Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

11. Übungsblatt

28.06.2017

Aufgabe 1 (*5+4=9 Punkte*). Sei E ein Körper der Charakteristik 0. Für jeden E-Vektorraum W versehen wir $\mathrm{Aut}_E(W)$ mit der diskreten Topologie.

Eine *Weil-Deligne-Darstellung* von $\mathrm{W}_{\mathbb{Q}_p}$ auf einem E-Vektorraum W ist ein Paar (ρ, N) aus einem stetigen Homomorphismus $\rho\colon \mathrm{W}_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{Aut}_E(W)$ und $N \in \mathrm{End}_E(W)$ so, dass für jeden geometrischen Frobenius $\tau \in \mathrm{W}_{\mathbb{Q}_p}$ gilt

$$\rho(\tau)N\rho(\tau^{-1}) = p^{-1}N.$$

Für eine solche Weil-Deligne-Darstellung ist der ε-Faktor definiert als

$$\varepsilon(W) := \varepsilon(\rho)\det(-\tau, W^{\mathrm{I}_p}/(\ker N)^{\mathrm{I}_p}).$$

Hier ist τ wieder ein geometrischer Frobenius und $\varepsilon(\rho)$ der „normale" ε-Faktor zu ρ aus der Vorlesung.

(a) Es sei nun $L/\mathbb{Q}_p$ endlich und V eine L-lineare de Rham-Darstellung von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Für jede Einbettung $\sigma\colon L \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ sei

$$W := \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \underset{L\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}, f}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}}_p.$$

Zeige, dass dann W eine Weil-Deligne-Darstellung ist (mit $E = \overline{\mathbb{Q}}_p$) und dass die obige Definition des ε-Faktors mit der aus der Vorlesung (nach Nakamura) übereinstimmt.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die eben erwähnte Definition des ε-Faktors multiplikativ in kurzen exakten Sequenzen ist. Dies gilt nicht, wenn der zweite Faktor in der Definition (die Determinante des Frobenius) weggelassen wird. Finde dafür ein Beispiel!

Aufgabe 2 (*4 Punkte*). Es sei $L/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung und V eine L-lineare de Rham-Darstellung von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$. In der Vorlesung wurde der Epsilon-Isomorphisms $\varepsilon_{L,\xi,\mathrm{dR}}(V)$ definiert als ein Element der Menge

$$I \times^{\mathrm{K}_1(L)} \mathrm{K}_1(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} L).$$

Zeige, dass diese Menge kanonisch in Bijektion steht mit

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \underset{L}{\otimes} \mathrm{d}_L(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)), \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \underset{L}{\otimes} \mathrm{d}_L(V)).$$

Anschließend wurde gezeigt, dass

$$\varepsilon_{L,\xi,\mathrm{dR}}(V) \in I \times^{\mathrm{K}_1(L)} \mathrm{K}_1(\tilde{L})$$

gilt. Zeige, dass dies bedeutet, dass $\varepsilon_{L,\xi,\mathrm{dR}}(V)$ einem Element in

$$\mathrm{Hom}(\tilde{L} \underset{L}{\otimes} \mathrm{d}_L(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)), \tilde{L} \underset{L}{\otimes} \mathrm{d}_L(V))$$

entspricht.

Abgabe in der Übung am 5. Juli oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 5. Juli.