $x^{p^t} = 1$.

(b) Falls $\operatorname{char} k = 0$: Wenn x unipotent ist, hat es unendliche Ordnung.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)**.** Sei G eine affine algebraische Gruppe und G_{u} die Teilmenge der unipotenten Elemente. Zeige:

(a) Ist G kommutativ, so ist G_{u} eine algebraische Untergruppe.

(b) Die Aussage aus (a) ist falsch, wenn G nicht kommutativ ist.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)**.** Bestimme die unipotenten und halbeinfachen Elemente der folgenden Gruppen. Wie sieht die Jordan-Zerlegung der Elemente aus?

(a) $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$;

(b) $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$;

(c) die additive Gruppe eines endlichdimensionalen k-Vektorraums;

(d) eine endliche Gruppe, aufgefasst als algebraische Gruppe.

Besprechung am 16.05.2018 in der Übung.