Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

9. Übungsblatt

14.06.2017

Aufgabe 1 (*4+3+1+2+1+2=13 Punkte*). (a) Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung irgendwelcher Körper und V ein endlichdimensionaler L-Vektorraum mit einer semilinearen Aktion von $\mathrm{Gal}(L/K)$. Zeige, dass dann der „Galois-Abstieg“

$$V = L \underset{K}{\otimes} V^{\mathrm{Gal}(L/K)}$$

gilt.

Hinweis: Benutze, dass die Spurpaarung auf L perfekt ist, um einen Vektor aus V als L-Linearkombination von $\mathrm{Gal}(L/K)$-invarianten Vektoren zu schreiben.

(b) Seien nun $L/K/\mathbb{Q}_p$ endliche Erweiterungen und $V \in \mathcal{Rep}(\mathrm{G}_K)$. Finde einen kanonischen Isomorphismus

$$L \underset{K}{\otimes} \mathrm{D}_{\mathrm{dR},K}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_{\mathrm{dR},L}(V|_{\mathrm{G}_L})$$

und folgere

$$V \in \mathcal{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{G}_K) \iff V|_{\mathrm{G}_L} \in \mathcal{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{G}_L).$$

(c) Warum ist es uninteressant, „potentiell-de Rham-Darstellungen“ zu betrachten? Wie würde man $\mathrm{D}_{\mathrm{pdR}}$ definieren und warum ist das uninteressant?

(d) Zeige, dass der Funktor D_{dR} nicht volltreu ist.

(e) Überlege dir, dass die Aussagen aus dieser Aufgabe analog auch für Hodge-Tate-Darstellungen gelten.

(f) Überlege dir, warum die Aussage aus (b) *nicht* analog für semistabile oder kristalline Darstellungen gilt. Wo geht der Beweis kaputt? Unter welcher Bedingung an L und K gilt die Aussage doch?

Aufgabe 2 (*3+2=5 Punkte*). Zeige die Aussagen aus Bemerkung 9:

(a) $\mathcal{Rep}_{\mathrm{pcris}}(\mathrm{G}_K) \cap \mathcal{Rep}_{\mathrm{st}}(\mathrm{G}_K) = \mathcal{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{G}_K)$,

(b) $\mathcal{Rep}_{\mathrm{pcris}}(\mathrm{G}_K) \subseteq \mathcal{Rep}_{\mathrm{pst}}(\mathrm{G}_K) \subseteq \mathcal{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{G}_K)$.

Hinweis: Hier sind die Aussagen und Ideen aus Aufgabe 1 hilfreich.

Aufgabe 3 (*2+2+2=6 Punkte*). Es sei V eine de Rham-Darstellung von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Wir betrachten $W \coloneqq \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ mit der linearisierten Aktion der Weilgruppe $\mathrm{W}_{\mathbb{Q}_p}$.

(a) Vergewissere dich, dass es sich wirklich um eine lineare Aktion handelt.

(b) Wie kann man den Vektorraum W konkret beschreiben, wenn V semistabil ist? Zeige, dass die Aktion von $\mathrm{W}_{\mathbb{Q}_p}$ unverzweigt ist, wenn V semistabil ist. Wie operiert ein arithmetischer Frobenius?

(c) Beschreibe die Aktion der Weilgruppe auf W für $V = \mathbb{Q}_p(1)$.

Hinweis: Hier ist Aufgabe 3 vom 1. Übungsblatt hilfreich.

Abgabe in der Übung am 21. Juni oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 21. Juni.