Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2018

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Algebraische Gruppen

1. Übungsblatt

18.04.2018

Aufgabe 1 (*2 Punkt*). Theorem 15 der Vorlesung sagt, dass der Funktor, der einer affinen Varietät ihren Koordinatenring zuordnet, eine Äquivalenz der Kategorien der affinen Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und der reduzierten endlich erzeugten k-Algebren ist.
Zeige, dass diese Aussage falsch ist, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist.
Welche der vorangegangenen Aussagen ist in diesem Fall ebenfalls falsch?

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Sei k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beweise Lemmata 2 und 3 aus der Vorlesung:

(a) Für Ideale $I_1, I_2, I_\lambda \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ (wobei λ eine beliebige Indexmenge Λ durchläuft) gilt:
  (i) $I_1 \subseteq I_2 \implies V(I_1) \supseteq V(I_2)$,
  (ii) $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2)$,
  (iii) $V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$.

(b) Die Mengen $V(I)$ für Ideale $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}^n$, und die Mengen $D(f)$ für Polynome $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ bilden eine Basis für diese Topologie.

Besprechung am 25.04.2018 in der Übung.