Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

6. Übungsblatt

24.05.2017

Aufgabe 1 (*2+2+2=6 Punkte*). Es sei $E/\mathbb{Q}$ eine elliptische Kurve und $M = \mathrm{h}^1(E)(1)$. Wir nehmen an, dass die L-Funktion von M wohldefiniert ist, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortgesetzt werden kann und die Vermutung über die Funktionalgleichung für M gilt (Vermutung V.1).[1]

(a) Zeige mithilfe der Weil-Paarung[2] $L(M,s) = L(M^*(1),s)$ (für $s \in \mathbb{C}$). Was bedeutet das für die Funktionalgleichung?

(b) Sei $\varepsilon(M,s)$ der ε-Faktor und $w(E) \in \{\pm 1\}$ das Vorzeichen von $\varepsilon(M,0)$.[3] Wir nehmen an, dass die Vermutung Sei η die Verschwindungsordnung von $L(M,s)$ bei $s=0$. Zeige

$$w(E) = (-1)^\eta.$$

(c) Wir nehmen nun außerdem an, dass die Vermutung über die Verschwindungsordnung für M gilt (Vermutung IV.4 von Deligne und Beilinson). Zeige, dass dann gilt: Ist $w(E) = -1$, dann hat E unendlich viele rationale Punkte.

Aufgabe 2 (*1+(2+1+1+2)+3=10 Punkte*). Es seien $K \subseteq M \subseteq L$ Erweiterungen archimedischer lokaler Körper (d. h. diese sind jeweils $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\rho\colon \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V)$ eine Darstellung. Wir definieren

$$L_\infty(\rho,s) := \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{\dim V}, & K \cong \mathbb{C}, \\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{\dim V^+}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{\dim V^-}, & K \cong \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Zeige $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$.
Hinweis: Verwende die Legendresche Verdopplungsformel.

(b) Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Ist ρ' eine Darstellung von $\mathrm{Gal}(M/K)$, so gilt

$$L_\infty(\rho',s) = L_\infty(\rho' \circ (\mathrm{Gal}(L/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(M/K)), s).$$

(2) Ist $K = L$ und $1_{L/K}$ die triviale eindimensionale Darstellung von $\mathrm{Gal}(L/K)$, so gilt

$$L_\infty(1_{L/K},s) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{C}}(s), & K \cong \mathbb{C}, \\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s), & K \cong \mathbb{R}. \end{cases}$$

(3) Es gilt $L_\infty(\rho_1 \oplus \rho_2, s) = L_\infty(\rho_1,s) \cdot L_\infty(\rho_2,s)$ für zwei Darstellungen ρ_1, ρ_2.

---

[1] Tatsächlich sind diese Vermutungen in diesem Fall sogar bekannt, da elliptische Kurven über $\mathbb{Q}$ modular sind.
[2] Diese wurde zu Beginn des Abschnittes IV.2 über die BSD-Vermutung erwähnt.
[3] Es gilt tatsächlich hier $\varepsilon(M,0) \in \mathbb{R}^\times$, sodass dies wohldefiniert ist.

(4) Ist ρ' eine Darstellung der Untergruppe $\mathrm{Gal}(L/M)$ und

$$\rho := \mathrm{ind}_{\mathrm{Gal}(L/M)}^{\mathrm{Gal}(L/K)} \rho' := \mathbb{C}[\mathrm{Gal}(L/K)] \underset{\mathbb{C}[\mathrm{Gal}(L/M)]}{\otimes} \rho'$$

die *induzierte Darstellung* von $\mathrm{Gal}(L/K)$, so gilt $L_\infty(\rho', s) = L_\infty(\rho, s)$.

(c) Zeige, dass $L_\infty(\rho, s)$ durch die Aussagen aus (b) schon eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 3 (*2+1+2=5 Punkte*)**.** Alle Vektorräume in dieser Aufgabe seien endlichdimensional.

(a) Wir betrachten $\mathbb{C}$-lineare Darstellungen von $\mathbb{C}^\times$, also stetige Homomorphismen $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}_\mathbb{C}(V)$ für $\mathbb{C}$-Vektorräume V. Welche Isomorphieklassen gibt es?

Hinweis: Betrachte zuerst eindimenionale Darstellungen und erinnere dich an das letzte Semester. Denke dann über Diagonalisierbarkeit nach.

(b) Folgere daraus, dass ein $\mathbb{Z}$-bigraduierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, also ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einer Zerlegung

$$V = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} V^{p,q}$$

in kanonischer Weise eine Darstellung von $\mathbb{C}^\times$ ist.

(c) Die *Weil-Gruppe* $\mathrm{W}_\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ wird erzeugt von $\mathbb{C}^\times$ und einem Element j mit den Regeln

$$j^2 = -1, \quad jzj^{-1} = \overline{z} \quad (z \in \mathbb{C}^\times).$$

Sei nun M_B die Betti-Realisierung eines K-Motivs M über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{Q} M_\mathrm{B}$ auf kanonische Weise eine Darstellung von $\mathrm{W}_\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4 (*1 Punkt*)**.** Für welche Objekte kennen wir jetzt mehr als eine Definition von ε- und Γ-Faktoren? Vergewissere dich, dass diese einander nicht widersprechen!

Abgabe in der Übung am 31. Mai oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 31. Mai.