Γ- und ε-Faktoren für Motive über $\mathbb{Q}$

Sei M ein Motiv über $\mathbb{Q}$, M_{B} seine Betti-Realisierung und

$$\mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} M_{\mathrm{B}} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^{p,q}(M)$$

die Hodge-Struktur. Wir definieren:

- $h^{pq} := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{p,q}(M)$ für $p, q \in \mathbb{Z}$,
- $h^{j,\pm}$ für $j \in \mathbb{Z}$ sei die Dimension des Unterraums von $\mathcal{H}^{j,j}(M)$, auf dem die komplexe Konjugation durch $\pm(-1)^j$ operiert,
- $N := \sum\limits_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p<q}} h^{pq}(q-p+1) + h^{p,-}$,
- $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ für $s \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $\varepsilon_\infty(M,s) = i^N$ und

$$L_\infty(M,s) = \prod_{j\in\mathbb{Z}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-j)^{h^{j,+}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-j+1)^{h^{j,-}} \prod_{\substack{p,q\in\mathbb{Z}\\ p<q}} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{pq}}.$$