Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

7. Übungsblatt

31.05.2017

Aufgabe 1 (*2+3+1+2+2+2+3=15 Punkte*). In dieser Aufgabe soll der Beweis der in der Vorlesung genannten Formel von Perrin-Riou für den Quotient gewisser Γ-Faktoren skizziert werden. Sei dazu M ein Motiv, $d_\pm(M) = \dim_{\mathbb{Q}} M_{\mathrm{B}}^\pm$ und $h^j(M) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}^j(M_{\mathrm{dR}})$ für $j \in \mathbb{Z}$. Dann lautet die besagte Formel

$$\frac{L_\infty^*(M^*(1))}{L_\infty^*(M)} = \pm 2^{d_-(M)-d_+(M)}(2\pi)^{-(d_-(M)+t_{\mathrm{H}}(M))} \prod_{j\in\mathbb{Z}} \Gamma^*(-j)^{-h_j(M)}$$

(hier ist $\pm$ ein nicht näher bestimmtes Vorzeichen).
Wir setzen weiter:

- $h^{pq}(M) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{p,q}(M)$ für $p, q \in \mathbb{Z}$,
- $h^{j,\pm}(M)$ für $j \in \mathbb{Z}$ sei die Dimension des Unterraums von $\mathcal{H}^{j,j}(M)$, auf dem die komplexe Konjugation durch $\pm(-1)^j$ operiert,
- $h^{j,>j}(M) := \sum_{q>j} h^{j,q}(M)$; definiere $h^{j,\geq j}(M)$ und $h^{j,<j}(M)$ entsprechend.

Schließlich seien die folgenden Gleichungen zur Gammafunktion angegeben, die ohne Beweis verwendet werden dürfen:

(1) $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)$,
(2) $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(2-s) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}s}$,
(3) $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(1-s) = \frac{2}{\sin \pi s}$.

Die obige Formel erhält man mit den folgenden Schritten:

(a) Der Euler-Faktor bei ∞ kann auch in der folgenden Form geschrieben werden.

$$L_\infty(M,s) = \prod_{j\in\mathbb{Z}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-j)^{h^{j,+}(M)+h^{j,>j}(M)} \prod_{j\in\mathbb{Z}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-j+1)^{h^{j,-}(M)+\sum_{q>j} h^{j,>j}(M)}.$$

Leite diese Darstellung aus der bereits bekannten Darstellung her.

(b) Zeige $h^j(M) = h^{j,\pm}(M) + h^{-1-j,\mp}(M^*(1))$ für $j \in \mathbb{Z}$.
(c) Zeige $h^{p,q}(M^*(1)) = h^{-p-1,-q-1}(M)$ für $p, q \in \mathbb{Z}$.
(d) Zeige $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} h^{ji}(M) = h_j(M)$ für $j \in \mathbb{Z}$.

Wir betrachten nun die Funktion

$$F(s) := \frac{L_\infty(M,s)}{L_\infty(M^*(1),-s)}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

(e) Zeige mithilfe von (a)–(d), dass

$$\begin{aligned} F(s) = &\prod_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\Gamma_{\mathbb{R}}(s-j)\Gamma_{\mathbb{R}}(-s+j+2)\Big)^{h^{j,+}(M)+h^{j,>j}(M)} \\ &\prod_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\Gamma_{\mathbb{R}}(s-j+1)\Gamma_{\mathbb{R}}(-s+j+1)\Big)^{h^{j,-}(M)+h^{j,>j}(M)} \\ &\prod_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\Gamma_{\mathbb{R}}(-s+j+1)\Gamma_{\mathbb{R}}(-s+j+2)\Big)^{-h_j(M)}. \end{aligned}$$

(f) Benutze dann die Formeln (1)–(3) von oben, um zu zeigen:

$$F(s) = 2^{-\mathrm{rk} M} \prod_{j \in \mathbb{Z}} \sin\left(\pi \frac{s-j}{2}\right)^{-h^{j,+}-h^{j,>j}} \sin\left(\pi \frac{s-j+1}{2}\right)^{-h^{j,-}-h^{j,>j}} \Big(\sin(\pi(s-j))\Gamma_{\mathbb{C}}(s-j)\Big)^{h_j(M)}.$$

(g) Erkläre mithilfe der Darstellung aus (f), wieso Perrin-Rious Formel plausibel ist (ohne alle Details nachzurechnen!).

Aufgabe 2 (*2+2+1+1+1=7 Punkte*)**.** Es seien V, W filtrierte Vektorräume. Zeige:

(a) $\mathrm{t_H}(V) = \mathrm{t_H}(\det V)$;

(b) $\mathrm{t_H}(V \otimes W) = \dim(W)\,\mathrm{t_H}(V) + \dim(V)\,\mathrm{t_H}(W)$;

(c) $\mathrm{t_H}(V^*) = -\,\mathrm{t_H}(V)$.

Überlege dir dann:

(d) Wie kann $\mathrm{t_H}$ für eindimensionale Vektorräume konkret beschrieben werden?

(e) Wie ändert sich $\mathrm{t_H}$, wenn wir mit $\mathbb{Q}(n)$ oder mit Artin-Motiven tensorieren?

Abgabe in der Übung am 7. Juni oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 7. Juni.